

УДК 624.04

ГРАНИЧНЕ НАВАНТАЖЕННЯ АРОК ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЗГИНАЛЬНОГО МОМЕНТУ І ПОВЗДОВЖНЬОЇ СИЛИ

Сорока М. М.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Розглядається граничний стан кругових арок постійної і змінної жорсткості. Матеріал арок пружно-пластичний і має різні границі текучості при розтягуванні і стисненні. Армування перерізу також прийнято у вигляді пружно-пластичного матеріалу із однаковими границями текучості при розтягу і стисненні. Розглянуто використання у розрахунках двох факторів – поздовжньої сили і згинального моменту. Для визначення граничного навантаження використовується метод граничної рівноваги із залученням області міцності поперечного перерізу арки. Область міцності перерізу арки будується на основі аналітичних залежностей [12].

Для знаходження граничного навантаження для арок запропонований алгоритм і розроблена програма розрахунку. Алгоритм розрахунку використовує так званий «прямий метод». Такий підхід не потребує використання ітераційних процесів, що сприяє більшій точності розрахунків. Програма розрахунку, яка реалізує даний алгоритм, написана на APDL і виконується у середовищі ANSYS. У програмі реалізований розрахунок двошарнірних і безшарнірних кругових арок із двотавровим армованим перерізом. Використання APDL дозволяє досить просто перейти до розрахунку арок будь-якої геометричної форми. Для цього потрібно лише скоригувати блок опису геометрії розрахункової моделі. Розрахунок також можна виконувати при дії будь-якого простого навантаження. Приклади розрахунку виконані для арок із прямокутним не армованим перерізом при дії рівномірно розподіленого вертикального навантаження.

У результаті розрахунків одержані значення граничних навантажень для арок постійної і змінної жорсткості. Проведено порівняння одержаних граничних навантажень із граничними навантаженнями, які були одержані із врахуванням тільки згинального моменту. Показано, що розрахунок арок за граничним станом необхідно проводити із врахуванням і згинального моменту і поздовжньої сили. Врахування при обчисленні тільки згинального моменту не дозволяє використати повну несучу здатність поперечного перерізу, що призводить до значних похибок у визначенні граничного навантаження для арок.

Ключові слова: арки, пружнопластичне тіло, прямокутний перетин, пластичний шарнір, розрахунок за граничною рівновагою

LIMIT LOAD OF ARCHES TAKING INTO ACCOUNT BENDING MOMENT AND LONGITUDINAL FORCE

M. Soroka¹

¹Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The limit state of circular arches of constant and variable stiffness is considered. The material of the arches is elastic-plastic and has different yield points in tension and compression. The reinforcement of the section is also taken in the form of an elastic-plastic material with the same yield points in tension and compression. The use of two factors in the calculations is considered - longitudinal force and bending moment. To determine the ultimate load, the limit equilibrium method is used with the involvement of the strength region of the cross-section of the arch. The strength region of the arch section is built on the basis of analytical dependencies [12].

To find the ultimate load for arches, an algorithm is proposed and a calculation program is developed. The calculation algorithm uses the so-called "direct method". This approach does not require the use of iterative processes, which contributes to greater accuracy of calculations. The calculation program that implements this algorithm is written in APDL and runs in the ANSYS



environment. The program implements the calculation of two-hinged and hingeless circular arches with an I-beam reinforced section. Using APDL makes it quite easy to proceed to the calculation of arches of any geometric shape. To do this, you only need to adjust the geometry description block of the calculation model. The calculation can also be performed under the action of any simple load. The calculation examples are performed for arches with a rectangular unreinforced section under the action of a uniformly distributed vertical load.

As a result of the calculations, the values of the ultimate loads for arches of constant and variable stiffness were obtained. The obtained ultimate loads were compared with the ultimate loads that were obtained taking into account only the bending moment. It is shown that the calculation of arches according to the limit state must be carried out taking into account both the bending moment and the longitudinal force. Taking into account only the bending moment when calculating does not allow using the full bearing capacity of the cross section, which leads to significant errors in determining the ultimate load for the arch.

