УДК 539.371

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Кобринец В.М. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

Отримане вирішення позацентрово стиснутого стержня з нелінійно деформованого матеріалу при малому та великому ексцентриситеті за недеформованою схемою.

Определение напряженно-деформированного состояния при продольном изгибе разделяем на две задачи. Напряденное состояние определяется относительно нейтральной оси, деформированное состояние- относительно оси стержня.

Применение классической схемы сопротивления материалов на продольный изгиб с переносом продольной внецентренно сжимающей силы в центр тяжести сечения и приложения там же сосредоточенного момента предлагает получение решения с использованием принципа наложения, что в физически нелинейной постановке не правомерно [1]. Поэтому нужна новая схема и новое решение. Продольную силу нужно учитывать в том месте, где она прикладывается и переносить её куда-нибудь не допустимо.

Аппроксимация опытной диаграммы

$$\sigma = \mathrm{B}\sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma^2}{\mathrm{B}^2} \tag{1}$$

Продольный изгиб рассматривается в двух случаях: при малом и большом эксцентриситете. Случай малого эксцентриситета, когда расстояние e_0 приложения продольной силы до оси стержня изменяется в пределах

.
$$0 \le e_0 \le e_0^{\text{гр}} \tag{2}$$

Здесь $e_0^{\text{гр}}$- это граничное значение эксцентриситета, при котором нейтральная ось, проходит по грани сечения, а сила прикладывается в центре тяжести эпюры напряжений. Для малого эксцентриситета характерно то, что эпюра напряжений по всему сечению однозначна и нейтральная ось расположена за пределами сечения.

$$0{,}5h \le C_{\text{н.о.}} \le C \to \infty \tag{3}$$

Когда $e_0^{\text{гр}} = 0, C_{\text{н.о.}} \to \infty$, это признак центрального сжатия. Построим эпюру напряжений для σпо (1) при $e_0^{\text{гр}}$, рис.1.

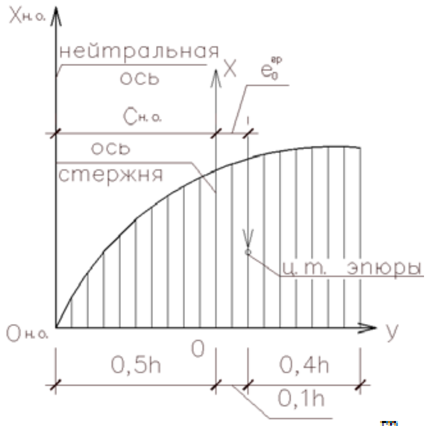

Рис.1. Эпюра напряжений при $e_0^{\text{гр}} = 0{,}1h$

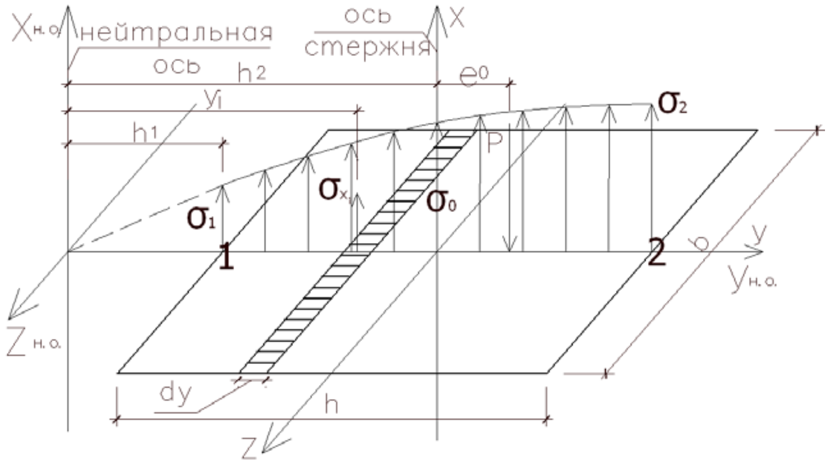

Рис.2. напряженное состояние при малом эксцентриситете

Составим первое уравнение равновесия $\Sigma x = 0$ согласно рис.2. Для примера, сечение стержня возьмем прямоугольное.

$$\mathrm{P} = b\int_{h_1}^{h_2} \sigma_x dy \tag{4}$$

Пределы интегрирования:

$$\mathrm{h_1} = \mathrm{C_{н.о.}} - 0{,}5\mathrm{h};\ \mathrm{h_2} = \mathrm{C_{н.о.}} + 0{,}5\mathrm{h} \tag{5}$$

Через $\mathrm{C_{н.о.}}$ обозначено расстояние между осью стержня и нейтральной. Подставим в (4) напряжения, выраженные через *y* и кривизну ρ.

