

УДК 531.381

ЗБУРЕНІ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА З РУХОМОЮ МАСОЮ ПІД ДІЄЮ ПОСТІЙНОГО МОМЕНТУ

Лещенко Д. Д.¹, Козаченко Т. О.¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація: Проблема руху твердого тіла відносно нерухомої точки є однією з класичних задач механіки. Зацікавленість науковцями задачами динаміки твердого тіла посилилась в другій половині XX сторіччя в зв'язку з розвитком ракетно-космічної техніки. Дослідження руху супутників навколо центра мас важливо для створення систем управління орієнтацією, стабілізації руху і для розв'язування практичних задач космонавтики. В статті за допомогою метода усереднення одержується наближене розв'язання задачі про рух динамічно симетричного твердого тіла з в'язкопружним елементом під дією постійного моменту в зв'язаних осях. При визначенні фактичної орієнтації штучного супутника Землі була відмічена мала зміна модуля вектору кінетичного моменту супутника на ділянці польоту з вимкненою системою орієнтації. Ця зміна була пояснена присутністю малого моменту збурення, який є постійним в зв'язаній з супутником системі координат. У випадку малих моментів сил можна застосовувати методи збурень для визначення аналітичних або чисельних описів руху. Асимптотичний підхід дозволяє одержати деякі якісні результати і описувати еволюцію руху твердого тіла за допомогою спрощених усереднених рівнянь та чисельного розв'язку. В роботі проведена процедура усереднення та одержані усереднені рівняння, які простіше початкових, та описують рух на великому інтервалі часу. Одержані кількісні та якісні результати досліджень руху під дією постійного моменту динамічно симетричного твердого тіла з рухомою масою та був представлений опис еволюції руху тіла. Проведено чисельне інтегрування усередненої системи рівнянь руху твердого тіла. Графічні зображення розв'язків представлені та обговорені. Одержано систему рівнянь руху в стандартній формі. Досліджено еволюцію руху Ейлера-Пуансо під дією малих внутрішніх та зовнішніх моментів. Стаття може розглядатися як розвиток попередніх задач про рух твердого тіла під дією малих моментів (порожнини, яка заповнена рідиною великої в'язкості, рухомої маси, постійних моментів в зв'язаних з тілом осях). Робота вносить вклад в вивчення задач руху космічних кораблів і рухів членів екіпажів відносно цих тіл. Одержані результати важливі для управління з допомогою рухомих мас, для рухів оберткових снарядів.

Ключові слова: динамічно симетричне тверде тіло, рухома маса, пружні та дисипативні елементи, постійний момент.

PERTURBED MOTIONS OF A RIGID BODY WITH A MOVABLE MASS UNDER THE ACTION OF CONSTANT TORQUE

D. Leshchenko¹, T. Kozachenko¹

¹Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract: The problem of a rigid body motion about a fixed point is one of the classical problems of mechanics. The interest in the problem of the rigid body dynamics has increased in the second half of the XX century in connection with the development of rocket and space technologies. The study of the motion of a satellite about center of mass is important for creating systems of orientation control, stabilization of motion and for solving the practical problems of astronautics. The paper develops an approximate solution by means of an averaging method for the motion in dynamically symmetric rigid body containing a viscoelastic element and subjected to constant body-fixed torque. Reference was made to the angular momentum vector of a satellite, noted during the determination of the actual orientation of the artificial earth satellite. This change was explained as a



result of the presence of a small perturbation torque, which is constant in a fixed axes relative to the satellite. In the case of small torques, it is possible to use perturbation methods to obtain analytical and numerical descriptions of motion. The numerical integration of the averaged system of equations is conducted for the body motion. The graphical presentations of the solutions are represented and discussed. We received the system of motion equations in standard form. The asymptotic approach permits to obtain some qualitative results and to describe evolution of rigid body motion using simplified averaged equations and numerical solution. The paper can be considered as mainstreaming of previous works for the problem of rigid body motion under the action of small torques (cavity filled with a fluid of high viscosity, moving mass, constant body-fixed torques). The advantage of this work is in receiving the original asymptotic and numerical calculations, as well as solutions that describe the evolution of rigid body motion with a moving mass and subjected to constant body-fixed torque. The paper presents a contribution in the problems of spacecraft motion, and the activities of crew members about the vehicles. The importance of the results is in the moving mass control, and the motions of spinning projectiles.