Keywords: arches, elastoplastic body, rectangular section, plastic hinge, calculation by limit equilibrium.

1 ВСТУП

Широке використання залізобетонних, дерев'яних і металевих арок у якості несучих конструкцій будівель та споруд потребує удосконалення методики їх розрахунку. Знання граничного навантаження необхідне як для арок, які проєктуються, так і для арок, які знаходяться в процесі експлуатації. Оскільки більшість розрахунків несучої здатності арок виконуються із врахуванням тільки згинальних моментів, виникла необхідність виявити, як впливає врахування поздовжньої сили на величину граничного навантаження. У попередній роботі [13] проведено розрахунок несучої здатності арок без врахування поздовжньої сили. У даній роботі представлена чисельна методика розрахунку несучої здатності двохшарнірної і безшарнірної арок із врахуванням впливу поздовжньої сили і моменту на величину граничного навантаження. Виконано порівняння результатів розрахунку із результатами роботи [13].

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Теоретичні роботи, присвячені дослідженню граничного стану конструкцій [1] - [4] опубліковані у першій половині двадцятого століття, коли був створений належний математичний апарат. У перших дослідженнях, виконаних із використанням створеної теорії граничної рівноваги, вважалося, що найбільш значимим фактором від якого залежить величина граничного навантаження, є згинальний момент. Було введено поняття пластичного шарніру, який дозволяв вільний поворот частин конструкції. Але, на відміну від простого шарніру, у пластичному шарнірі діяв пластичний момент. Подальші дослідження [3] - [7] показали, що врахування тільки згинального моменту не завжди приводить до вірного результату. Наприклад, на величину граничного навантаження для арочних систем значний вплив має поздовжня сила. Врахування двох факторів – поздовжньої сили і моменту ускладнило розрахунки і привело до введення такого поняття як область міцності. Це область, яка будується у координатах момент – поздовжня сила, окреслена граничними значеннями M_b і N_b . В загальному випадку границя області міцності криволінійна [9, 10, 12], але в деяких випадках для зручності обчислень криволінійну границю замінюють відрізками прямих [3, 5]. Форма області міцності для стрижневих конструкцій залежить від форми поперечного перерізу і діаграми деформування матеріалу. Залежності, які описують область міцності разом із рівняннями статки і деякими обмеженнями можна розглядати як екстремальну задачу, розв'язок якої дає значення граничного навантаження [11]. Але, така методика розрахунку має обмеження. Вона дійсна тільки для симетричних арок із симетричним навантаженням. Для несиметричних систем виникає необхідність створення більш загальної методики розрахунку. Така методика із використанням прямого методу розрахунку [8] і методу скінчених елементів запропонована у даній роботі.

3 МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У даній роботі поставлена задача дослідження граничного стану арок при врахуванні згинального моменту і поздовжньої сили. Передбачається створення програми для розрахунку арок на основі наведеного алгоритму із використанням методу скінчених елементів. Також передбачається порівняння одержаних результатів із результатами, одержаними раніше при розрахунку граничного стану арок без врахування поздовжньої сили. Розглядаються арки як змінної, так і постійної жорсткості.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Методика визначення граничного навантаження для арок базується на гіпотезах теорії розрахунку конструкцій за граничним станом [1, 2, 3].

При створенні програми розрахунку граничного стану арок за методом скінчених елементів використовується прямий метод, який для випадку, коли враховується тільки згинальний момент описаний у підручнику [8]. При врахуванні ще й поздовжньої сили алгоритм розрахунку арки змінної жорсткості можна описати так.

1. Арка розбивається на скінчені елементи (СЕ) постійної жорсткості. Для кожного СЕ арки змінної жорсткості будується область міцності. Для арки постійної жорсткості область міцності єдина для усіх СЕ.

2. Виконується статичний розрахунок арки при дії одиничного навантаження ($q = 1$). Тобто, в усіх перерізах арки визначаються зусилля M_1 і N_1 .

