

ПЛОСКИЙ ИЗГИБ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ЗАГРУЖЕНИИ(2)

Фомин В.М. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

У статті [1] був запропонований метод визначення прогинів залізобетонної консольної балки при циклічному завантаженні з врахуванням різної нелінійної поведінки бетону у стиснутих та розтягнутих зонах, а також з врахуванням різної його поведінки при збільшенні навантаження (при навантаженні) та при зменшенні навантаження (при розвантаженні). Ця робота є продовженням статті [1], тому прийняті ті самі позначення. Наводиться подальша деталізація методу й розглядається конкретний приклад.

Как уже отмечалось в [1], зона I является сжатой зоной (см. рис.3 статьи [1]), в которой наблюдается увеличение сжимающих напряжений $\sigma_{(j)11}^{[0]}$ на первом этапе изгиба консоли, т.е. здесь происходит нагружение. Будем полагать, что зависимости между $\bar{\sigma}_{\Delta}$ и $\bar{\epsilon}_{\Delta}$, а также между $\bar{\tau}_{\Delta}$ и $\bar{\nu}_{\Delta}$ в точках зоны совпадают с зависимостями между этими величинами в процессе увеличения нагрузки при одноосном сжатии. Поэтому для построения этих зависимостей можно воспользоваться результатами работы [2]. В классификации, предложенной в этой работе, подобный процесс относится к этапам первого типа. В соответствии с формулой (14) этой статьи зависимость $\bar{\epsilon}_{\Delta}$ от $\sigma_{11\Delta}$ представляется в следующем виде:

$$\zeta_{(j,z)\Delta}(\eta_{(j,z)\Delta}) = A_{(j,z)}(k_{(j,z)}\eta_{(j,z)}^* + \eta_{(j,z)\Delta})f_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta}) - k_{(j,z)}\zeta_{(j,z)}^* \quad (1)$$

Здесь j – номер этапа изгиба, z – номер зоны, $\zeta_{(j,z)} = \bar{\epsilon} / \bar{\epsilon}_m$, $\eta_{(j,z)} = \sigma_{11} / \bar{\sigma}_m$, $\zeta_{(j,z)\Delta} = \bar{\epsilon}_{\Delta} / \bar{\epsilon}_m = \zeta_{(j,z)} - \zeta_{(j,z)}^*$, $\eta_{(j,z)\Delta} = \bar{\sigma}_{11\Delta} / \bar{\sigma}_m = \eta_{(j,z)} - \eta_{(j,z)}^*$, $\eta_{(j,z)}^*$ и $\zeta_{(j,z)}^*$ – значения $\eta_{(j,z)}$ и $\zeta_{(j,z)}$ в начале этапа, $k_{(j,z)} = 0$ или 1 в зависимости от типа этапа, $f_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta}) = [1 - 2\nu_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta})] / [(1 - 2\nu_0)V_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta})]$, $\nu_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta}) = \nu_m(\eta_{(j,z)}^* + \eta_{(j,z)\Delta})$, $\nu_m(\eta) = \nu_m + (\nu_0 + \bar{\epsilon}_m)(1 - \eta^2)^{1/2}$, $V_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta}) = V_m(\eta_{(j,z)}^* + \eta_{(j,z)\Delta})$, $V_m(\eta) = \bar{\epsilon}_m + (\nu_0 - \bar{\epsilon}_m)(1 - \omega_{1,z}\eta - \omega_{2,z}\eta^2)^{1/2}$ ($m=b$ для сжатой зоны и $m=bt$ для растянутой; по поводу обозначений см. [2]). Величина $A_{(j,z)}$ определяется по формуле

$$A_{(j,z)} = \bar{\epsilon}_m(1 - 2\nu_0) / 3E^{[0]}\bar{\epsilon}_m \quad (2)$$

Зона I на этапе 1 изгиба является зоной сжатия, в которой сжимающие напряжения увеличиваются, т.е. здесь наблюдается процесс нагружения. Для этапа 1 в зоне I равенство (1) выглядит так

$$\zeta_{(1,z)\Delta}(\eta_{(1,z)\Delta}) = A_{(1,z)}(\eta_{(1,z)}^* + \eta_{(1,z)\Delta})f_{(1,z)}(\eta_{(1,z)\Delta}) - \zeta_{(1,z)}^* \quad (3)$$

так как $k_{(1,z)} = 1$. Кроме того, здесь $m = b$.

Из формул (21) и (25)[2] имеем

$$\begin{aligned} \chi_{(j,z)0} &= 1 / f_{(j,z)}(0) - 1, \quad \chi_{(j,z)1} = [(F_{(j,z)1} - \chi_{(j,z)0})\zeta_{(j,z)2}^2 - \\ &- (F_{(j,z)2} - \chi_{(j,z)0})\zeta_{(j,z)1}^2] / \Delta_{(j,z)}, \quad \chi_{(j,z)2} = [(F_{(j,z)2} - \chi_{(j,z)0})\zeta_{(j,z)1} - \\ &- (F_{(j,z)1} - \chi_{(j,z)0})\zeta_{(j,z)2}] / \Delta_{(j,z)}, \quad \Delta_{(j,z)} = \zeta_{(j,z)1}\zeta_{(j,z)2}(\zeta_{(j,z)2} - \zeta_{(j,z)1}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $F_{(j,x)k} = 1/f_{(j,x)}(\eta_{(j,x)\Delta k}) - 1$ ($k=1,2$), $\eta_{(j,x)\Delta k}$ - значения $\eta_{(j,x)\Delta}$ из отрезка $[0, \eta_{(j,x)}^{**} - \eta_{(j,x)}^*]$, $\eta_{(j,x)}^{**}$ - значение $\eta_{(j,x)}^k$ в конце этапа), а являются коэффициентами следующего разложения [2]:

$$K_{(j,x)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(j,x)\Delta}) = K^{[0]}[\bar{\delta}_{(j,x)} + (1 + \bar{\delta}_{(j,x)}) \sum_{k=0}^2 \chi_{(j,x)k}(\bar{\varepsilon}_{(j,x)\Delta} / \bar{\varepsilon}_m)^k], \quad (5)$$

причем $K_{(j,x)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(j,x)\Delta})$ входит в соотношение $\bar{\sigma}_{(j,x)\Delta} = 3[K^{[0]} + K_{(j,x)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(j,x)\Delta})]\bar{\varepsilon}_{(j,x)\Delta}$.