Keywords: dynamically symmetric rigid body, movable mass, elastic and dissipative elements, constant torque.

1 ВСТУП

На рух супутника відносно центра мас діють моменти сил різної фізичної природи. Це, наприклад, моменти, які обумовлені рухом мас всередині тіла. Ці рухи можуть бути спричиненими: наявністю в тілі роторів, гіроскопів, а також змінами положень екіпажу.

Вивчення впливу випускання газу в системі стабілізації супутника на його рух відносно центра мас зводиться до задачі про еволюцію обертання твердого тіла під дією моменту, постійного в зв'язаних осях.

2 АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз літературних джерел показує, що вивчення руху динамічно симетричного тіла з рухомою масою є складною, але важливою задачею. Вона потребує застосування теорії диференціальних рівнянь і чисельного моделювання для дослідження поведінки системи. Рухомі маси всередині тіла впливають на динамічну поведінку системи. Огляд робіт з цієї тематики представлений в [1-4].

Космічний апарат або супутник, перебуваючи на орбіті навколо свого центра мас, знаходиться під впливом моментів сил різної фізичної природи. Сюди входять моменти, що генеруються рухом внутрішніх мас. Значна кількість робіт присвячена аналізу різноманітних проблем динаміки космічних апаратів, що містять внутрішні рухомі маси. В [4-18] вивчалися питання стійкості і нестійкості, резонансних явищ, стабілізації рухів. У роботі [11] оцінено вплив на стійкість рівномірного руху гіроскопа Лагранжа рухомих точкових мас (лінійних осциляторів), що здійснюють коливання вздовж осі симетрії гіроскопа або вздовж осей, ортогональних до осі симетрії.

У роботі [12] тверде тіло з деякими рухомими частинами розглядається як можлива модель космічного апарата з масою, що ексцентрично обертається, також вивчено динаміку положення і керування за допомогою внутрішніх обертових мас.

У роботах [8, 13, 14] досліджено задачу про оптимальну за швидкодією стабілізацію вільного твердого тіла з рухомою масою. Розглянуто задачу про сповільнення обертання в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла, що містить в'язкопружний елемент, за мінімальний час.

В [15, 16] досліджена задача квазіоптимального за швидкодією керування обертань динамічно симетричного тіла з в'язкопружним елементом в середовищі з опором. Розглянута задача квазіоптимального за швидкодією гальмування обертань динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, та з в'язкопружним елементом в середовищі з опором.

У статті [17] побудовано наближений розв'язок за допомогою методу усереднення системи рівнянь Ейлера з додатковими членами збурення для майже динамічно сферичного жорсткого тіла, що містить в'язкопружний елемент. Отриманно розв'язки, які описують еволюцію руху твердого тіла з рухомою масою на нескінченному інтервалі часу з асимптотично малою похибкою.

В [18] досліджено задачу про рух в середовищі з опором динамічно симетричного твердого тіла з рухомою масою, яка з'єднана з тілом пружною в'язкою за наявності в'язкого тертя. Результати, які представлені в цій роботі дають можливість аналізувати кутові рухи штучних супутників під дією малих збурюючих моментів.

В роботах [19-23] були знайдені аналітичні розв'язки задачі про рух симетричного твердого тіла, близького до динамічно симетричного під дією моменту, який є постійним в зв'язаних з тілом осях. В [23] досліджується рух відносно центра мас близького до динамічно сферичного твердого тіла з в'язкою рідиною під дією

постійного моменту. В [24] досліджується рух симетричного гіростата, заповненого рідиною великої в'язкості, під дією постійного моменту.

Розглянемо рух динамічно симетричного тіла з рухомою масою, яка прикріплена в'язкопружним демпфером до точки на осі симетрії (в недеформованому стані) [1], під дією постійного моменту. Наближена система рівнянь збуреного руху в проекціях на головні центральні осі інерції має вигляд [1]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= Lqr + Spr^4 + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -Lpr + Sqr^4 + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= -AC^{-1}Sr^3(p^2 + q^2) + \varepsilon M_3, \end{aligned} \quad (1)$$

де p, q, r – проекції абсолютної кутової швидкості $\bar{\omega}$ на головні центральні осі інерції, $J = \text{diag}(A, A, C)$ – тензор інерції незбуреного тіла, M_i ($i = 1, 2, 3$) – проекції постійного моменту в зв'язаних з тілом осях, $0 < \varepsilon \ll 1$ малий параметр.

