

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ДСВ

Постернак О.С., студ. гр. ПЦБ-281

Науковий керівник – Фоміна І.П., старший викладач (кафедра Теоретичної механіки, Одеська державна академія будівництва та архітектури)

**Анотація.** Великий клас інженерних завдань представляють проблеми дослідження виникнення коливань у різних машинах і механізмах: підйомних кранах, автомобілях, поїздах і т.д.

Впливи, що викликають у спорудах змінні в часі деформації, переміщення і напруження, будемо називати динамічними. Дослідження виникаючих при цьому коливань конструкцій являють собою важливе інженерне завдання [1-2].

**Актуальність.** Будівельні конструкції будемо розглядати як деякі динамічні моделі у вигляді системи 2 типу, тобто ті, що складаються із пружних стержнів та пружин.

Розглянемо систему з даними:

- довжина ділянки стержня  $l = 2$  м;
- жорсткості пружин:  $c_1 = 200$  кН/м,  $c_2 = 900$  кН/м;
- маси матеріальних точок  $M_1$  і  $M_2$ :  $m_1 = 2$  т,  $m_2 = 9$  т;
- початкові переміщення точок  $M_1$  і  $M_2$ :  $q_{1,0} = 0,2$  м,  $q_{2,0} = 0,1$  м;
- початкові швидкості точок:  $V_{1,0} = 0,9$  м/с,  $V_{2,0} = 0,1$  м/с.

### 1. Визначення коефіцієнтів впливу та побудова графіків деформованого стану системи.

#### *1.1. Визначу коефіцієнти впливу $q_{12}$ та $q_{22}$ .*

Прикладу в точці  $M_2$  одиничну силу  $P_2 = 1$ . Визначу реакцію пружини  $R_1$ . Складу рівняння моментів для стержня  $BM_2$  щодо точки  $B$ .

$$\sum m_{z(B)} = R_1 \cdot l - P_2 \cdot 2l = 0 \Rightarrow R_1 = 2P_2 = 2 \quad (1)$$

Знайду величину деформації першої пружини (переміщення точки  $D$ ):

$$\Delta_1 = \frac{|R_1|}{c_1} = 0,01 \text{ м/кН} \quad (2)$$

Отже, переміщення точки  $D$  спрямоване вправо ( $R_1 = 2 > 0$ ).

Визначу реакцію пружини  $R_2$ . Складу рівняння моментів щодо точки  $K$  (нерухома точка):

$$\sum m_{z(K)} = -P_2 \cdot 3l + R_1 \cdot 2l - R_2 \cdot l = 0 \Rightarrow R_2 = 2R_1 - 3P_2 = 1 \quad (3)$$

Знайду величину деформації другої пружини (переміщення точки  $N$ ):

$$\Delta_2 = \frac{|R_2|}{c_2} = 0,0011 \text{ м/кН} \quad (4)$$

Отже, переміщення точки  $N$  спрямоване вправо ( $R_2 = 1 > 0$ ).

$q_{12} = \Delta_2 = \Delta_B = 0,00011$  м/кН.

$\Delta_1 + \Delta_B = 0,01 + 0,00011 = 0,01011$  м/кН.

$q_{22} = 2(\Delta_B + \Delta_1) - \Delta_B = (0,0011 + 0,01) - 0,0011 = 0,0211$  м/кН.

Побудую графік деформованого стану системи від  $P_2 = 1$  (рис. 1, А).

#### *1.2. Визначу коефіцієнти впливу $q_{11}$ та $q_{21}$ .*

Прикладу в точці  $M_1$  одиничну силу  $P_1 = 1$ . Визначу реакцію пружини  $R_2$ . Складу рівняння моментів щодо точки  $K$  (нерухома точка):

$$\sum m_{z(K)} = P_1 \cdot l - R_2 \cdot l = 0 \Rightarrow R_2 = P_1 = 1 \quad (5)$$

Знайду величину деформації другої пружини (переміщення точки  $N$ ):

$q_{11} = \Delta_2 = \Delta_B = q_{21} = 0,0011$  м/кН.

Отже, переміщення точки  $N$  спрямоване вправо ( $R_2 = 1 > 0$ ), пружина стиснута.

Побудую графік деформованого стану системи від  $P_I = 1$  (рис. 1, Б).