В работе [1] разложение (6) представлено так:

$$K_{(j,x)}^{[1]}(\zeta, x_2) = K^{[0]} \sum_{k=0}^2 \bar{\chi}_{(j,x)k}[\beta_{(j,x)}(x_2 - D)\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{(j,x)0}(\zeta, x_2) &= \bar{\delta}_{(j,x)} + (1 + \bar{\delta}_{(j,x)})\chi_{(j,x)0}(\zeta, x_2), \quad \bar{\chi}_{(j,x)1}(\zeta, x_2) = -K_4^{[0]} \times \\ &\times (1 + \bar{\delta}_{(j,x)})\chi_{(j,x)1}(\zeta, x_2) / (3I\bar{\varepsilon}_m), \quad \bar{\chi}_{(j,x)2}(\zeta, x_2) = (K_4^{[0]})^2 (1 + \bar{\delta}_{(j,x)}) \times \\ &\times \chi_{(j,x)2}(\zeta, x_2) / (3I\bar{\varepsilon}_m)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

$\bar{\delta}_{(j,x)} = 0$ или 1 в зависимости от типа этапа.

В начале первого этапа изгиба вся консоль находится в состоянии продольного одноосного сжатия, поэтому уровень напряжений $\eta_{(1,1)}^*$ равен

$$\eta_{(1,1)}^* = \sigma_{(1,1)}^{[0]} / \bar{\varepsilon}_\phi = E_1^{[0]} \alpha^* H / (I^2 H_i \bar{\varepsilon}_\phi) \quad (8)$$

(по поводу обозначений см. [1]). С учетом (7) средняя относительная деформация в начале этапа может быть определена из формулы (10)[2]

$$\varepsilon_{(1,1)}^* = \eta_{(1,1)}^* \bar{\varepsilon}_\phi [1 - 2\nu_\phi(\eta_{(1,1)}^*)] / [3E^{[0]} V_\phi(\eta_{(1,1)}^*)],$$

после чего можно найти $\zeta_{(1,1)}^*$: $\zeta_{(1,1)}^* = \bar{\varepsilon}_{(1,1)}^* / \bar{\varepsilon}_\phi$. Далее в соответствии с формулой (18)[2] находим корень $\eta_{(1,1)}^*$ уравнения

$$\frac{d\zeta_{(1,1)\Delta}(\eta_{(1,1)} - \eta_{(1,1)}^*)}{d\eta_{(1,1)}} = 0 \quad (9)$$

Конец первого этапа определяется значением β^{**} параметра β . При этом значении параметра в разных точках зоны I напряжение σ_{11} , а, следовательно, и параметр $\eta_{(1,1)}$ принимают разные значения. Примем, что $\eta_{(1,1)}^{**} = \max \eta_{(1,1)}$ в зоне I при этом значении параметра β и что $\eta_{(1,1)}^{**} < \eta_{(1,1)}$. Кроме того, положим, что $\eta_{(1,1)\Delta 1} = \eta_{(1,1)}^{**} - \eta_{(1,1)}^*$, $\eta_{(1,1)\Delta 2} = \eta_{(1,1)\Delta 1} / 2$, и найдем значения $\zeta_{(1,1)\Delta}$ при $\eta_{(1,1)\Delta} = \eta_{(1,1)\Delta 1}$ и $\eta_{(1,1)\Delta} = \eta_{(1,1)\Delta 2}$:

$\zeta_{(1,1)\Delta 1} = \zeta_{(1,1)\Delta}(\eta_{(1,1)\Delta 1})$, $\zeta_{(1,1)\Delta 2} = \zeta_{(1,1)\Delta}(\eta_{(1,1)\Delta 2})$. Заметим, что $\eta_{(1,1)}^*$ и $\eta_{(1,1)}^{**}$ не зависят от координат точек зоны I, а следовательно, не зависят от них и $F_{(1,1)k}$, $\chi_{(1,1)k}$ и $\psi_{(1,1)k}$ ($k=0,1,2$).

При $j=1$ и $z=I$ имеем $\bar{\delta}_{(j,x)} = 0$ и (4) и (7) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi_{(1,1)0} &= 1/f_{(1,1)}(0) - 1, \quad \chi_{(1,1)1} = [(F_{(1,1)1} - \chi_{(1,1)0})\zeta_{(1,1)2} - (F_{(1,1)2} - \chi_{(1,1)0}) \times \\ &\times \zeta_{(1,1)1}] / \Delta_{(1,1)}, \quad \chi_{(1,1)2} = [(F_{(1,1)2} - \chi_{(1,1)0})\zeta_{(1,1)1} - (F_{(1,1)1} - \chi_{(1,1)0})\zeta_{(1,1)2}] / \\ &/ \Delta_{(1,1)}, \quad \Delta_{(1,1)} = \zeta_{(1,1)}\zeta_{(1,1)2}(\zeta_{(1,1)2} - \zeta_{(1,1)1}), \quad \bar{\chi}_{(1,1)0} = \chi_{(1,1)0}, \quad \bar{\chi}_{(1,1)1} = \\ &= -K_4^{[0]} \chi_{(1,1)1} / (3I\bar{\varepsilon}_\phi), \quad \bar{\chi}_{(1,1)2} = (K_4^{[0]})^2 \chi_{(1,1)2} / (3I\bar{\varepsilon}_\phi)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

Зависимость $\bar{\chi}_{\Delta}$ от $\bar{\varepsilon}_{\Delta}$ может быть записана так [2]:

$$\bar{\chi}_{(j,x)\Delta}(\eta_{(j,x)\Delta}) = E_{(j,x)}(k_{(j,x)}\eta_{(j,x)}^* + \eta_{(j,x)\Delta})\bar{\varepsilon}_{(j,x)}(\eta_{(j,x)\Delta}) - k_{(j,x)}\eta_{(j,x)}^*, \quad (11)$$

где $\rho_{(j,z)} = \bar{\gamma} / |\bar{\epsilon}_m|$, $\rho_{(j,z)\Delta} = \bar{\gamma}_\Delta / \bar{\epsilon}_m = \rho_{(j,z)} - \rho_{(j,z)}^*$, $\rho_{(j,z)}^*$ — значение $\rho(j,z)$

в начале этапа, $\xi_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta}) = [1 + \nu_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta})] / (1 + \nu_0) V_{(j,z)}(\eta_{(j,z)\Delta})$,