3. Для кожного перерізу арки із застосуванням області міцності визначається комбінація граничних зусиль – згинального моменту M_b і поздовжньої сили N_b , яка переводить переріз у пластичний стан.

4. З урахуванням гіпотез теорії розрахунку систем за граничним станом для усіх перерізів арки визначається значення граничного навантаження

$$q = 1 \cdot |M_b / M_1|, \text{ або } q = 1 \cdot |N_b / N_1|.$$

5. Вибирається переріз, де граничне навантаження найменше і для цього перерізу (скінченого елемента) встановлюються жорсткості EI і EA близькі до нуля.

6. Будуються епюри моментів і поздовжніх сил від знайденого граничного навантаження $M_s = qM_1$; $N_s = qN_1$.

7. Перевіряється геометрична змінність арки. Якщо арка стає геометрично змінною розрахунок закінчується.

8. З урахуванням зміни жорсткостей скінчених елементів відповідно до п. 5 арка завантажується одиничним навантаженням і знаходяться нові значення зусиль M_1 і N_1 .

9. Для кожного перерізу арки із застосуванням області міцності і з врахуванням уже існуючих зусиль M_s і N_s визначається комбінація згинального моменту M_b і поздовжньої сили N_b , яка переводить переріз у пластичний стан.

10. Для усіх перерізів визначається приріст граничного навантаження Δq

$$|M_s + \Delta q M_1| = M_b, \text{ або } |N_s + \Delta q N_1| = N_b.$$

11. Вибирається переріз, де приріст граничного навантаження найменший і для цього перерізу (скінченого елемента) встановлюються жорсткості EI і EA близькі до нуля.

12. Будуються епюри згинальних моментів і поздовжніх сил:

$$M_s = M_s + \Delta q M_1; \quad N_s = N_s + \Delta q N_1.$$

13. Визначається граничне навантаження для арки на даному етапі розрахунку

$$q = q + \Delta q.$$

14. Перевіряється геометрична змінність арки. Якщо арка є геометрично незмінною розрахунок продовжується, починаючи із п. 8. У протилежному випадку розрахунок закінчується.

Такий алгоритм розрахунку не містить ітераційних процесів і дозволяє досить просто обчислити граничне навантаження, визначити перерізи, які переходять у пластичний стан і побудувати епюри зусиль у граничному стані арки.

Розглянемо більш детально декі пункти наведеного алгоритму. Для побудови області міцності поперечного перерізу використовуються аналітичні залежності [12]. Знаходження граничних зусиль для поперечного перерізу базується на допущенні методу граничної рівноваги про лінійне деформування перерізу до досягнення пластичного стану. Для прикладу розглянемо верхню частину області міцності несиметричного перерізу (рис. 1). Граничні зусилля для перерізу, відповідно до п. 3, можна знайти як перетин прямої, яка проходить через нуль і точку з координатами зусиль від одиничного навантаження, із границею області міцності.

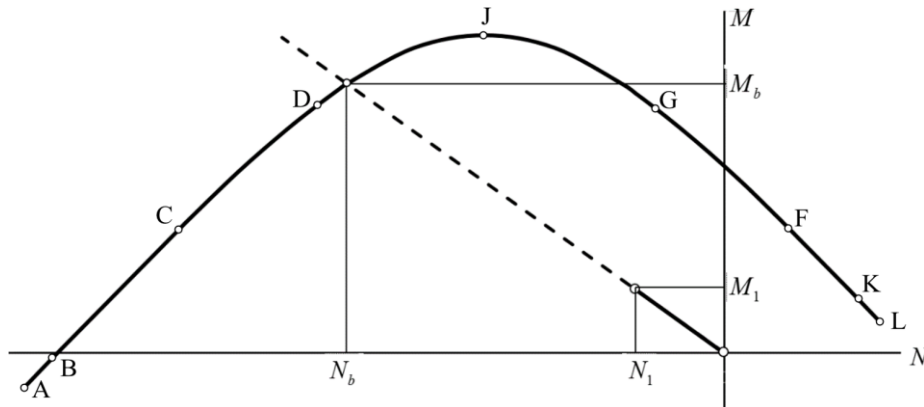


Рис. 1. Визначення граничних зусиль для перерізу, відповідно до п. 3 алгоритму розрахунку

Для знаходження граничних зусиль у перерізі відповідно до п. 9 необхідно враховувати зусилля M_s і N_s , які діють у перерізі, і вже від них відкладати значення одиничних зусиль (рис. 2).