Коефіцієнти L, S характеризують збурюючі моменти сил, які обумовлені наявністю в'язкопружного елемента, та виражаються через параметри системи наступним чином:

$$\begin{aligned} L &= m\rho^2 \Omega^{-2} A^{-3} C (A^2 p^2 + A^2 q^2 + C^2 r^2), \\ S &= m\rho^2 \lambda \Omega^{-4} C^3 (A - C) A^{-4}, \end{aligned} \quad (2)$$

де m – маса рухомої точки, ρ – відстань від центра мас недеформованої системи до точки кріплення, яка знаходиться, за припущенням, на осі динамічної симетрії цього тіла. Сталі $\Omega^2 = c/m$, $\lambda = \delta/m$ визначають частоту коливань і швидкість їх згасання відповідно; c – жорсткість (коефіцієнт пружності), δ – коефіцієнт в'язкості демпфера.

3 ЦІЛІ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для застосування асимптотичного метода до розв'язку системи (1) зробимо деякі припущення, щодо коефіцієнтів Ω, λ [1]

$$\Omega^2 \gg \lambda \omega \gg \omega^2. \quad (3)$$

Нерівності (3) дозволяють знехтувати ділянками вільних коливань рухів маси, які обумовлені початковими відхиленнями, внаслідок їх швидкого згасання і врахувати вимушені квазістаціонарні рухи, викликані обертанням тіла.

Згідно до умови (3) $\Omega^{-2}, \lambda \Omega^{-4}$ є малими параметрами, такими що $\Omega^{-2} \sim \varepsilon, \lambda \Omega^{-4} \sim \varepsilon$.

Якщо припустити, що $\varepsilon = 0, \Omega^{-2} = 0, \lambda \Omega^{-4} = 0$, то система (1) інтегрується.

В цьому випадку, при $r_0 \neq 0$, змінні p, q здійснюють гармонічні коливання, частота яких $|(C - A)r_0|$ залежить від r_0 . Відповідно система рівнянь (1) є нелінійною.

Розв'язок системи (1) при цих припущеннях має вигляд

$$p = a \cos \varphi, \quad q = a \sin \varphi, \quad r = r_0. \quad (4)$$

Застосуємо (4) як перетворення до змінних a, r , де $a^2 = p^2 + q^2, a > 0, \varphi = r(C - A)A^{-1}t$. Диференціюючи та роблячи ряд перетворень маємо, що $\dot{a} = \dot{p} \cos \varphi + \dot{q} \sin \varphi$. Підставимо в цей вираз $\dot{p}$ і $\dot{q}$ з перших двох рівнянь (1)

та проведемо усереднення одержаного рівняння для a за фазою φ [25]. Тоді отримане рівняння для a і r мають вигляд (крапка – похідна за часом t):

$$\begin{aligned}\dot{a} &= SA^{-1}r^4a, \\ \dot{r} &= -AC^{-2}Sr^3a^2 + \varepsilon C^{-1}M_3.\end{aligned}\quad (5)$$

Після ряду перетворень та заміни змінних $x = a^2$, $y = r^2 > 0$, $r = \sqrt{y}$ приведемо (5) до наступної системи:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2A^{-1}Sxy^2, \\ \dot{y} &= -2C^{-2}SAxy^2 + 2\varepsilon C^{-1}M_3\sqrt{y}.\end{aligned}\quad (6)$$

В цій системі x , y – повільні змінні.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

В математичному пакеті Maple, з застосуванням метода Рунге-Кутти-Фельберга п'ятого порядку точності, знайдено чисельний розв'язок системи (6) за початкових умов $x(0)=1$, $y(0)=1$ та при певних значеннях параметрів $\rho=1$; $m=1$; $\varepsilon=0.1$; $A=1.5$; $C=1$; та $M_3=-0.135$ або $M_3=-0.25$, а також значеннях λ та Ω , що зазначені в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення параметрів λ та Ω

Випадок	λ	Ω
1	98	10
2	9	3

На рис. 1-2 зображено графіки зміни величин $x = a^2$ і $y = r^2$ квадратів екваторіальної та осової компонент кутової швидкості твердого тіла при вказаних параметрах.