$E_{(j,z)} = 2\sqrt{2} \bar{\epsilon}_m (1 + \nu_0) / 3E^{(0)} \bar{\epsilon}_m$. В [2] показано, что

$$\begin{aligned} \psi_{(j,z)0} &= 1 / \xi_{(j,z)}^{(0)} - 1, \quad \psi_{(j,z)1} = [(G_{(j,z)1} - \psi_{(j,z)0}) \rho_{(j,z)2}^2 - \\ &- (G_{(j,z)2} - \psi_{(j,z)0}) \rho_{(j,z)1}^2] / \Delta'_{(j,z)}, \quad \psi_{(j,z)2} = [(G_{(j,z)2} - \psi_{(j,z)0}) \rho_{(j,z)1} - \\ &- (G_{(j,z)1} - \psi_{(j,z)0}) \rho_{(j,z)2}] / \Delta'_{(j,z)}, \quad \Delta'_{(j,z)} = \rho_{(j,z)1} \rho_{(j,z)2} (\rho_{(j,z)2} - \rho_{(j,z)1}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $G_{(j,z)k} = 1 / \xi_{(j,z)}(\eta_{(j,z)k}) - 1$ ($k=1,2$), а $\psi_{(j,z)k}$ ($k=0,1,2$) являются коэффициентами следующего разложения [2]:

$$G_{(j,z)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j,z)\Delta}) = G^{[0]}[\bar{\delta}_{(j,z)} + (1 + \bar{\delta}_{(j,z)}) \sum_{k=0}^2 \psi_{(j,z)k} (\frac{\bar{\gamma}_{(j,z)\Delta}}{|\bar{\epsilon}_m|})^k], \quad (13)$$

причем $G_{(j,z)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j,z)\Delta})$ входит в соотношение

$$\bar{\gamma}_{(j,z)\Delta} = [G^{[0]} + G_{(j,z)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j,z)\Delta})] \bar{\gamma}_{(j,z)\Delta}.$$

В работе [1] разложение для $G_{(j,z)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(j,z)\Delta})$ записано так

$$\begin{aligned} G_{(j,z)}^{[1]}(\zeta, x_2) &= G^{[0]} \sum_{k=0}^2 \bar{\psi}_{(j,z)k} [\beta_{(1)k} (x_2 - D) \bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^k, \\ \bar{\psi}_{(j,z)0} &= \bar{\delta}_{(j,z)} + (1 + \bar{\delta}_{(j,z)}) \psi_{(j,z)0}, \quad \bar{\psi}_{(j,z)1} = -\frac{2}{3l} \sqrt{K_3^{[0]}} (1 + \bar{\delta}_{(j,z)}) \frac{\psi_{(j,z)1}}{|\bar{\epsilon}_m|}, \\ \bar{\psi}_{(j,z)2} &= \frac{4}{9l^2} K_3^{[0]} (1 + \bar{\delta}_{(j,z)}) \frac{\chi_{(j,z)2}}{\bar{\epsilon}_m^2}, \quad K_3^{[0]} = 1 + \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}} + (\frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}})^2. \end{aligned} \quad (14)$$

где

Действуя аналогично изложенному выше, находим значения $\rho_{(1)k\Delta}$ при $\eta_{(1)k\Delta} = \eta_{(1)k\Delta 1}$ и $\eta_{(1)k\Delta} = \eta_{(1)k\Delta 2}$. $\rho_{(1)k\Delta 1} = \rho_{(1)k\Delta}(\eta_{(1)k\Delta 1})$, $\rho_{(1)k\Delta 2} = \rho_{(1)k\Delta}(\eta_{(1)k\Delta 2})$

=а затем определяем

$$\begin{aligned} \psi_{(1)0} &= 1 / \xi_{(1)}^{(0)} - 1, \quad \psi_{(1)1} = [(G_{(1)1} - \psi_{(1)0}) \rho_{(1)2}^2 - (G_{(1)2} - \\ &- \psi_{(1)0}) \rho_{(1)1}^2] / \Delta'_{(1)}, \quad \psi_{(1)2} = [(G_{(1)2} - \psi_{(1)0}) \rho_{(1)1} - (G_{(1)1} - \\ &- \psi_{(1)0}) \rho_{(1)2}] / \Delta'_{(1)}, \quad \Delta'_{(1)} = \rho_{(1)1} \rho_{(1)2} (\rho_{(1)2} - \rho_{(1)1}), \\ \bar{\psi}_{(1)0} &= \psi_{(1)0}, \quad \bar{\psi}_{(1)1} = -\frac{2}{3l} \sqrt{K_3^{[0]}} \frac{\psi_{(1)1}}{|\bar{\epsilon}_2|}, \quad \bar{\psi}_{(1)2} = \frac{4}{9l^2} K_3^{[0]} \frac{\chi_{(1)2}}{\bar{\epsilon}_2^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Как уже отмечалось в [1], на этапе I зона II является сжатой зоной, в которой сжимающие напряжения уменьшаются, т.е. наблюдается процесс разгрузки. Этот процесс относится к числу этапов второго типа работы [2]. Очевидно, уровень напряжений сжатия в начале этапа $\eta_{(1)0} = \eta_{(1)}$. В разных точках зоны II напряжения различны. Величина $|\eta_{(1)0} - \eta_{(1)0}^*|$ в конце этапа принимает наибольшее значение в тех точках зоны, где $\eta_{(1)0} = 0$. Поэтому положим $\eta_{(1)0} = 0$. Заметим, что $\eta_{(1)0}$ и $\eta_{(1)0}$ не зависят от координат точек зоны II.

Зависимость $\bar{\epsilon}_\Delta$ от $\bar{\sigma}_\Delta$ для зоны II выглядит так:

$$\zeta_{(1)k\Delta}(\eta_{(1)k\Delta}) = A_{(1)k} \eta_{(1)k\Delta} f_{(1)k}(\eta_{(1)k\Delta}), \quad (16)$$

так как $k_{(1)k} = 0$. Действуя далее аналогично тому, что делалось для зоны I, полагаем

$\eta_{(1)k\Delta 1} = \eta_{(1)k} - \eta_{(1)k}$, $\eta_{(1)k\Delta 2} = \eta_{(1)k\Delta 1} / 2$ и находим значения $\zeta_{(1)k\Delta}$ при $\eta_{(1)k\Delta} = \eta_{(1)k\Delta 1}$ и

$\eta_{(1)k\Delta} = \eta_{(1)k\Delta 2}$.

$$\zeta_{(1,II)\Delta 1} = \zeta_{(1,II)\Delta}(\eta_{(1,II)\Delta 1}), \zeta_{(1,II)\Delta 2} = \zeta_{(1,II)\Delta}(\eta_{(1,II)\Delta 2})$$

