

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОГО ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Фомин В.М. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г.Одесса)

У статті [1] були запропоновані рівняння позовжно-поперечного плоского згину балки з врахуванням фізичної й геометричної нелінійностей. При цьому ця нелінійність припускалась малою, що дозволило застосовувати при рішенні метод малого параметру. Число рівнянь залежало від кількості утримуваних складових в асимптотичному розкладенні рішення по малому параметру. У даній роботі побудоване диференційне рівняння вищевказаного згину без припущення, що нелінійність мала. У викладенні будемо дотримуватися означеної праці [1].

Исследуется деформация балки постоянного прямоугольного поперечного сечения, подверженной действию сил, лежащих в вертикальной плоскости симметрии ее поперечного сечения.

Радиус-вектор \mathbf{R}^0 точки $M(x_1, x_2, x_3)$ (ось x_1 направлена вдоль оси, ось x_2 вертикальна, а x_3 – горизонтальна) в недеформированном состоянии балки может быть представлен так:

$$\mathbf{R}^0(s^0, x_2, x_3) = \mathbf{r}^0(s^0) + \varrho^0(s^0, x_2, x_3), \quad \varrho^0(s^0, x_2, x_3) = x_2 \mathbf{e}_2^0 + x_3 \mathbf{e}_3^0, \quad (1)$$

где $s^0 = x_1$ – длина недеформированного отрезка оси балки между поперечным сечением Π^0 , содержащим заданную точку M , и левым концом балки; $\mathbf{r}^0(s^0)$ – радиус-вектор центра тяжести сечения K ; \mathbf{e}_2^0 и \mathbf{e}_3^0 – два взаимно перпендикулярных орта в плоскости Π^0 , причем \mathbf{e}_2^0 лежит в плоскости изгиба, а \mathbf{e}_3^0 перпендикулярен этой плоскости.

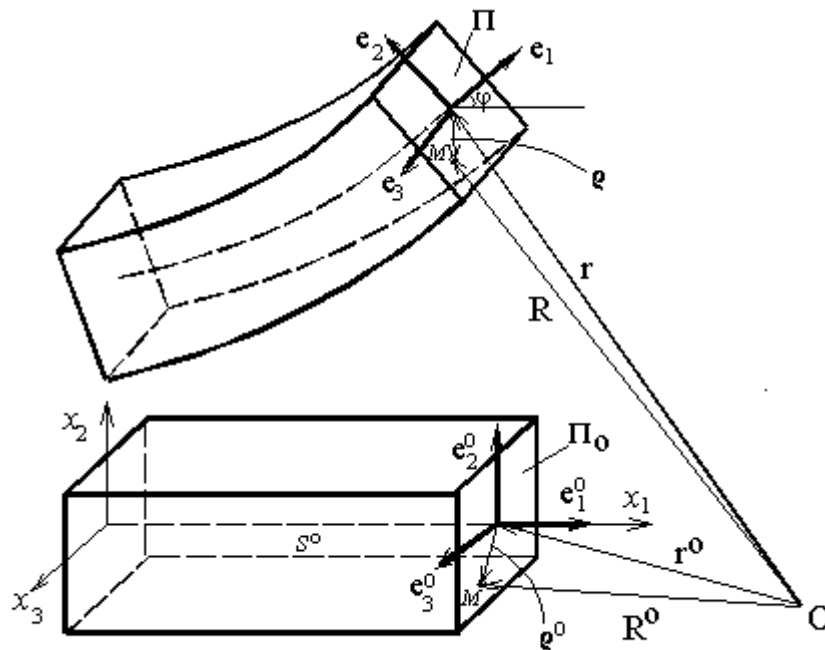


Рис.1

Положение точки M после деформации определяется радиус-вектором $\mathbf{R}(s^0, x_2, x_3)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(s^0, x_2, x_3) &= \mathbf{r}(s^0) + \varrho(s^0, x_2, x_3), \varrho(s^0, x_2, x_3) = \\ &= A(s^0, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 + B(s^0, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + C(s^0, x_2, x_3)\mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}(s^0)$ - радиус-вектор точки K после деформации; A, B и C - скалярные функции координат s^0, x_2, x_3 и \mathbf{e}_1 ; - единичный вектор касательной к деформированной оси балки в точке K ; \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 - два взаимно перпендикулярных орта в плоскости, перпендикулярной вектору, проведенные аналогично векторам и. Из (2) следует, что выполнение гипотезы плоских сечений не предполагается, т.к. первое слагаемое в правой части формулы для $\varrho(s^0, x_2, x_3)$ дает смещение точки M в направлении, перпендикулярном плоскости Π .