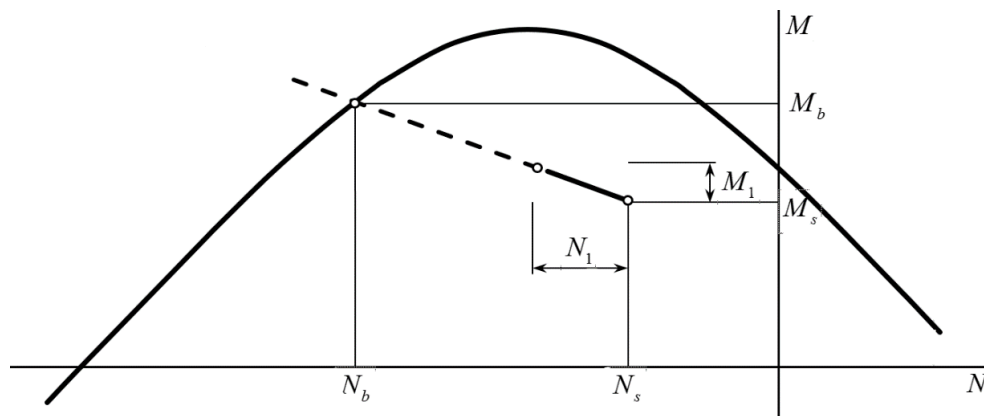


Рис. 2. Визначення граничних зусиль для перерізу, відповідно до п. 9 алгоритму розрахунку

За описаним алгоритмом складена програма розрахунку арки за граничним станом. Для написання програми використовувалась мова програмування APDL, яка є складовою частиною програмного комплексу ANSYS. Використання APDL обумовлене тим, що статичний розрахунок арки, побудову епюр внутрішніх зусиль, побудову деформованої схеми арки бере на себе ПК ANSYS. У програмі на APDL потрібно лише задати параметри арки і описати порядок дій відповідно до алгоритму розрахунку. Програма складена у припущенні, що арка має двотавровий поперечний переріз, армований подвійною арматурою [12]. Із такого перерізу, змінюючи його параметри, легко одержати тавровий, або прямокутний переріз.

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Приклади розрахунку

Розглядаються двошарнірна і безшарнірна не армовані арки прямокутного поперечного перерізу постійної і змінної жорсткості, завантажені рівномірно розподіленим вертикальним навантаженням. Параметри арок [13]: проліт $l=20\text{м}$, стріла підйому $f=1\div 9\text{м}$, розміри поперечного перерізу $b=0.2\text{м}$, $h=1.0\text{м}$ (для арки змінної жорсткості $h_0=1.0\text{м}$), фізичні характеристики матеріалу $\sigma_{yc}=14500\text{кН/м}^2$, $\sigma_{yt}=1300\text{кН/м}^2$, $M_0=119.3038\text{кНм}$.

Базові точки області міцності для описаного поперечного перерізу представлені у таб. 1. Для не армованого перерізу точки В і С і точки F і К – співпадають. Для симетричного перерізу область міцності симетрична відносно осі N .