Далее аналогично (10) имеем

$$\begin{aligned} \chi_{(1,II)0} &= 1/f_{(1,II)}(0) - 1, \chi_{(1,II)1} = [(F_{(1,II)1} - \chi_{(1,II)0})\zeta_{(1,II)2}^2 - (F_{(1,II)2} - \\ &- \chi_{(1,II)0})\zeta_{(1,II)1}^2]/\Delta_{(1,II)}, \chi_{(1,II)2} = [(F_{(1,II)2} - \chi_{(1,II)0})\zeta_{(1,II)1} - (F_{(1,II)1} - \\ &- \chi_{(1,II)0})\zeta_{(1,II)2}]/\Delta_{(1,II)}, \Delta_{(1,II)} = \zeta_{(1,II)1}\zeta_{(1,II)2}(\zeta_{(1,II)2} - \zeta_{(1,II)1}), \tilde{\chi}_{(1,II)0} = \\ &= \chi_{(1,II)0}, \tilde{\chi}_{(1,II)1} = -\frac{1}{3l}\left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)\frac{\chi_{(1,II)1}}{\xi_3}, \tilde{\chi}_{(1,II)2} = \frac{1}{9l^2}\left(1 - \frac{K_2^{[0]}}{K_1^{[0]}}\right)^2\frac{\chi_{(1,II)2}}{\xi_3^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $F_{(1,II)k} = 1/f_{(1,II)}(\eta_{(1,II)\Delta k}) - 1$ ($k=1,2$). Также учтено, что $\tilde{\delta}_{(1,II)} = 0$. Вместо (15) получаем

$$\begin{aligned} \psi_{(1,II)0} &= 1/g_{(1,II)}(0) - 1, \psi_{(1,II)1} = [(G_{(1,II)1} - \psi_{(1,II)0})\mathcal{A}_{(1,II)2}^2 - (G_{(1,II)2} - \\ &- \psi_{(1,II)0})\mathcal{A}_{(1,II)1}^2]/\Delta'_{(1,II)}, \psi_{(1,II)2} = [(G_{(1,II)2} - \psi_{(1,II)0})\mathcal{A}_{(1,II)1} - (G_{(1,II)1} - \\ &- \psi_{(1,II)0})\mathcal{A}_{(1,II)2}]/\Delta'_{(1,II)}, \Delta'_{(1,II)} = \mathcal{A}_{(1,II)1}\mathcal{A}_{(1,II)2}(\mathcal{A}_{(1,II)2} - \mathcal{A}_{(1,II)1}), \bar{\psi}_{(1,II)0} = \\ &= \psi_{(1,II)0}, \bar{\psi}_{(1,II)1} = -2\sqrt{K_3^{[0]}}\psi_{(1,II)1}/|3l\xi_3|, \bar{\psi}_{(1,II)2} = 4K_3^{[0]}\chi_{(1,II)2}/(3l\xi_3)^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\mathcal{A}_{(1,II)\Delta k} = \mathcal{A}_{(1,II)\Delta}(\eta_{(1,II)\Delta k})$, $\mathcal{A}_{(1,II)\Delta 2} = \mathcal{A}_{(1,II)\Delta}(\eta_{(1,II)\Delta 2})$, $G_{(1,II)k} = 1/g_{(1,II)}(\eta_{(1,II)\Delta k}) - 1$ ($k=1,2$).

В начале первого этапа в балке отсутствуют продольные растягивающие напряжения, т.е. отсутствует зона III. Она появляется, когда ζ_N , определяющее длину участка a (см.[1]), становится неотрицательным. Обозначим через $\beta_{(1)0}$ значение $\beta_{(1)}$, при котором $\zeta_N = 0$ (как

правило, $\beta_{(1)0} \ll \beta_{(1)}^{**}$). Зона III растет из точки $\zeta = 0$, $x_2 = -h/2$, принадлежащей зоне II, т.е. в точках балки, которые впоследствии стали точками зоны III, сначала происходил процесс разгрузки. Таким образом, первый этап изгиба в зоне III состоит из двух подэтапов: на первом подэтапе I' в точках зоны III происходит процесс разгрузки, аналогичный происходящему в точках зоны II. Вторым подэтапом I'' является этапом нагружения при растяжении после разгрузки при сжатии, т.е. он относится к третьему типу [2]. В

соответствии с алгоритмом, предложенном в статье [2], полагаем $\eta_{(1',III)} = 0$, а $\xi_{(1',III)}$

определяем аналогично $\xi_{(1,D)}$. Опять таки $\eta_{(1,III)}$ и $\eta_{(1,III)}$ не зависят от координат точек зоны

III. Далее согласно (6)[2] находим $\phi_v = [1 - 1/V_{(1,III)}(0)]/(1 - \xi_3)$ и величины

$$\tilde{\gamma}_{(1',III)i} = 1 + \tilde{\beta}_{1i}\phi_v + \tilde{\beta}_{2i}\phi_v^2 + \tilde{\beta}_{3i}\phi_v^3 \quad (i=1,2,3), \quad \text{где } \tilde{\beta}_{11} = -0,55, \tilde{\beta}_{2,1} = 0,1,$$

$$\tilde{\beta}_{3,1} = 0, \tilde{\beta}_{1,2} = 0,2, \tilde{\beta}_{2,2} = \tilde{\beta}_{3,2} = 0, \tilde{\beta}_{1,3} = -0,27, \tilde{\beta}_{2,3} = -0,02, \tilde{\beta}_{3,3} = 0. \quad \text{Затем определяем } \bar{\delta}_{(1',III)} = 1 - \tilde{\gamma}_{(1',III)3}$$

. Используя формулы (4) и (12), через найденные здесь величины вычисляем коэффициенты $\chi_{(1',III)k}$ и $\psi_{(1',III)k}$ ($k=0,1,2$) и в соответствии с (5) и (13) находим

$$\begin{aligned} K_{(1',III)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]}) &= K^{[0]}\{\bar{\delta}_{(1',III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1',III)})[\chi_{(1',III)0} + \chi_{(1',III)1}\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]}/\xi_{3t} + \\ &+ \chi_{(1',III)2}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]}/\xi_{3t}^2)]\}, \\ G_{(1',III)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]}) &= G^{[0]}\{\bar{\delta}_{(1',III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1',III)})[\psi_{(1',III)0} + \psi_{(1',III)1}(\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]}/\xi_{3t} + \\ &+ \psi_{(1',III)2}(\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]}/\xi_{3t}^2)]\}. \end{aligned}$$