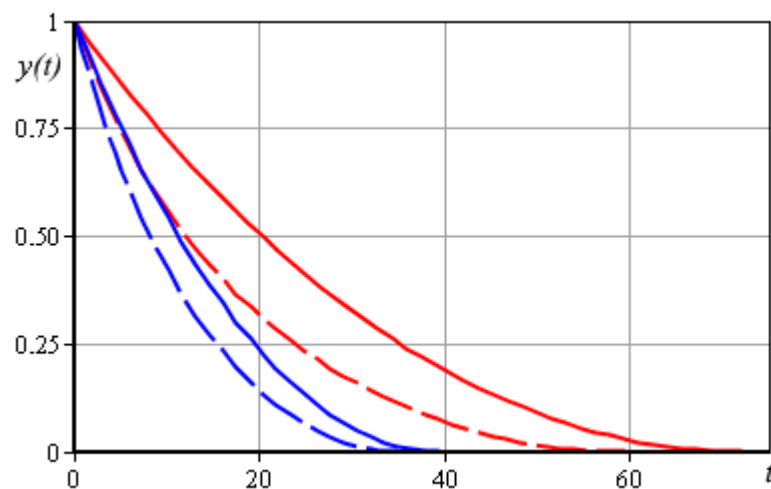


Рис. 1. Графіки змінної y в випадках 1 (—) та 2 (---) при значеннях моменту $M_3 = -0.135$ (—) та $M_3 = -0.25$ (---)

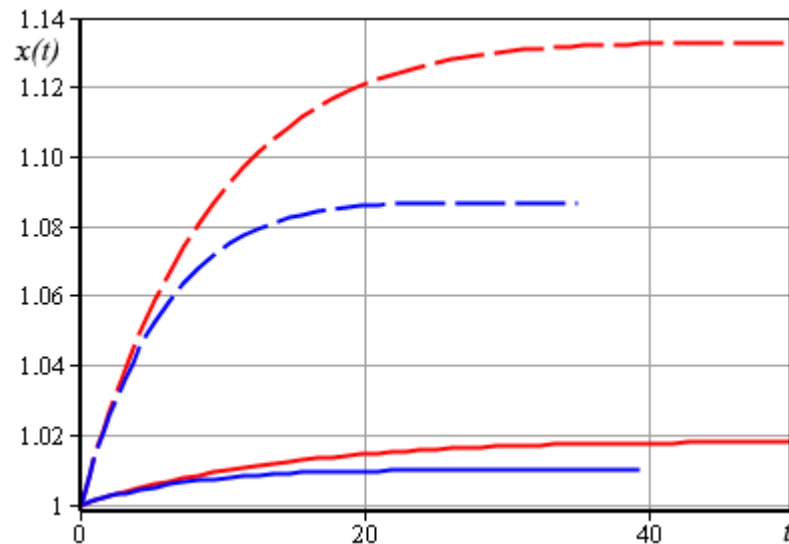


Рис. 2. Графіки змінної y в випадках 1 (—) та 2 (---) при значеннях моменту $M_3 = -0.135$ (—) та $M_3 = -0.25$ (---)

5 ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Згідно до рис. 1 осьова компонента кутової швидкості $y = r^2$ спадає асимптотично наближаючись до нуля. Характер спадання залежить від величини постійного моменту M_3 , а також від величин Ω та λ , що характеризують частоту та час затухання вільних коливань. При $M_3 = -0.135$ прагнення y до нуля відбувається повільніше ніж при $M_3 = -0.25$. При значеннях Ω та λ у першому випадку час, за який спадає $y = r^2$ збільшується в порівнянні з випадком 2. Тобто збільшення величини постійного моменту M_3 та при співвідношенні $\lambda/\Omega^2 \sim 1$ проміжок часу, за який осьова компонента кутової швидкості прагне до нуля, зменшується.

Як бачимо з рис. 2 екваторіальна складова кутової швидкості $x = a^2$ зростає. Зростання x відбувається повільно та через деякий проміжок часу зовсім відсутнє, тобто x прагне до граничних значень: $x \rightarrow 1.01; 1.02; 1.09; 1.13$. На характер змінної $x = a^2$ має вплив співвідношення величин λ/Ω^2 . При $\lambda/\Omega^2 < 1$ зростання екваторіальної складової достатньо мале.