Таблиця 1

Базові точки області міцності

Верхня границя			Нижня границя		
Точка	$M_b, \text{кН/м}$	$N_b, \text{кН}$	Точка	$M_b, \text{кН/м}$	$N_b, \text{кН}$
A	0.000	-2900.000	A	0.000	-2900.000
B	45.978	-2805.200	B1	-45.978	-2805.200
C	45.978	-2805.200	C1	-45.978	-2805.200
D	142.200	-2584.000	D1	-142.200	-2584.000
J	395.000	-1320.000	J1	-395.000	-1320.000
G	142.200	-56.000	G1	-142.200	-56.000
F	45.978	165.000	F1	-45.978	165.000
K	45.978	165.000	K1	-45.978	165.000
L	0.000	260.000	L	0.000	260.000

Результати розрахунку арок за запропонованим алгоритмом представлені у таб. 2, 3. Там же представлені результати, одержані із врахуванням тільки згинального моменту, одержані у роботі [13].

Таблиця 2

Значення граничного навантаження для двошарнірної арки, кН/м

f/l	Постійної жорсткості			Змінної жорсткості		
	З урахуванням М	З урахуванням М, N	Відмінність %	З урахуванням М	З урахуванням М, N	Відмінність %
0.05	1390.847	46.648	18.70	1383.348	46.656	18.69
0.10	347.7326	99.676	11.09	340.198	99.678	10.94
0.15	154.5364	146.727	0.52	147.253	142.151	0.35
0.20	86.92066	164.465	6.17	79.887	151.784	6.21
0.25	55.63248	154.724	9.42	48.886	135.894	9.42
0.30	38.63138	123.618	10.48	32.174	99.971	10.26
0.35	28.37138	77.001	9.23	22.213	57.059	8.79
0.40	21.72562	43.438	6.66	15.811	30.822	6.44
0.45	17.16934	28.138	4.84	11.406	18.761	4.88

Таблиця 3

Значення граничного навантаження для безшарнірної арки, $\kappa H/m$

f/l	Постійної жорсткості			Змінної жорсткості		
	З урахуванням М	З урахуванням М, N	Відмінність %	З урахуванням М	З урахуванням М, N	Відмінність %
0.05	479.118	17.502	185.90	512.931	17.535	186.78
0.10	119.304	65.843	57.75	128.426	66.944	62.94
0.15	57.486	122.385	72.16	59.545	128.157	73.11
0.20	91.912	164.068	56.38	95.783	174.751	58.38
0.25	76.355	160.883	71.26	89.509	195.192	74.24
0.30	53.024	121.709	78.62	66.663	175.543	89.91
0.35	38.957	77.334	66.00	53.463	142.221	90.72
0.40	29.826	44.094	38.60	46.165	113.199	84.13
0.45	23.566	26.917	13.28	44.715	111.460	85.47

Графічне зображення зміни граничного навантаження для арок представлено на рис. 3-6. Для похилих арок граничне навантаження, визначене без врахування поздовжньої сили, має досить велике значення. Але аналіз показує, що для двохшарнірних арок із $f/l \leq 0.15$ і для безшарнірних арок із $f/l \leq 0.1$ поздовжня сила перевищує границю міцності перерізу і руйнування перерізу відбувається за рахунок поздовжньої сили, а не моменту.