Представим эти соотношения в следующем виде:

$$\begin{aligned} K_{(1',III)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]}) &= K^{[0]}\{\bar{\delta}_{(1',III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1',III)})[\chi_{(1',III)0} + \chi_{(1',III)1}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)\Delta}^{[0]} + \\ &+ \bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*}/\xi_{3t} + \chi_{(1',III)2}(\bar{\varepsilon}_{(1,III)\Delta}^{[0]} + \bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*})^2/\xi_{3t}^2]\}, \\ G_{(1',III)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]}) &= G^{[0]}\{\bar{\delta}_{(1',III)} + (1 + \bar{\delta}_{(1',III)})[\psi_{(1',III)0} + \psi_{(1',III)1}(\bar{\gamma}_{(1,III)\Delta}^{[0]} + \\ &+ \bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*}/\xi_{3t} + \psi_{(1',III)2}(\bar{\gamma}_{(1,III)\Delta}^{[0]} + \bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*})^2/\xi_{3t}^2]\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]*}$ и $\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]*}$ – значения $\bar{\varepsilon}_{(1,III)}^{[0]}$ и $\bar{\gamma}_{(1,III)}^{[0]}$ в начале первого этапа.

Нетрудно убедиться, используя формулы (16) и (17) из [1], что

$$\bar{\varepsilon}_{(I,II)}^{[0]*} = \delta_z K_4^{[0]} \alpha_{(I)}^* / 3, \quad \bar{\gamma}_{(I,II)}^{[0]*} = 2\delta_z \sqrt{K_3^{[0]} | \alpha_{(I)}^* |} / 3.$$

Произведя несложные выкладки, можно записать равенства (19) так

$$\begin{aligned} K_{(I,II)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(I,II)\Delta}^{[0]}) &= K^{[0]} \{ \bar{\delta}_{(I,II)} + (1 + \bar{\delta}_{(I,II)}) [\chi_{(I,II)0} + \chi_{(I,II)1} \bar{\varepsilon}_{(I,II)\Delta}^{[0]} / \varepsilon_{\partial t} + \\ &+ \chi_{(I,II)2} (\bar{\varepsilon}_{(I,II)\Delta}^{[0]})^2 / \varepsilon_{\partial t}^2] \}, \\ G_{(I,II)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(I,II)\Delta}^{[0]}) &= G^{[0]} \{ \bar{\delta}_{(I,II)} + (1 + \bar{\delta}_{(I,II)}) [\psi_{(I,II)0} + \psi_{(I,II)1} \bar{\gamma}_{(I,II)\Delta}^{[0]} / \varepsilon_{\partial t} + \\ &+ \psi_{(I,II)2} (\bar{\gamma}_{(I,II)\Delta}^{[0]})^2 / \varepsilon_{\partial t}^2] \}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\chi_{(I,II)0} = \chi_{(I,II)0} + \chi_{(I,II)1} \bar{\varepsilon}_{(I,II)}^{[0]*} + \chi_{(I,II)2} (\bar{\varepsilon}_{(I,II)}^{[0]*})^2$, $\chi_{(I,II)1} = \chi_{(I,II)1} +$

$$+ 2 \chi_{(I,II)2} \bar{\varepsilon}_{(I,II)}^{[0]*}, \quad \psi_{(I,II)0} = \psi_{(I,II)0} + \psi_{(I,II)1} \bar{\gamma}_{(I,II)}^{[0]*} + \psi_{(I,II)2} (\bar{\gamma}_{(I,II)}^{[0]*})^2,$$

$$\psi_{(I,II)1} = \psi_{(I,II)1} + 2\psi_{(I,II)2} \bar{\gamma}_{(I,II)}^{[0]*}, \quad \bar{\delta}_{(I,II)} = \bar{\delta}_{(I,II)}.$$

Таким образом, функции $K_{(I,II)}^{[1]}(\bar{\varepsilon}_{(I,II)\Delta}^{[0]})$ и $G_{(I,II)}^{[1]}(\bar{\gamma}_{(I,II)\Delta}^{[0]})$ для первого этапа целиком получили представление в виде разложений (5) и (13). Теперь в соответствии с (7) и (14) можно найти коэффициенты $\bar{\chi}_{(I,II)k}$ и $\bar{\psi}_{(I,II)k}$ ($k=0,1,2$):

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{(I,II)0} &= \bar{\delta}_{(I,II)} + (1 + \bar{\delta}_{(I,II)}) \chi_{(I,II)0}, \quad \bar{\chi}_{(I,II)1} = -K_4^{[0]} (1 + \bar{\delta}_{(I,II)}) \times \\ &\times \chi_{(I,II)1} / |3I \varepsilon_{\partial t}|, \quad \bar{\chi}_{(I,II)2} = (K_4^{[0]})^2 (1 + \bar{\delta}_{(I,II)}) \chi_{(I,II)2} / (3I \varepsilon_{\partial t})^2, \\ \bar{\psi}_{(I,II)0} &= \bar{\delta}_{(I,II)} + (1 + \bar{\delta}_{(I,II)}) \psi_{(I,II)0}, \quad \bar{\psi}_{(I,II)1} = -K_4^{[0]} (1 + \bar{\delta}_{(I,II)}) \times \\ &\times \psi_{(I,II)1} / |3I \varepsilon_{\partial t}|, \quad \bar{\psi}_{(I,II)2} = (K_4^{[0]})^2 (1 + \bar{\delta}_{(I,II)}) \psi_{(I,II)2} / (3I \varepsilon_{\partial t})^2. \end{aligned} \quad (21)$$

В соответствии с формулами (39) и (41)[1] для нахождения $\phi_{(I)1}^{[1]}(\zeta)$ необходимо построить функции $M_{(I)z}^{\circ}(\zeta)$ и $[M_{(I)z}^{\circ}]^{\#}(\zeta)$. Для этого необходимо предварительно определить функции $\tilde{E}_{(I,z)n}^{[1]}(\zeta)$ ($z=I,II$)[1]:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{(I,z)n}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{n=0}^2 \beta_{(j)n}^{\#} [K_4^{[0]} K^{[0]} \tilde{\chi}_{(j,x)n}(\zeta) + \\ &+ \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \tilde{\psi}_{(j,x)n}(\zeta)] [\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^n, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{(j,x)k}(\zeta) &= \int_{z(\zeta)} \bar{\chi}_{(j,x)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^2 x_2 dx_2, \\ \tilde{\psi}_{(j,x)k}(\zeta) &= \int_{z(\zeta)} \bar{\psi}_{(j,x)k}(\zeta, x_2) (x_2 - D)^2 x_2 dx_2. \end{aligned}$$

