

ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ (ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА)

Юхновець О.М., студ. гр. БЦІ-202

Науковий керівник – Фоміна І.П., ст. викладач (кафедра Теоретичної механіки, Одеська державна академія будівництва та архітектури)

Анотація. Робота присвячена пошуку внутрішніх зусиль заданої системи на основі визначення реакцій, що виникають, за допомогою спеціального методу, керуючись принципом Лагранжа (можливих переміщень).

Нескінченно малі переміщення механічної системи, що допускаються миттєво зупиненими в'язями, називаються можливими. Якщо в'язі, накладені на механічну систему стаціонарні, то можливими є нескінченно малі переміщення, що допускаються цими в'язями.

Механічна система називається вільною, якщо на переміщення її точок і їхніх швидкостей не накладені ніякі обмеження. У протилежному випадку система називається невольною. Обмеження, що накладаються на переміщення і швидкості точок невольної механічної системи, називаються в'язями.

Математично в'язі можуть бути виражені за допомогою рівностей чи нерівностей.

Теорема (принцип можливих переміщень). Для того щоб механічна система, підпорядкована ідеальним, стаціонарним, геометричним, утримуючим в'язям, знаходилася в рівновазі, необхідно і достатньо, щоб швидкості точок системи в початковий момент дорівнювали нулю і сума елементарних робіт активних сил на будь-якому можливому переміщенні дорівнювала нулю, тобто:

$$V_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \delta A = \sum_{k=1}^n (F_k, \delta r_k) = 0 \quad (1)$$

Тому для визначення реакцій за допомогою принципу можливих переміщень використовується спеціальний метод:

- 1) відкидаємо в'язь, реакцію якої необхідно визначити;
- 2) дію відкинутої в'язі заміняємо силою, що дорівнює шуканій реакції;
- 3) надаємо системі з відкинутою в'язею можливе переміщення;
- 4) обчислюємо суму робіт активних сил, включаючи додану, на цьому переміщенні;
- 5) з отриманого рівняння знаходимо додану силу і тим самим визначаємо реакцію в'язі.

Також принцип Даламбера-Лагранжа говорить про те, що рух механічної системи, підпорядкованої ідеальним, стаціонарним, геометричним, утримуючим в'язям, здійснюється таким чином, що у кожний момент часу сума елементарних робіт активних сил, прикладених до точок системи, і сил інерції цих точок на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k + \mathbf{J}_k, \delta \mathbf{r}_k) = 0$$

Висновки та результати. Продемонструємо принцип визначення реакцій на прикладі.

Конструкція, що складається з двох балок, з'єднаних шарніром С, знаходиться в рівновазі під дією моменту М та двох сил. Використовуючи принцип можливих переміщень визначити значення моменту М, якщо $F_1 = 50$ кН, $F_2 = 100$ кН, $l = 3$ м.

Надаємо механізму можливе переміщення, при якому частина ВКD повертається на нескінченно малий кут $\delta\varphi_1$ навколо точки В, а частина АСЕ – на кут $\delta\varphi$ навколо точки А. На цьому переміщенні сили та пара М, виконують наступну роботу:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_n^A = M\delta\varphi + F_1\beta S_D \cos \alpha - F_2 \delta S_E \cos \beta = 0$$