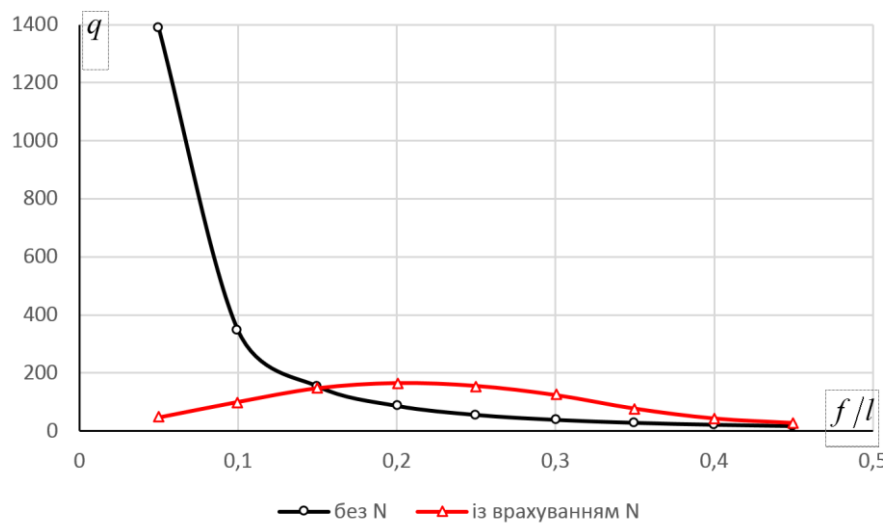


Рис. 3. Граничне навантаження для двохшарнірної арки постійної жорсткості

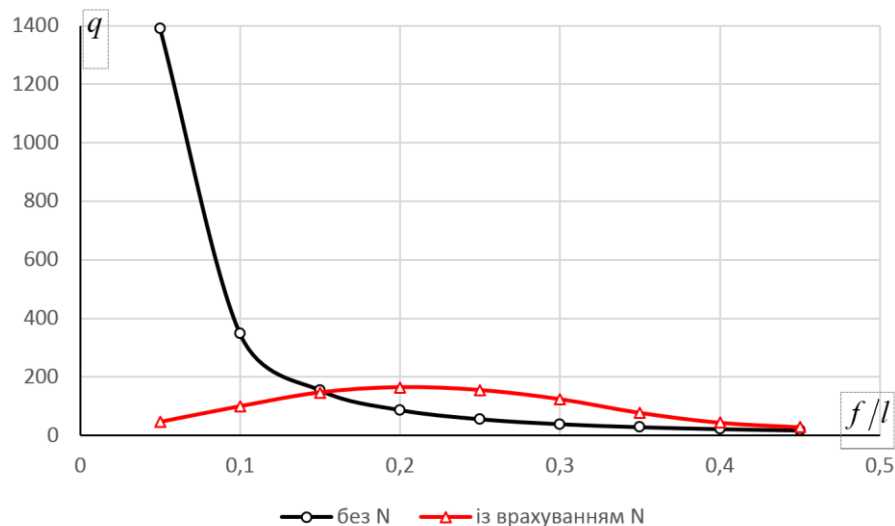


Рис. 4. Граничне навантаження для двошарнірної арки змінної жорсткості

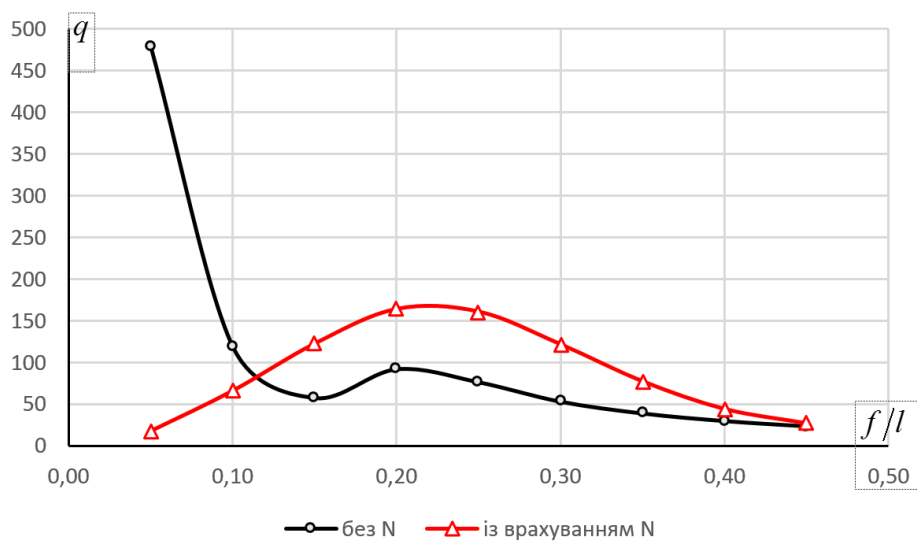


Рис. 5. Граничне навантаження для безшарнірної арки постійної жорсткості

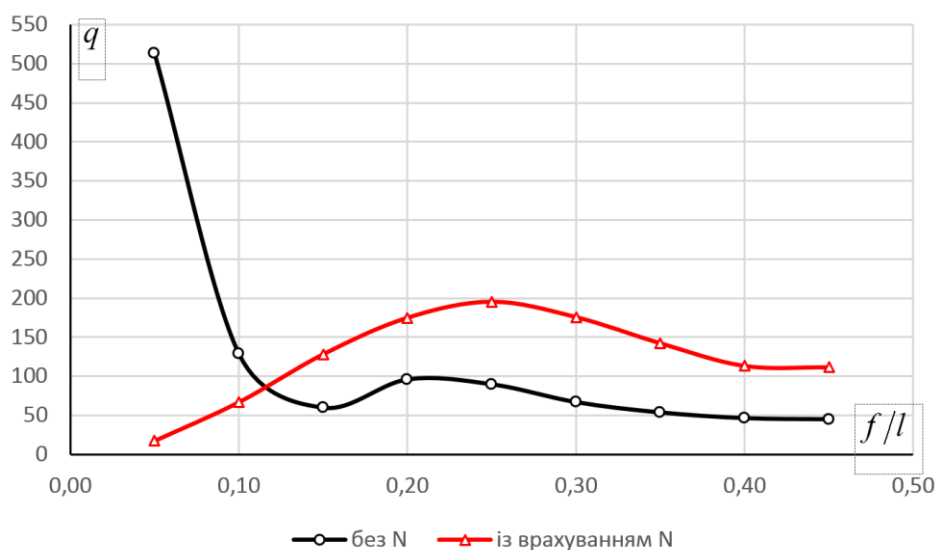


Рис. 6. Граничне навантаження для безшарнірної арки змінної жорсткості

6 ВИСНОВКИ

1. Запропонований алгоритм розрахунку систем за граничним станом з урахуванням згинального моменту і поздовжньої сили не містить ітераційних процедур і його точність визначається точністю методу скінчених елементів.

2. Значення граничного навантаження для пологих арок, одержане без врахування поздовжньої сили, не можна вважати достовірним, так як руйнування перерізів відбувається не за рахунок згинального моменту, а за рахунок поздовжньої сили.

3. Врахування згинального моменту і поздовжньої сили дає можливість використати додаткові резерви матеріалу і приводить до збільшення граничного навантаження, що підвищує несучу здатність системи.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автор не має будь-яких фінансових чи нефінансових інтересів щодо матеріалів, представлених у цій статті, які слід розкривати.

Література

1. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Москва: Стройиздат, 1949, -248с.
2. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов Москва: Гостехиздат, 1954, -287с.
3. Чирас А.А. Строительная механика, теория и алгоритмы. Москва: Стройиздат, 1989, 256с
4. Пиковский А.А. Статика стержневых систем со сжатыми элементами. М.: Физматгиз, 1961. – 394с.