Учитывая что $\bar{\chi}_{(j,x)k}$ и $\bar{\psi}_{(j,x)k}$ для первого этапа не зависят от ζ и x_2 , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{(I,x)n}(\zeta) &= \bar{\chi}_{(I,x)n} V_{(I,x)n}(\zeta), \quad \tilde{\psi}_{(I,x)n}(\zeta) = \bar{\psi}_{(I,x)n} V_{(I,x)n}(\zeta), \\ V_{(I,x)n}(\zeta) &= \int_{z(\zeta)} (x_2 - D)^n x_2 dx_2 \quad (n=0,1,2) \end{aligned}$$

($z(\zeta)$ – отрезок, образующийся в результате пересечения прямой, параллельной оси x_2 , с зоной z , рис.3[1]). Тогда (22) запишется так

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{(I,z)n}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{n=0}^2 E_{(j,x)n}^{[1]} \beta_{(j)n}^{\#} V_{(I,x)n}(\zeta) [\bar{\varepsilon}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^n, \\ E_{(j,x)n}^{[1]} &= K_4^{[0]} K^{[0]} \bar{\chi}_{(j,x)n} + \frac{2}{3} (3 + K_4^{[0]}) G^{[0]} \bar{\psi}_{(j,x)n} \end{aligned} \quad (23)$$

Для функций $V_{(I,x)n}(\zeta)$ ($n=0,1,2$) нетрудно получить аналитические выражения:

$$\begin{aligned} V_{(I,x)0}(\zeta) &= \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - D^2 \right), \quad V_{(I,x)1}(\zeta) = -D(h^2/4 - D^2)/4 + (h^3/8 - D^3)/3, \\ V_{(I,x)2}(\zeta) &= D^2(h^2/4 - D^2)/2 - 2D(h^3/8 - D^3)/3 + (h^4/16 - D^4)/4. \end{aligned}$$

Зона II имеет различные границы на участках a и b . Поэтому на этих участках $V_{(I,II)n}(\zeta)$ имеет различные аналитические выражения:

$$\begin{aligned} V_{(I,II)0a}(\zeta) &= \frac{1}{2}[D^2 - x_{2N}(\zeta)^2], V_{(I,II)1a}(\zeta) = -D\{D^2 - [x_{2N}(\zeta)]^2\}/4 + \\ &+ [D^3 - [x_{2N}(\zeta)]^3]/3, V_{(I,II)2a}(\zeta) = D^2\{D^2 - [x_{2N}(\zeta)]^2\}/2 - 2D\{D^3 - \\ &- [x_{2N}(\zeta)]^3\}/3 + \{D^4 - [x_{2N}(\zeta)]^4\}/4, V_{(I,II)0b}(\zeta) = [D^2 - h^2/4]/2, \\ V_{(I,II)1b}(\zeta) &= -D(D^2 - h^2/4)/4 + (D^3 + h^3/8)/3, V_{(I,II)2b}(\zeta) = \\ &= D^2(D^2 - h^2/4)/2 - 2D(D^3 + h^3/8)/3 + (D^4 - h^4/16)/4. \end{aligned}$$

Зона III имеется только на участке a . Тогда $V_{(I,III)0}(\zeta) = \{[x_{2N}(\zeta)]^2 - h^2/4\}/2$, $V_{(I,III)1}(\zeta) = -D\{[x_{2N}(\zeta)]^2 - h^2/4\}/4 + \{[x_{2N}(\zeta)]^3 + h^3/8\}/3$, $V_{(I,III)2}(\zeta) = D^2\{[x_{2N}(\zeta)]^2 - h^2/4\}/2 - 2D\{[x_{2N}(\zeta)]^3 + h^3/8\}/3 + \{[x_{2N}(\zeta)]^4 - h^4/16\}/4$,

Таким образом, функции $V_{(I,III)n}(\zeta)$ ($n = 0, 1, 2$), а, следовательно, и $\tilde{E}_{(I,III)1}^{[1]}(\zeta)$ имеют различные аналитические выражения на участках a и b . Будем обозначать их соответственно так: $V_{(I,III)n,a}(\zeta)$, $\tilde{E}_{(I,III)1a}^{[1]}(\zeta)$ и $V_{(I,III)n,b}(\zeta)$, $\tilde{E}_{(I,III)1b}^{[1]}(\zeta)$. Аналогично определяются функции $\tilde{E}_{(I,z)1}^{[1]}(\zeta)$ ($z=I, II, III$):

$$\tilde{E}_{(j,z)1}^{[1]}(\zeta) = \sum_{n=0}^2 E_{(j,z)1n}^{[1]} \beta_{(j)1n}^n W_{(1,z)n}(\zeta) [\bar{\theta}_{(j)}^{[0]}(\zeta)]^n, \quad (24)$$

где

$$W_{(1,z)n}(\zeta) = \int_{z(\zeta)} (x_2 - D)^n x_2^2 dx_2 \quad (n = 0, 1, 2) \quad (25)$$

Нетрудно получить аналитические выражения и для функций $W_{(1,z)n}(\zeta)$ ($n=0, 1, 2$; $z=I, II, III$). Так же как и $V_{(1,z)n}(\zeta)$ они представляют собой полиномы переменной $x_{2N}(\zeta)$. При этом $W_{(I,II)n}(\zeta)$, а, следовательно, и $\tilde{E}_{(I,II)1}^{[1]}(\zeta)$ имеют различные аналитические выражения на участках a и b . Они будут обозначаться так: $W_{(I,II)n,a}(\zeta)$, $\tilde{E}_{(I,II)1a}^{[1]}(\zeta)$ и $W_{(I,II)n,b}(\zeta)$, $\tilde{E}_{(I,II)1b}^{[1]}(\zeta)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{(I,II)1}^{[1]}(\zeta) &= \tilde{E}_{(I,II)1a}^{[1]}(\zeta), \tilde{E}_{(I,II)1}^{[1]}(\zeta) = \tilde{E}_{(I,II)1a}^{[1]}(\zeta) \quad (\zeta \leq \zeta_N), \\ \tilde{E}_{(I,II)1}^{[1]}(\zeta) &= \tilde{E}_{(I,II)1b}^{[1]}(\zeta), \tilde{E}_{(I,II)1}^{[1]}(\zeta) = \tilde{E}_{(I,II)1b}^{[1]}(\zeta) \quad (\zeta > \zeta_N). \end{aligned} \quad (26)$$