6 ВИСНОВКИ

В роботі представлено нові якісні та кількісні результати дослідження руху динамічно симетричного твердого тіла з рухомою масою, з'єднаною з тілом пружною в'яззю під дією постійного моменту. Одержано систему рівнянь у стандартній формі. До нелінійної системи рівнянь руху застосовано метод усереднення. Отриману систему було проаналізовано та знайдено чисельний розв'язок при певних параметрах. Одержані результати дали змогу оцінити динамічні ефекти, спричинені наявністю рухомої маси та постійним моментом. Нові результати розглядаються як узагальнення результатів, отриманих в попередніх роботах авторів. Важливість отриманих результатів зумовлена їх можливим застосуванням при аналізі руху штучних супутників, космічних кораблів, при керуванні рухомими масами, в гіроскопії.

7 ЕТИЧНІ ДЕКЛАРАЦІЇ

Автори статті не має відповідних фінансових чи нефінансових інтересів, які слід розкривати.

Література

1. F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. Springer, Cham, 2017.
2. Li T., Gao C., Li C., Ting W. A survey of moving mass control theory. Aerospace Science and Technology. Chernousko 2018. 82-83. P. 594-606.
3. Ogunwa T., Abdullah F., Chahl T. Modeling and Control of an Articulated Multibody Aircraft. Applied Sciences. 2022. 12. 1162.
4. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела. Одесса: ОНУ им. И.И. Мечникова, 2013. 287с.
5. Lurie A. I. Analytical Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. 2002.
6. Month L. A., Rand R. H. Stability of a rigid body with an oscillating particle. An application of MACSYMA. Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 1985. 52. P. 686-692.
7. Christov O. On the non-integrability of a system describing the motion of a rigid body with a fixed point and particle oscillating in it. Bulletin des Sciences Mathematiques. 1994. 118. P. 385-401.
8. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Some problems of the motion of a solid with a moving mass. Mechanics of Solids. 1978. 13 (5). P. 24-28.
9. Leshchenko D. D., Sallam S. N. Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. International Applied Mechanics. 1992. 28 (8). P. 524-528.
10. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. Multibody System Dynamics. 2001. 6 (1). P. 3-16.
11. Kononov Yu. N. Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators. Journal of Mathematical Sciences. 2001. 103 (1). P. 38-42.
12. Yanzu Liu, Li-Qun Chen. Chaos in attitude dynamics of spacecraft. Springer; 2012.
13. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. Optimal braking of the rotations of a solid body with internal degrees of freedom. Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. 34 (3). P. 127-135.
14. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. Optimal rotation deceleration of a dynamically symmetric body with movable mass in a resistant medium. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2011. 50 (2). P. 198-204.
15. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Shchetinina Yu. S. Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2017. 56 (2). P. 186-191.
16. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrost with moving mass in a resistive medium. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2019. № 58 (5). P. 667-673.
17. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Evolution of rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a moving mass. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 2024, June 2024, 133, 107916. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.107916>
18. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою в середовищі з опором. Механіка та математичні методи, 2023. Т. 5. № 2. С. 16-24. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-2-16-24>
19. Romano M. Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2008. 100. P. 181-189.
20. Van der Ha J.C. Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. Acta Astronautica. 1985. 12(10). P. 861-869.
21. Kane T.R., Levinson D.A. Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body. Journal of the Astronautical Sciences. 1987. 35(4). P. 435-446.

22. Ayobi M. A., Longuski J. M. Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2008. 75(1). 011004/1-011004/8.
23. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques, *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2023. V. 148. 104284
24. Лещенко Д. Д., Козаченко Т. О. Еволюція руху динамічно симетричного гіростата під дією постійного моменту. *Механіка та математичні методи*, 2023. Т. V. № 1. С. 25–32
25. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. К.: Наукова Думка, 1971. 440с.