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{y}}{\rho} \quad \sigma = \mathrm{B}\sqrt{\frac{\mathrm{y}}{\rho}} \tag{6}$$

тогда

$$\mathrm{P} = b\int_{h_1}^{h_2} \mathrm{B}\sqrt{\frac{\mathrm{y}}{\rho}}\, dy = b\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{\mathrm{h_2}^{1,5} - \mathrm{h_1}^{1,5}}{1{,}5} \tag{7}$$

Подстановкой

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{\sigma}{\mathrm{B}\sqrt{y}} \tag{8}$$

где *y* - это расстояние от нейтральной оси до любого волокна, где определяется напряжение, в (7) получим:

$$\sigma_x(\mathrm{y}) = \frac{1{,}5\mathrm{P}\cdot\sqrt{y}}{b[(\mathrm{C_{н.о.}}+0{,}5\mathrm{h})^{1,5} - (\mathrm{C_{н.о.}}-0{,}5\mathrm{h})^{1,5}]} \tag{9}$$

При y=$\mathrm{C_{н.о.}}$ получим напряжения в центре тяжести сечения:

$$\sigma_0 = \frac{1{,}5\mathrm{P}\cdot\sqrt{\mathrm{C_{н.о.}}}}{b[(\mathrm{C_{н.о.}}+0{,}5\mathrm{h})^{1,5} - (\mathrm{C_{н.о.}}-0{,}5\mathrm{h})^{1,5}]} \tag{10}$$

Составим второе уравнение равновесия, беря сумму моментов относительно оси $z_{\mathrm{н.о.}}$, $\Sigma\mathrm{M_{н.о.}} = 0$

$$\mathrm{P}(\mathrm{e_0} + \mathrm{C_{н.о.}}) = b\int_{h_1}^{h_2} \mathrm{B}\cdot\mathrm{y}\sqrt{\frac{\mathrm{y}}{\rho}}dy \tag{11}$$

После интегрирования и подстановки $\frac{1}{\rho}$ из (8) получим:

$$\sigma_x(\mathrm{y}) = \frac{2{,}5\mathrm{P}\cdot(\mathrm{e_0}+\mathrm{C_{н.о.}})\sqrt{y}}{b[(\mathrm{C_{н.о.}}+0{,}5\mathrm{h})^{2,5} - (\mathrm{C_{н.о.}}-0{,}5\mathrm{h})^{2,5}]} \tag{12}$$

Формулу (12) можно представить в таком виде:

$$\sigma_x(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{M}\sqrt{y_i}}{\mathrm{I}_{z_{\mathrm{н.о.}}}} \tag{13}$$

Момент инерции относительно нейтральной с учетом физической нелинейности:

$$\mathrm{I}_{z_{\mathrm{н.о.}}} = \frac{b\left[(\mathrm{C_{н.о.}}+0{,}5\mathrm{h})^{2,5} - (\mathrm{C_{н.о.}}-0{,}5\mathrm{h})^{2,5}\right]}{2{,}5} \tag{14}$$

Для определения напряжений получили две формулы (9) и (12), это может показаться странным, но пока остается неизвестным расстояние между осями $\mathrm{C_{н.о.}}$. Для этого прировняем σ_0 из (10) и (12), если туда подставить y=$\mathrm{C_{н.о.}}$,тогда получим выражение для определения $\mathrm{C_{н.о.}}$ через $\mathrm{e_0}$.