Как уже было отмечено выше, функции $V_{(1,z)n}(\zeta)$ и $W_{(1,z)n}(\zeta)$ являются полиномами переменной $x_{2N}(\zeta)$, а, следовательно, $\tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta)$ и $\tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta)$ являются полиномами двух переменных $x_{2N}(\zeta)$ и $\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)$:

$$\begin{aligned} V_{(1,z)n}(\zeta) &= \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)n,k} [x_{2N}(\zeta)]^k, W_{(1,z)n}(\zeta) = \sum_{k=0}^5 W_{(1,z)n,k} [x_{2N}(\zeta)]^k, \\ \tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)1n}^n E_{(1,z)1n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,z)n,k} [x_{2N}(\zeta)]^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n, \\ \tilde{E}_{(1,z)1}^{[1]}(\zeta) &= \sum_{n=0}^2 \beta_{(1)1n}^n E_{(1,z)1n}^{[1]} \sum_{k=0}^5 W_{(1,z)n,k} [x_{2N}(\zeta)]^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n \\ (V_{(I,II)0,0} &= (h^2/4 - D^2)/2, V_{(I,II)1,0} = -D(h^2/4 - D^2)/4 + (h^3/8 - D^3)/3, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
V_{(1,1)2,0} &= D^2(h^2/4 - D^2)/2 - 2D(h^3/8 - D^3)/3 + (h^4/16 - D^4)/4, \\
V_{(1,1)k,n} &= 0 (k=0,1,2; n > 0), V_{(1,1)0a,0} = D^2/2, V_{(1,1)0a,1} = 0, V_{(1,1)0a,2} = -1/2, \\
V_{(1,1)0a,n} &= 0 (n > 2), V_{(1,1)1a,0} = D^3/12, V_{(1,1)1a,1} = 0, V_{(1,1)1a,2} = D/4, \\
V_{(1,1)1a,3} &= -1/3, V_{(1,1)1a,4} = 0, V_{(1,1)2a,0} = D^4/12, V_{(1,1)2a,2} = -D^2/2, \quad V_{(1,1)2a,3} = 2D/3, V_{(1,1)2a,4} = -1/4 \quad \text{И} \\
\text{т.д.} & \text{Заметим, что } V_{(1,1)0a,k} = 0 \quad (k=0, 1, 2).
\end{aligned}$$

Из (27) следует, что функция $M_{(1)3}^{\otimes}(\zeta)$, определяемая формулой (35)[1], является полиномом двух переменных $x_{2N}(\zeta)$ и $\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
M_{(1)3}^{\otimes}(\zeta) &= \beta_{(1)1} \bar{M}_{(1)3}^{\otimes}(\zeta), \\
\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}(\zeta) &= -\left\{ \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2) D_{(1,u)n} + (J_1 - J_2) D_{(1,d)n}] [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} - \right. \\
&- b \sum_{s=1n=0}^{N_z-2} \beta_{(1)1}^n \tilde{E}_{(1,s)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,s)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} + \\
&+ \delta_0 b \sum_{s=1n=0}^{N_z-2} \beta_{(1)1}^n \tilde{E}_{(1,s)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,s)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^{n+1} + \\
&+ J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [\bar{\theta}^{[0]}(\zeta)]^n + \delta_0^2 i H_i \bar{\theta}^{[0]}(\zeta) \left. \right\}. \quad (28)
\end{aligned}$$

и тоже имеет различные аналитические выражения на участках a и b , поскольку коэффициенты $V_{(1,s)nk}$ и $W_{(1,s)nk}$ ($z = \text{II}, \text{III}$) принимают разные значения на этих участках.

Тогда

$$[M_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) = \beta_{(1)1} [\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta),$$

причем участке a (т.е. при $\zeta \leq \zeta_N$)

$$\begin{aligned}
[\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) &= -\left\{ \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2) D_{(1,u)n} + (J_1 - J_2) D_{(1,d)n}] [(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{\#}(\zeta) - \right. \\
&- b \sum_{s=1n=0}^{\text{III}-2} \beta_{(1)1}^n \tilde{E}_{(1,s)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,s)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}{}^{\#}(\zeta) + \\
&+ \delta_0 b \sum_{s=1n=0}^{\text{III}-2} \beta_{(1)1}^n \tilde{E}_{(1,s)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,s)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}{}^{\#}(\zeta) + \\
&+ J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [(\bar{\theta}^{[0]})^n]^{\#}(\zeta) + \delta_0^2 i H_i [\bar{\theta}^{[0]}]^{\#}(\zeta) \left. \right\}. \quad (29)
\end{aligned}$$

На участке b (т.е. при $\zeta > \zeta_N$):

$$\begin{aligned}
[\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta) &= [\bar{M}_{(1)3}^{\otimes}]^{\#}(\zeta_N) - \left\{ \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2) D_{(1,u)n} + \right. \\
&+ (J_1 - J_2) D_{(1,d)n}] [(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]_b^{\#}(\zeta) - \\
&- b \sum_{s=1n=0}^{\text{II}-2} \beta_{(1)1}^n \tilde{E}_{(1,s)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,s)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}{}^{\#}_b(\zeta) + \\
&+ \delta_0 b \sum_{s=1n=0}^{\text{II}-2} \beta_{(1)1}^n \tilde{E}_{(1,s)1,n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,s)nk} [x_{2N}(\zeta)]^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}{}^{\#}_b(\zeta) + \\
&+ J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [(\bar{\theta}^{[0]})^n]_b^{\#}(\zeta) + \delta_0^2 i H_i [\bar{\theta}^{[0]}]_b^{\#}(\zeta) \left. \right\}. \quad (30)
\end{aligned}$$

$$[f]_b^{\#}(\zeta) = \int_{\zeta_N}^{\zeta} f(\tau) d\tau$$

Здесь $\int_{\zeta_N}^{\zeta}$. Заметим, что коэффициенты $D_{(1,u)n}$ и $D_{(1,d)n}$, определяемые по формулам (33) [1], не зависят от ζ вследствие независимости от этой переменной величин $\tilde{X}_{(j,s)n}$ и $\tilde{Y}_{(j,s)n}$.