5. Проценко А.М., Власов В.В. Статический принцип предельного равновесия и определение деформированного состояния статически неопределимых железобетонных конструкций в стадии исчерпания их несущей способности. //В сб. НИИЖБ, - «Воздействие статических, динамических и многократно повторяющихся нагрузок на бетон и элементы железобетонных конструкций» –М.: Стройиздат, 1972. – с. 191 – 220
6. Mykola Soroka The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam, URL:<http://www.enggjournals.com/ijet/vol10issue6.html>
7. Габбасов Р.Ф. Чан Тхань Тунг Численный метод расчета арок по предельному равновесию – М: Вестник МГСУ, 2010, № 4, том 1, с. 18-23
8. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М: «Высшая школа», 1986, -607с.
9. Russell Bridge & Andrew Wheeler 2000 *Cross-section Strength of Columns*. (Part 1: AS 3600 Design) OneSteel Reinforcing Pty Ltd CAN 004 148 289
10. Vrouwenvelder A.C.W.M. & Witteveen J. 2003 Plasticity Ct 4150. The plastic behaviour and the calculation of the plates subjected to bending. Technical University Delft Faculty of Civil Engineering and Geosciences p 121
11. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material : IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022)
12. Сорока М.М. Граничний стан двотаврового армованого перерізу з використанням пружно-пластичних діаграм деформування матеріалів – Одеса : Механіка та математичні методи, 2023, V 1, с. 72-83
URL: <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-1-72-83>
13. Сорока М. М. Механізми пластичного руйнування арок. Механіка та математичні методи, 2024. Т. VI. №. 2. С. 88–99
URL: <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-88-99>