$$e_0 = 0{,}5\frac{(C_{н.о.}+0{,}5h)^{2,5}-(C_{н.о.}-0{,}5h)^{2,5}}{(C_{н.о.}+0{,}5h)^{1,5}-(C_{н.о.}-0{,}5h)^{1,5}} - C_{н.о.} \qquad (15)$$

Величина эксцентриситета приложения силы известно, но определить $C_{н.о.}$ из (15) будет не просто. Будем задавать $C_{н.о.}$ и определять e_0 из (15). Можно с достаточной точностью найти $C_{н.о.}$, соответствующее заданному e_0. Составляем таблицу 1 значений малого эксцентриситета e_0 при определенном значении $C_{н.о.}$,которая ускорит поиск $C_{н.о.}$.

Таблица 1. Значение малого эксцентриситета для разных $C_{н.о.}$.

$C_{н.о.}$	0,5h	h	1,5h	2,5h	3h	4h	5h
e_0	0,1h	0,043h	0,282h	0,0167h	0,0139h	0,0104h	0,0083h

Вычисление напряжений упростим, если учесть, что радиус кривизны для всех волокон поперечного сечения одинаков. Вычислим напряжения σ_i через σ_0:

$$\sigma_i = \sigma_0\sqrt{\frac{y_i}{\sigma_0}} \qquad (16)$$

Так, например, при $e_0 = 0{,}1h, C_{н.о.} = 0{,}5h$, $\sigma_0 = 1{,}0606\frac{P}{bh}$. При этом напряжения σ_2, для которых $y_2 = h$:

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{h}{0{,}5h}} = 1{,}5\frac{P}{bh} \qquad (17)$$

Алгоритм вычислений следующий:

1. Для заданного e_0 определяем интервал нахождения $C_{н.о.}$.
2. Уточняем значение $C_{н.о.}$по формуле (12).
3. Вычисляем σ_0по формуле (10).
4. Определяем напряжения во всех интересующих нас волокнах поперечного сечения по формуле (16).

Случай большого эксцентриситета

$$e_0^{гр} \le e_0 < e \to \infty$$

Нейтральная ось располагается в пределах в пределах сечения, а эпюра напряжений будет разнозначной. Если $e_0 \to \infty$, тогда $C_{н.о.}$=0, а нейтральная ось совпадает с осью стержня. Это признак поперечного изгиба. Как для предыдущего случая составим два уравнения равновесия согласно рис. 3.

Пределы интегрирования:

$$h_2 = 0{,}5h + C_{н.о.};\ h_1 = 0{,}5h - C_{н.о.}$$

Первое уравнение $\Sigma x = 0$:

$$P = b\int_0^{h_2}\sigma dy - \int_0^{h_1}\sigma dy$$

Откуда получим:

$$\sigma = \frac{1{,}5P\cdot\sqrt{y}}{b[(0{,}5h+C_{н.о.})^{1,5}-(0{,}5h-C_{н.о.})^{1,5}]} \qquad (17)$$

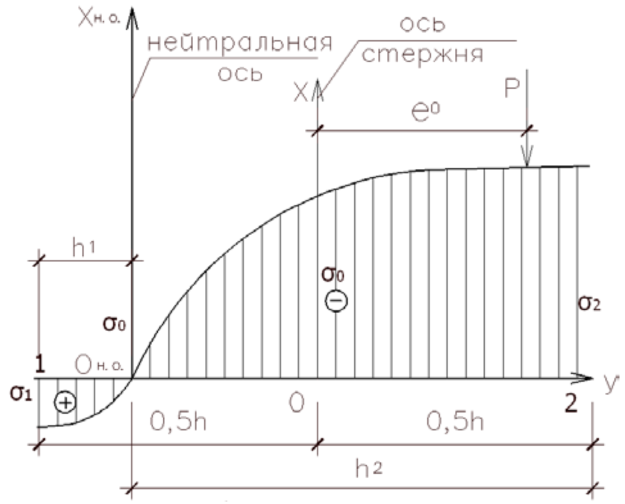

Рис.3. Эпюра напряжений при большем эксцентриситете

Второе уравнение:

$$P(C_{н.о.} + e_0) = b\int_0^{h_2} \sigma y dy + b\int_0^{h_1} \sigma y dy$$

Откуда получим:

$$\sigma = \frac{2{,}5P\cdot(e_0+C_{н.о.})\sqrt{y}}{b[(0{,}5h+C_{н.о.})^{2{,}5}-(0{,}5h-C_{н.о.})^{2{,}5}]} \quad (18)$$