1.3. Складу матрицю переміщень:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0011 & 0,0011 \\ 0,0011 & 0,0211 \end{bmatrix} \quad (6)$$

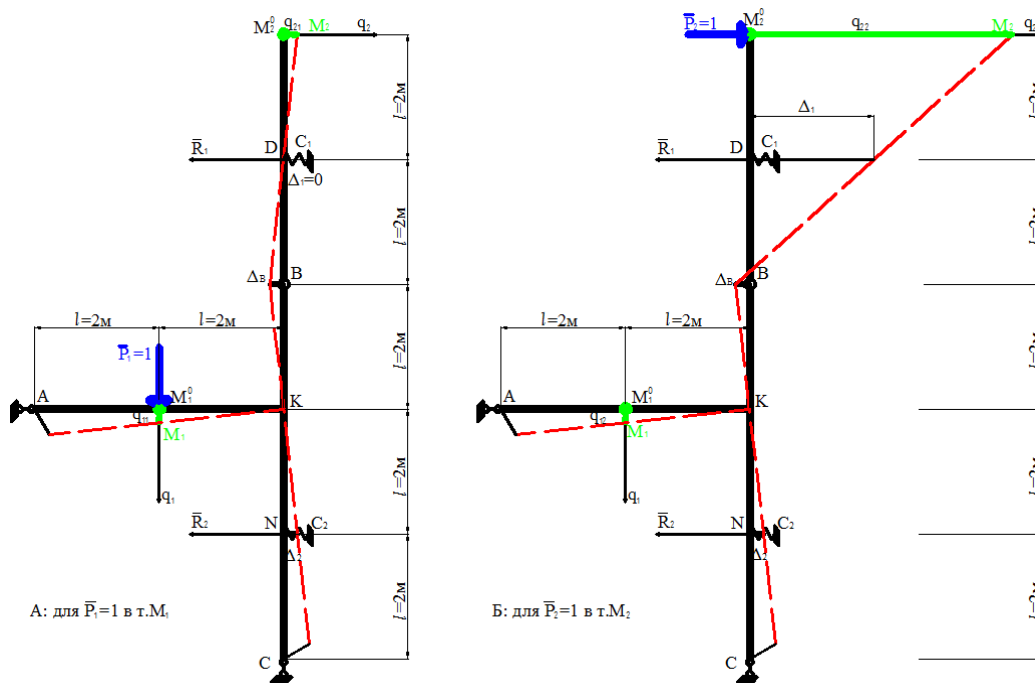


Рис. 1. Графіки деформованого стану системи: А – перша та Б – друга

2. Визначення коефіцієнтів та побудова графіків форм головного коливання [3-4].

2.1. Визначу коефіцієнти жорсткості конструкції та складу матрицю жорсткості.

Знайду визначник матриці переміщень:

$$\Delta = q_{11}q_{22} - q_{12}^2 = 22 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{кН}^2,$$

Коефіцієнти  $K_{11}$   $K_{12}$   $K_{21}$   $K_{22}$  :

$$K_{11} = q_{22} / \Delta = 959,09 \text{ кН/м},$$

$$K_{12} = K_{21} = q_{12} / \Delta = 50 \text{ кН/м},$$

$$K_{22} = q_{11} / \Delta = 50 \text{ кН/м}.$$

(7)

Складу матрицю жорсткості:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 959,09 & 50 \\ 50 & 50 \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.2. Розрахую коефіцієнти форми головних коливань.

Обчислюю коефіцієнти рівняння частот:

$$X_1 = \frac{m_1 K_{22} + m_2 K_{11}}{m_1 m_2} = 485,1 \text{ с}^{-2},$$

$$X_0 = \frac{K_{11} K_{22} - K_{12} K_{21}}{m_1 m_2} = 2525,25 \text{ с}^{-4} \quad (9)$$

Отже, рівняння частот має наступний вигляд:

$$k^4 - X_1 k^2 + X_0 = 0.$$

$$k^4 - 485,1 k^2 + 2525,25 = 0.$$

Розрахувавши його, отримую:

$$k_1^2 = 5,263 \text{ с}^{-2}, \quad k_2^2 = 479,84 \text{ с}^{-2}, \quad k_1 = 2,294 \text{ с}^{-1}, \quad k_2 = 21,905 \text{ с}^{-1}.$$

Знайду тепер коефіцієнти форми головних коливань:

$$\mu_1 = \frac{m_1 k_1^2 - K_{11}}{K_{12}} = -18,97, \mu_2 = \frac{m_1 k_2^2 - K_{11}}{K_{12}} = 0,012 \quad (10)$$

2.3. Розрахую амплітудні переміщення точок та складу амплітудну матрицю.