References

1. Chernousko F. L., Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*. Springer, Cham.
2. Li T., Gao C., Li C., Ting W. (2018). A survey of moving mass control theory. *Aerospace Science and Technology*. 82-83. 594-606.
3. Ogunwa T., Abdullah F., Chahl T. (2022). Modeling and Control of an Articulated Multibody Aircraft. *Applied Sciences*. 12. 1162.
4. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L., Zinkevich Ya. S. (2013). *Vozmuschennyye i upravlyayemye vrascheniya tverdogo tela* [Perturbed and controlled rotations of a rigid body]. Odessa: OHU im. I.I. Mechnikova. [in Ukrainian].
5. Lurie A. I. (2002). *Analytical Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
6. Month L. A., Rand R. H. (1985). Stability of a rigid body with an oscillating particle. An application of MACSYMA. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 52. 686–692.
7. Christov O. (1994). On the non-integrability of a system describing the motion of a rigid body with a fixed point and particle oscillating in it. *Bulletin des Sciences Mathematiques*. 118. 385–401.
8. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (1978). Some problems of the motion of a solid with a moving mass. *Mechanics of Solids*. 13 (5). 24–28.
9. Leshchenko D. D., Sallam S. N. (1992). Some problems on the motion of a rigid body with internal degrees of freedom. *International Applied Mechanics*. 28 (8). 524–528.
10. Akulenko L., Leshchenko D., Kushpil T., Timoshenko I. (2001). Problems of evolution of rotations of a rigid body under the action of perturbing moments. *Multibody System Dynamics*. 6 (1). 3–16.
11. Kononov Yu. N. (2001). Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators. *Journal of Mathematical Sciences*. 103 (1). 38–42.
12. Yanzu Liu, Li-Qun Chen. (2012). *Chaos in attitude dynamics of spacecraft*. Springer.
13. Akulenko L. D., Leshchenko D. D. (1996). Optimal braking of the rotations of a solid body with internal degrees of freedom. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 34 (3). 127–135.
14. Akulenko L. D., Zinkevich Ya. S., Leshchenko D. D., Rachinskaya A. L. (2011). Optimal rotation deceleration of a dynamically symmetric body with movable mass in a resistant medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 50 (2). 198–204.
15. Akulenko L. D., Leshchenko D. D., Shchetinina Yu. S. (2017). Quasi-optimal deceleration of rotations of a rigid body with a moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 56 (2). 186–191.
16. Akulenko L. D., Kozachenko T. A., Leshchenko D. D. (2019). Time quasi-optimal deceleration of rotations of a gyrost with moving mass in a resistive medium. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 58 (5). 667–673.
17. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. (2024). Evolution of rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with a moving mass. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 133, 107916.
18. Leshchenko D., Kozachenko T. (2023). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass in a resistive medium. *Mechanics and Mathematical methods*. 5 (2). 16–24. [in Ukrainian].
19. Romano, M. (2008). Exact analytic solution for a rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 100. 181–189.

20. Van der Ha, J.C. (1985). Perturbation solution of attitude motion under body-fixed torques. *Acta Astronautica*. 12(10). 861–869.
21. Kane, T.R., Levinson, D.A. (1987). Approximate description of attitude motion of a torque-free, nearly axisymmetric rigid body. *Journal of the Astronautical Sciences*. 35 (4). 435–446.
22. Ayobi, M.A., Longuski, J.M. (2008). Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*. 75(1). 011004/1-011004/8.
23. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. (2023). Perturbed rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid subject to constant body fixed torques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 148. 104284.
24. Leshchenko D., Kozachenko T. (2023). Evolution of dynamically symmetric gyrost motion under the action of constant torque. *Mechanics and Mathematical Methods*. 5 (1). 25–32. [in Ukrainian].
25. Mitropolskiy Yu. A. (1971). *Metod usredneniya v nelineynoy mehanike* [Averaging method in nonlinear mechanics]. Kyiv, Naukova Dumka. [in Ukrainian].

Лешенко Дмитро Давидович

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
д.ф.-м.н., професор
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
leshchenko_d@ukr.net,
ORCID: 0000-0003-2436-221X

Козаченко Тетяна Олександрівна

Одеська державна академія будівництва та архітектури,
к.ф.-м.н., доцент
вул. Дідріхсона, 4, Одеса, Україна, 65029
kushpil.t.a@gmail.com
ORCID: 0000-0001-9034-3776

Для посилань:

Лешенко Д. Д., Козаченко Т. О. Збурені рухи твердого тіла з рухомою масою під дією постійного моменту. *Механіка та математичні методи*, 2025. Т. 7. № 1. С. 6–14.

For references:

D. Leshchenko, T. Kozachenko. (2024). Perturbed motions of a rigid body with a movable mass under the action of constant torque. *Mechanics and Mathematical Methods*. 7 (1). 6–14.