Сопоставляя (17) и (18) при $C_{н.о.} = 0{,}5h$ получим условие определения $C_{н.о.}$ через e_0:

$$e_0 = 0{,}6\frac{(0{,}5h+C_{н.о.})^{2{,}5}-(0{,}5h-C_{н.о.})^{2{,}5}}{(0{,}5h+C_{н.о.})^{1{,}5}-(0{,}5h-C_{н.о.})^{1{,}5}} - C_{н.о.} \quad (19)$$

Напряжения в любом волокне определяем через σ_0

$$\sigma_i = \pm\,\sigma_0\sqrt{\frac{y_i}{y_c}} \quad (20)$$

Знак «+» для напряжений растянутой зоны, знак «-» для сжатой.

Составим таблицу 2 значений большого эксцентриситета при определенном значении $C_{н.о.}$

Таблица 2. Значение большого эксцентриситета для разных $C_{н.о.}$.

$C_{н.о.}$	0,5h	0,4h	0,3h	0,2h	0,1h	0,05h	0,01h	0,001h
e_0	0,1h	0,163h	0,266h	0,454h	0,977h	1,988h	10h	100h

Для большого и малого эксцентриситета построим график σ_0, рис. 4.

Когда известны напряжения σ_0, тогда можно найти напряжения в любой точке сечения.

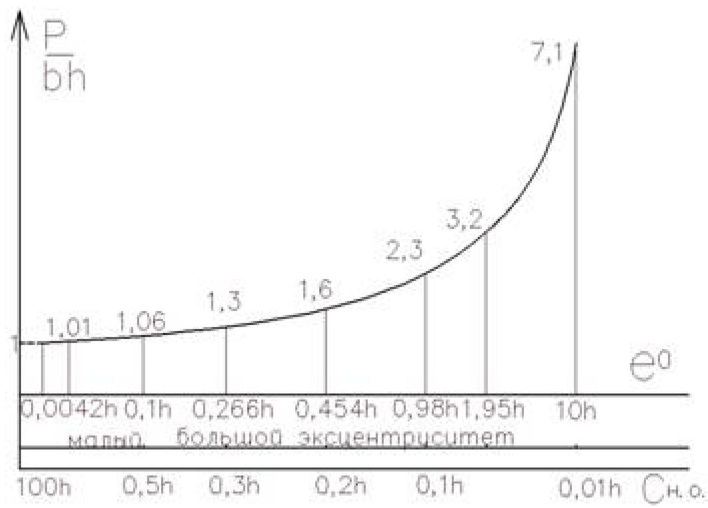

Рис.4. Изменение напряжений в центре тяжести сечения

Выводы

1. Разработана методика расчета внецентренно сжатых стержней в физически нелинейной постановке.

2. Напряжения в центральном волокне при малом эксцентриситете в физически не линейной и линейной постановке практически совпадают. При большом эксцентриситете в физически нелинейном варианте больше аналогичных напряжений линейного варианта и с ростом эксцентриситета расхождение между и увеличивается очень резко.

Следует напомнить, что при любом эксцентриситете всегда остаются постоянными.

3. Максимальные напряжения при любом эксцентриситете в физически нелинейной постановке на 25% - 20% меньше максимальных напряжений линейного варианта.

4. Работа физически нелинейного материала при продольном изгибе значительно лучше работы линейно упругого материала, как по наполнению эпюры напряжений, так и по градиенту напряжений по сечению.

1. Кобринец В.М. Сопротивление внецентренно сжатых элементов с учетов с учетом физической нелинейности. //вісник ОДАБА.- Одеса: Зовнішреклам сервіс, 2007. вип.2.6.- с. 180-183. 2. П.М. Варвак. Новые методы решения задач сопротивления материалов.- К: Виша школа.1977.- 159 с.