Розрахую амплітудні переміщення точок  $M_1$  і  $M_2$ , що відповідають нормованим формам ГОЛОВНИХ КОЛИВАНЬ:

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2 \mu_1^2}} = 0,0176, A_2^{(1)} = \mu_1 A_1^{(1)} = -0,3332, \quad (11)$$

$$A_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2 \mu_2^2}} = 0,7069, A_2^{(2)} = \mu_2 A_1^{(2)} = 0,0085.$$

Складу амплітудну матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0176 & 0,7069 \\ -0,3332 & 0,0085 \end{bmatrix}$$

Побудую першу (рис. 2, А) та другу (рис. 2, Б) форми головного коливання.

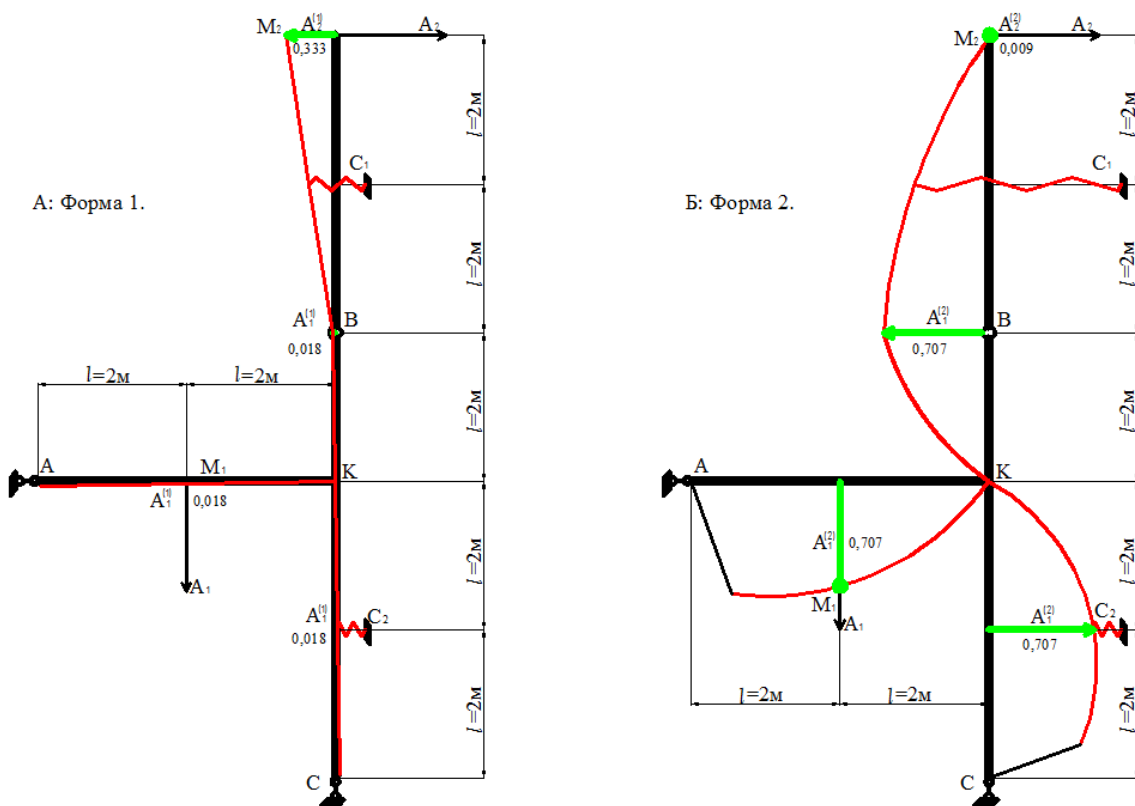


Рис. 2. Графіки форми головних коливань: А – перша та Б – друга

3. Визначення диференціальних рівняння та побудова графіків  $\eta_1(t)$  і  $\eta_2(t)$  та  $q_1(t)$  і  $q_2(t)$ .

Знайду значення головних координат і їхніх похідних при  $t = 0$ :

$$\eta_{1,0} = m_1 q_{1,0} A_1^{(1)} + m_2 q_{2,0} A_2^{(1)} = -0,2928,$$

$$\eta_{2,0} = m_1 q_{1,0} A_1^{(2)} + m_2 q_{2,0} A_2^{(2)} = 0,2904, \quad (12)$$

$$\zeta_{1,0} = m_1 V_{1,0} A_1^{(1)} + m_2 V_{2,0} A_2^{(1)} = -0,2682,$$

$$\zeta_{2,0} = m_1 V_{1,0} A_1^{(2)} + m_2 V_{2,0} A_2^{(2)} = 1,28.$$

Розв'язок системи диференціальних рівнянь вільного руху системи із ДСВ представлю в наступному виді:

$$\ddot{\eta}_1 + k_1^2 \eta_1 = 0,$$

$$\ddot{\eta}_2 + k_2^2 \eta_2 = 0.$$

$$\eta_1(t) = \Psi_1 \sin(k_1 t + \gamma_1),$$

$$\eta_2(t) = \Psi_2 \sin(k_2 t + \gamma_2).$$

Значення  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  визначу із формул:

$$\Psi_1 = \sqrt{\eta_{1,0}^2 + \frac{\zeta_{1,0}^2}{k_1^2}} = 0,3153, \quad \Psi_2 = \sqrt{\eta_{2,0}^2 + \frac{\zeta_{2,0}^2}{k_2^2}} = 0,2962, \quad (13)$$

$$\gamma_1 = \arctg \frac{k_1 \eta_{1,0}}{\zeta_{1,0}} = 1,19, \quad \gamma_2 = \arctg \frac{k_2 \eta_{2,0}}{\zeta_{2,0}} = 1,372.$$

Отже, диференційні рівняння функцій  $\eta_1(t)$  і  $\eta_2(t)$ :

$$\eta_1(t) = 0,315 \sin(2,294t + 1,19)$$

$$\eta_2(t) = 0,296 \sin(21,905t + 1,372)$$

Розрахую для функцій  $\eta_1(t)$  і  $\eta_2(t)$  період коливань ( $T$ ):

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2 \cdot 3,14}{2,294} = 2,74 \text{ c}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2 \cdot 3,14}{21,905} = 0,29 \text{ c}$$

Графіки функцій  $\eta_1(t)$  і  $\eta_2(t)$  представлені на рис. 3,А.

Перейду до диференційних рівняння функцій змінних  $q_1(t)$  і  $q_2(t)$ :

$$q_1(t) = \eta_1(t)A_1^{(1)} + \eta_2(t)A_1^{(2)},$$

$$q_2(t) = \eta_1(t)A_2^{(1)} + \eta_2(t)A_2^{(2)}. \quad (14)$$

Підставляю значення та оптимізіую:

$$q_1(t) = 0,00555 \sin(2,294t + 1,19) + 0,2094 \sin(21,905t + 1,372),$$

$$q_2(t) = -0,1051 \sin(2,294t + 1,19) + 0,00252 \sin(21,905t + 1,372).$$

Графіки функцій  $q_1(t)$  і  $q_2(t)$  представлені на рис. 3,Б.

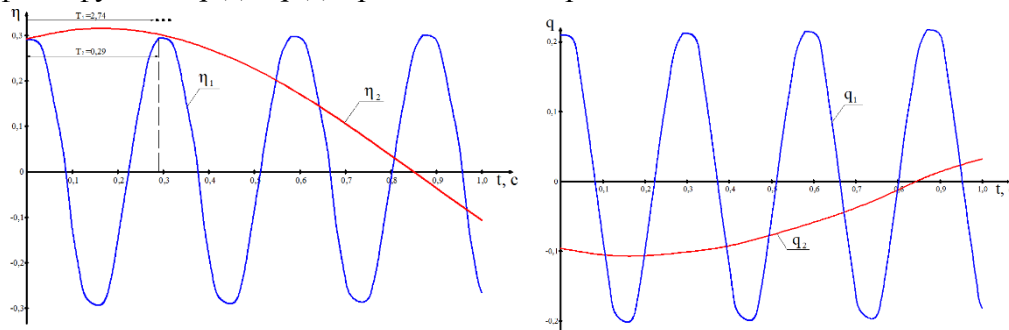


Рис. 3. Графіки функцій: А –  $\eta_1(t)$  і  $\eta_2(t)$  та Б –  $q_1(t)$  і  $q_2(t)$

**Висновки.** Досліджено вільні коливання пружної механічної системи з двома ступенями вільності. Зокрема, розроблено графіки деформованого стану системи від  $P = 1$ ; графіки форм головних коливань (перша та друга); графіки функцій:  $\eta_1(t)$  і  $\eta_2(t)$  та  $q_1(t)$  і  $q_2(t)$ . Графіки показують, що маса матеріальної точки  $M_2$  коливається набагато повільніше  $M_1$ .

#### Література:

1. V.M. Fomin, I.P. Fomina. Theoretical mechanics. Dynamics. OSACEA. 2019.
2. V.M. Fomin, I.P. Fomina. Dynamic models for engineering problems (special course). OSACEA. 2021.
3. Фомін В.М., Фоміна І.П. Динамічні моделі в інженерних задачах. Конспект лекцій, 2021, ОДАБА.
4. Фомін В.М., Фоміна І.П. Теоретична механіка. Навчальний посібник (англ. м.), 2020, ОДАБА.