References

1. Gvozdev A.A. Raschet nesushchey sposobnosti konstruktsey po metodu predel'nogo ravnovesiya. Moscow: Stroyizdat, (1949), - 248 p. (in Russian)
2. Rzhantsyn A.R. Raschet sooruzheniy s uchetom plasticheskikh svoystv materialov. Moscow: The state publishing house of literature on construction and architecture, (1954), 287 p.
3. Chiras A.A. Stroitel'naya mekhanika, teoriya i algoritmi. Moscow: Stroyizdat, (1989), 256 p.
4. Pikovsky A.A. Statika sterzhnevih system so szhatimiy elementamy. Moscow: State publishing house of physical and mathematical literature, (1961), 394 p. (in Russian)
5. Protsenko A.M., Vlasov V.V. Sticheskiy printsip predel'nogo ravnovesiya i opredeleniye deformirovannogo sostoyaniya staticheski neopredelimykh zhelezobetonnykh konstruktsey v stadii ischerpaniya ikh nesushchey // V sb. NII ZHB, - «Vozdeystviye staticheskikh, dinamicheskikh i mnogokratno povtoryayushchikhsya nagruzok na beton i elementy zhelezobetonnykh konstruktsey», Moscow: Stroyizdat, (1972), - p. 191-220 (in Russian)
6. Mykola Soroka The limit state of non-hinged arch with a cross-section in the form of an idealized I-beam, URL: <http://www.enggjournals.com/ijet/vol10issue6.html>
7. Gabbasov R.F. Chan Tkhan' Tung Chislenny metod rascheta arok po predel'nomu ravnovesiyu – M: Vestnik MGSU, 2010, № 4, tom 1, s. 18-2 (in Russian)
8. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. Stroitel'naya mekhanika. M: «Vysshaya shkola», 1986, -607s.. (in Russian)
9. Russell Bridge & Andrew Wheeler 2000 Cross-section Strength of Columns. (Part 1: AS 3600 Design) OneSteel Reinforcing Pty Ltd CAN 004 148 289
10. Vrouwenvelder A.C.W.M. & Witteveen J. 2003 Plasticity Ct 4150. The plastic behaviour and the calculation of the plates subjected to bending. Technical University Delft Faculty of Civil Engineering and Geosciences p 12111. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material: IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022)
11. Mykola Soroka Limit State of Arches Made of Elastoplastic Material : IX International Conference "Actual Problems of Engineering Mechanics", (APEM 2022)
12. Soroka M.M. Hranychny stan dvutavrovoho armovanoho pererizu z vykorystannyam pruzhnoplastychnykh diahram deformuvannya materialiv – Odesa : Mekhanika ta matematychni metody, 2023, V 1, s. 72-83
URL: <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-1-72-83>
13. Soroka M. M. Mekhanizmy plastychnoho ruynuvannya arok. Mekhanika ta matematychni metody, 2024. T. VI. №. 2. S. 88–99
URL: <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-88-99>

Сорока Микола Миколайович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.т.н., доцент,
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
soroka@odaba.edu.ua
ORCID: 0000-0002-9551-9475

Для посилань:

Сорока М. М. Граничне навантаження арок із врахуванням згинального моменту і повздовжньої сили. Механіка та математичні методи, 2025. Т. VII. № 1. с. 115-124.

For references:

M. Soroka. (2025). Limit load of arches taking into account bending moment and longitudinal force. Mechanics and Mathematical Methods. VII (1). 115–124.