Формулы (29) и (30) в соответствии с (39)[1] позволяют определить $\phi_{(1)}^{[1]}(\zeta)$, а следовательно, и $\phi_{(1)}(\zeta) = \phi^{[0]}(\zeta) + \phi_{(1)}^{[1]}(\zeta)$. Для нахождения прогибов на первом этапе используем соотношение [3]

$$v_{(1)}(\zeta) = I[\phi_{(1)}]^{##}(\zeta) \quad (31)$$

Отсюда и из 39[1] получаем
$$v_{(1)}(\zeta) = \beta_{(1)M}^I \{ [\bar{\phi}^{[0]}]^{##}(\zeta) - \frac{l}{H} [\bar{M}_{(1)B}^{\otimes}]^{##}(\zeta) + \frac{l}{H} \bar{M}_{(1)B}^{\otimes}(1) \frac{\zeta^2}{2} \}. \quad (32)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} [\bar{M}_{(1)B}^{\otimes}]^{##}(\zeta) = & - \left\{ \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2) D_{(1,u)n} + (J_1 - J_2) D_{(1,d)n}] [(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{##}(\zeta) - \right. \\ & - b \sum_{s=1n=0}^{III} \sum_{\alpha=0}^2 \beta_{(1)A}^{\alpha} \bar{E}_{(1,s)1n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,s)n,\alpha,k} [(x_{2M})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{##}(\zeta) + \\ & + \delta_0 b \sum_{s=1n=0}^{III} \sum_{\alpha=0}^2 \beta_{(1)A}^{\alpha} \bar{E}_{(1,s)1n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,s)n,\alpha,k} [(x_{2M})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{##}(\zeta) + \\ & \left. + J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [(\bar{\theta}^{[0]})^n]^{##}(\zeta) + \delta_0^2 I H_I [\bar{\theta}^{[0]}]^{##}(\zeta) \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

при $\zeta \leq \zeta_N$ и

$$\begin{aligned} [\bar{M}_{(1)B}^{\otimes}]^{##}(\zeta) = & [\bar{M}_{(1)B}^{\otimes}]^{##}(\zeta_N) + [\bar{M}_{(1)B}^{\otimes}]^{##}(\zeta - \zeta_N) - \\ & - \left\{ \sum_{n=1}^3 [(J_1 + J_2) D_{(1,u)n} + (J_1 - J_2) D_{(1,d)n}] [(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{##}(\zeta) - \right. \\ & - b \sum_{s=1n=0}^{III} \sum_{\alpha=0}^2 \beta_{(1)A}^{\alpha} \bar{E}_{(1,s)1n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 W_{(1,s)n,\alpha,k} [(x_{2M})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{##}(\zeta) + \\ & + \delta_0 b \sum_{s=1n=0}^{III} \sum_{\alpha=0}^2 \beta_{(1)A}^{\alpha} \bar{E}_{(1,s)1n}^{[1]} \sum_{k=0}^4 V_{(1,s)n,\alpha,k} [(x_{2M})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{##}(\zeta) + \\ & \left. + J_3 \sum_{n=1}^3 (\bar{D}_{(1,u)n} - \bar{D}_{(1,d)n}) [(\bar{\theta}^{[0]})^n]^{##}(\zeta) + \delta_0^2 I H_I [\bar{\theta}^{[0]}]^{##}(\zeta) \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

при $\zeta > \zeta_N$.

Таким образом, определение прогибов $v_{(1)}(\zeta)$ сводится к вычислению интегралов $[(\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{##}(\zeta)$, $[(x_{2M})^k (\bar{\theta}^{[0]})^{n+1}]^{##}(\zeta)$, $[(\bar{\theta}^{[0]})^n]^{##}(\zeta)$, $[(x_{2M})^k (\bar{\theta}^{[0]})^n]^{##}(\zeta)$. Их можно определять численно, можно получить для них аналитические выражения, используя MathCAD или Matlab, возможно также использовать разложения подынтегральных функций в степенные ряды.

Пример. Рассмотрим железобетонную консольную балку, находящуюся под действием сил F_1 и F_2 , приложенных к концу балки (рис.1 [1]). Длина балки $l = 8$ м, размеры поперечного сечения: $b = 0,8$ м, $h = 0,28$ м, материал – бетон марки В35. Армирование симметричное – 12 стержней диаметром 20 мм, материал – сталь А-III. Сила F_1 – постоянная сжимающая: $F_1 = -294,3$ кН. При этом параметр $\alpha^* = -0,297$. Графики зависимости прогибов конца консоли $v_{(1)k}$ ($k = 1, 2, 3$) от параметра β (т.е. от силы F_2) представлен на рис.1. При $k = 1$ функция $v_{(1)k}(\beta)$ вычисляется по линейной теории, при $k = 2$ – с учетом геометрической нелинейности, при $k = 3$ – с учетом и геометрической и физической нелинейностей. При $\beta = 4,5 \cdot 10^{-3}$ величина $v_{(1)3}(\beta)$ почти в два с половиной раза больше, чем $v_{(1)1}(\beta)$.

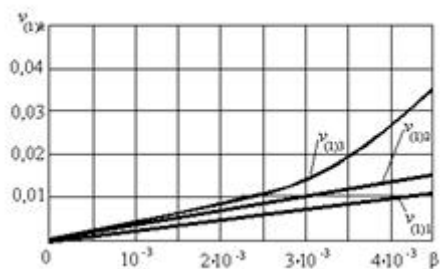


Рис.1

Замечание. Для сокращения объема вычислений функцию $v_{(1)3}(\beta)$ можно аппроксимировать полиномом, например, третьей степени: $\tilde{v}_{(1)3}(\beta) = A\beta + B\beta^2 + C\beta^3$, определяя коэффициенты А, В и С из равенств $\tilde{v}_{(1)3}(\beta_k) = v_{(1)3}(\beta_k)$ ($k = 1, 2, 3$), где $\beta_k \in (0, \beta_{(1)}^*)$ ($\beta_{(1)}^*$ – значение β в конце первого этапа).

Вывод

При учете нелинейностей прогибы железобетонных балок на первом этапе циклического изгиба оказываются существенно большими, чем при расчете по линейной теории, что сказывается на характере нелинейных колебаний.

Литература

1. Фомин В.М. Плоский изгиб железобетонной консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей при циклическом нагружении (1) // Вісник ОДАБА. Вып. 34, ч. 1, – Одесса, 2009. – С. 367-379.
2. Фомин В.М. Определение объемного модуля упругости и модуля сдвига при циклическом нагружении(2) // Вісник ОДАБА. Вып. 32, – Одесса, 2007. – С. 325 – 334.
3. Фомин В.М. Плоский изгиб консольной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вісник ОДАБА. Вып. 28, – Одесса, 2007. – С. 354 – 368.