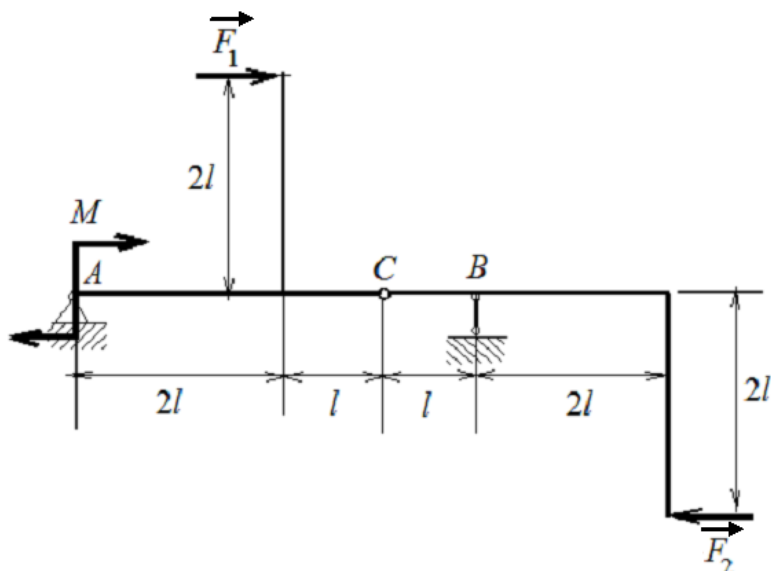


Рис. 1. Схема плоскої рами у рівновазі

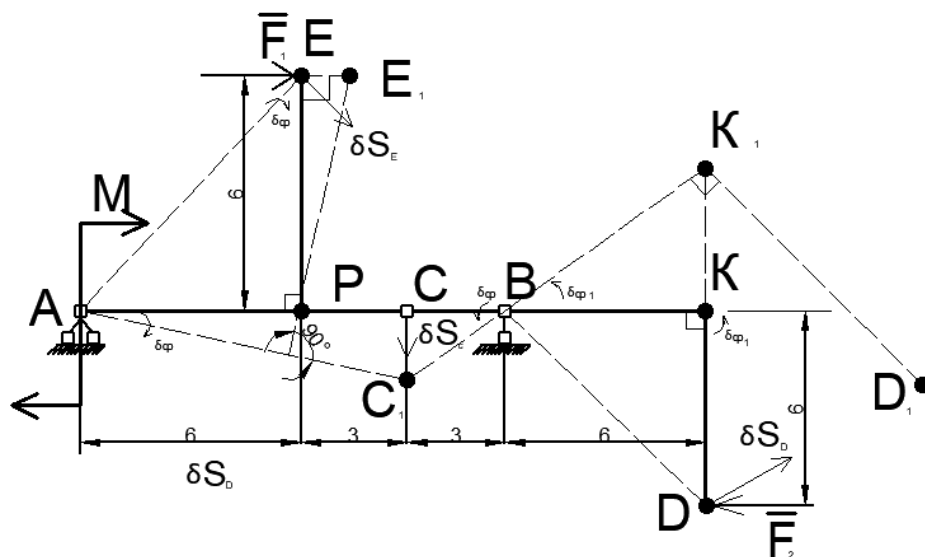


Рис. 2. Схема плоскої рами під дією зовнішніх сил

Виразимо всі переміщення через $\delta\varphi$:

$$AE = \sqrt{(2l)^2 - (2l)^2} = l\sqrt{8} \text{ м}$$

$$\delta S_E = \delta\varphi \cdot AE = l\sqrt{8} \delta\varphi$$

$$BD = \sqrt{(2l)^2 - (2l)^2} = l\sqrt{8}$$

$$\delta S_E = l\sqrt{8} \delta\varphi_1$$

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta\varphi 3l}{l} = 3\delta\varphi$$

Підставляємо все у формулу для визначення роботи:

$$\sum \delta A = M \cdot \delta\varphi + F_1 l\sqrt{8} \cdot \delta\varphi \cdot \cos 45^\circ - F_2 3\delta\varphi l\sqrt{8} \cos 45^\circ = 0$$

$$\delta\varphi (M + F_1 \cdot l\sqrt{8} \cdot \cos 45^\circ - F_2 \cdot 3l\sqrt{8} \cos 45^\circ) = 0$$

Тому що $\delta\varphi \neq 0$, тоді:

$$(M + F_1 \cdot l\sqrt{8} \cdot \cos 45^\circ - F_2 \cdot 3l\sqrt{8} \cos 45^\circ) = 0$$

Звідки і знаходимо значення моменту:

$$M = -F_1 \cdot l\sqrt{8} \cdot \cos 45^\circ + F_2 \cdot 3 \cdot l\sqrt{8} \cdot \cos 45^\circ$$

$$M = -50 \cdot 3\sqrt{8} \cdot \cos 45^\circ + 100 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{8} \cdot \cos 45^\circ = 1500 \text{ КН м}$$

Відповідь: $M = 1500 \text{ КН} \cdot \text{м}$.

Література:

1. Лещенко Д.Д., Козаченко Т.О. Динаміка механічної системи: навчальний посібник. – Одеса, ОДАБА. 2018. – 123с.
2. Бекшаєв С.Я., Козаченко Т.О. Кінематика: навчальний посібник. – Одеса: ОДАБА, 2021. – 87с.
3. Fomin V.M., Fomina I.P. Theoretical mechanics course tutorial (for students of speciality 192 “Building and Civil Engineering”). – Odessa: OSACEA. – 2020. – 189с.
4. Лещенко Д.Д., Козаченко Т.О., Зінкевич Я.С., Фоміна І.П. Методичні вказівки та завдання для виконання розрахунково-графічних робіт з курсу теоретичної механіки. Розділ «Кінематика».– Одеса: ОДАБА, 2017. –53с.
5. Лещенко Д.Д., Фомін В.М., Бекшаєв С.Я., Козаченко Т.О. Методичні вказівки та завдання для виконання розрахунково-графічних робіт з курсу теоретичної механіки: «Динаміка матеріальної точки», «Динаміка механічної системи», «Елементи аналітичної механіки». –Одеса: ОДАБА. – 2018. – 49с.
6. Лещенко Д.Д., Фомін В.М., Бекшаєв С.Я., Козаченко Т.О., Фоміна І.П. Методичні вказівки та завдання для виконання контрольних робіт з курсу теоретичної механіки. – Одеса: ОДАБА. – 2019. – 45с.