Пренебрежем деформацией балки в направлении вектора \mathbf{e}_3^0 . Тогда функции A и B будут функциями только координаты x_2 (конечно, кроме зависимости от s^0), а $C(s^0, x_2, x_3)$ останется неизменной, т.е.

$$A(s^0, x_2, x_3) \equiv A(s^0, x_2), B(s^0, x_2, x_3) \equiv B(s^0, x_2), C(s^0, x_2, x_3) \equiv x_3. \quad (3)$$

В пункте 1 работы [1] было показано, что отличные от нуля элементы тензора конечных деформаций \mathbf{D} определяются по формулам

$$\varepsilon_{11} = (\lambda_3^2 - 1 - 2\lambda_3^2 B\varphi')/2, \varepsilon_{22} = (A_2^2 + B_2^2 - 1)/2, \varepsilon_{12} = \lambda_3 A_2/2. \quad (4)$$

Здесь $A_2 = dA/dx_2, B_2 = dB/dx_2, \lambda_3 = ds/ds^0, \varphi' = d\varphi/ds$

Предполагается, что связь между тензорами напряжений и деформаций подчиняется деформационной теории, в которой девиаторы напряжений и деформаций коаксиальны [2,3]:

$$\sigma_0 = 3K(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_0, \mathbf{T}_1 = 2G(\varepsilon_0, \gamma_0)\mathbf{D}_1 \quad (5)$$

Здесь \mathbf{T}_1 - девиатор тензора напряжений, а \mathbf{D}_1 - девиатор тензора деформаций, ε_0, γ_0 - октаэдрические деформации.

Из (5) следует

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= K_1(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{11} + K_2(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{22}, \sigma_{22} = K_2(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{11} + \\ &+ K_1(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{22}, \sigma_{12} = 2G(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_{12},\end{aligned}\quad (6)$$

где $K_1(\varepsilon_0, \gamma_0) = [3K(\varepsilon_0, \gamma_0) + 4G(\varepsilon_0, \gamma_0)]/3, K_2(\varepsilon_0, \gamma_0) = [3K(\varepsilon_0, \gamma_0) - 2G(\varepsilon_0, \gamma_0)]/3$.

Функции $A(s^0, x_2)$ и $B(s^0, x_2)$ ищутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}A(s^0, x_2) &= a_1(s^0)x_2 + a_2(s^0)x_2^2 + a_3(s^0)x_2^3, \\ B(s^0, x_2) &= b_1(s^0)x_2 + b_2(s^0)x_2^2.\end{aligned}\quad (7)$$

Тогда

$$\begin{aligned}A_2(s^0, x_2) &= dA(s^0, x_2)/dx_2 = a_1(s^0) + 2a_2(s^0)x_2 + \\ &+ 3a_3(s^0)x_2^2, B_2(s^0, x_2) = dB(s^0, x_2)/dx_2 = b_1(s^0) + 2b_2(s^0)x_2.\end{aligned}\quad (8)$$

Из равенства нулю касательных напряжений на верхней и нижней гранях балки следует

$$\varepsilon_{12} = 0 \text{ при } x_2 = \pm h/2, \quad (9)$$

откуда находим, что

$$\begin{aligned}a_2(s^0) &= 0, a_1(s^0) = -3h^2 a_3(s^0)/4, A(s^0, x_2) = -a_3(s^0)d(x_2), \\ d(x_2) &= 3h^2 x_2/4 - x_2^3, A_2(s^0, x_2) = -a_3(s^0)d_2(x_2), \\ d_2(x_2) &= 3h^2/4 - 3x_2^2, \varepsilon_{12}(s^0, x_2) = -\lambda_3 a_3(s^0)d_2(x_2)/2\end{aligned}\quad (10)$$

(h - высота сечения балки).

Нормальные напряжения на верхней и нижней гранях также равны нулю:

$$\sigma_{22} = 0 \text{ при } x_2 = \pm h/2. \quad (11)$$

Аналогично [1] из (11) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(s^0, x_2) &= \varepsilon_s(s^0) - x_2 \varphi'(s^0), \quad \varepsilon_{22}(s^0, x_2) = 2\varepsilon_{12}^2(s^0, x_2) - \\ &- K_2(\varepsilon_0(s^0, x_2), \gamma_0(s^0, x_2)) \varepsilon_{11}(s^0, x_2) / K_1(\varepsilon_0(s^0, x_2), \gamma_0(s^0, x_2)), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varepsilon_s(s^0) = \lambda_s(s^0) - 1$ - продольная относительная деформация балки. Будем полагать, что продольная сжимаемость балки мала, что позволяет принять $s^0 = s$ в дальнейшем изложении. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(s, x_2) &= \frac{1}{3} \left\{ \left[1 + \frac{K_2(\varepsilon_0(s, x_2), \gamma_0(s, x_2))}{K_1(\varepsilon_0(s, x_2), \gamma_0(s, x_2))} \right] [\varepsilon_s(s) - \varphi'(s)x_2] + \frac{1}{2} a_3^2(s) d_2^2(x_2) \right\}, \\ \gamma_0(s, x_2) &= \frac{1}{3} \sqrt{K_5(\varepsilon_0(s, x_2), \gamma_0(s, x_2)) [\varepsilon_s(s) - \varphi'(s)x_2]^2 + 6a_3^2(s) d_2^2(x_2)}, \quad (13) \\ K_5(\varepsilon_0, \gamma_0) &= 4 \left\{ \left[1 + K_2(\varepsilon_0, \gamma_0) / K_1(\varepsilon_0, \gamma_0) \right]^2 + 1 + K_2^2(\varepsilon_0, \gamma_0) / K_1^2(\varepsilon_0, \gamma_0) \right\}. \end{aligned}$$

Из (6) находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(s, x_2) &= E_1(\varepsilon_0(s, x_2), \gamma_0(s, x_2)) [\varepsilon_s(s) - x_2 \varphi'(s)] + \\ &K_2(\varepsilon_0(s, x_2), \gamma_0(s, x_2)) a_3^2(s) d_2^2(x_2) / 2, \quad \sigma_{22}(s, x_2) = \\ &= K_1(\varepsilon_0(s, x_2), \gamma_0(s, x_2)) a_3^2(s) d_2^2(x_2) / 2, \quad \sigma_{12}(s, x_2) = \\ &= -G(\varepsilon_0(s, x_2), \gamma_0(s, x_2)) a_3(s) d_2(x_2), \quad E_1(\varepsilon_0, \gamma_0) = \\ &= K_1(\varepsilon_0, \gamma_0) - \frac{K_2^2(\varepsilon_0, \gamma_0)}{K_1(\varepsilon_0, \gamma_0)}, \quad E_2(\varepsilon_0, \gamma_0) = K_2(\varepsilon_0, \gamma_0) - \frac{K_2^2(\varepsilon_0, \gamma_0)}{K_1(\varepsilon_0, \gamma_0)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Главный вектор \mathbf{Q} внутренних усилий в сечении Π равен

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\delta + \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_d \quad (15)$$

где \mathbf{Q}_δ - главный вектор внутренних усилий в бетоне, \mathbf{Q}_u и \mathbf{Q}_d - усилия в верхней и нижней арматуре соответственно. Из условия равновесия участка балки между левым ее концом и сечением Π следует

$$\mathbf{Q}_\delta + \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_d = -\mathbf{R}_A \quad (16)$$

(\mathbf{R}_A - сила, приложенная к левому концу балки).

Проекция вектора \mathbf{R}_A на направления векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2

$$R_{A1}(s) = H_A \cos \phi(s) + V_A \sin \phi(s), \quad R_{A2}(s) = -H_A \sin \phi(s) + V_A \cos \phi(s). \quad (17)$$

Проектируя векторное равенство (14) на направление вектора \mathbf{e}_2 , получим

$$Q_{\delta,2}(s) + Q_{u,2}(s) + Q_{d,2}(s) = -R_{A2}(s) \quad (18)$$

Предполагается, что материал, из которого изготовлена арматура, в рассматриваемом диапазоне деформаций является линейно упругим. Из закона Гука следует

$$Q_{u,2}(s) = G_a \varepsilon_{12}(s, h_1) S_1, \quad Q_{d,2}(s) = G_a \varepsilon_{12}(s, -h_2) S_2 \quad (19)$$

где G_a - модуль сдвига материала арматуры, S_1 и S_2 - площади поперечных сечений верхней и нижней арматуры соответственно,

$$\varepsilon_{12}(s, h_1) = -a_3(s) d_2(h_1) / 2, \quad \varepsilon_{12}(s, -h_2) = -a_3(s) d_2(h_2) / 2 \quad (20)$$

(h_1 и h_2 - расстояния от центра тяжести сечения до верхней и нижней арматуры).

Проекцию главного вектора \mathbf{e}_2 внутренних усилий в бетоне на направление вектора определяем из формулы

$$Q_{\delta,2}(s) = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}(s, x_2) dx_2 \quad (21)$$

(b - ширина сечения балки). Из (12) получаем

$$Q_{\delta,2}(s) = -b G(\varepsilon_0(s, x_2), \gamma_0(s, x_2)) a_3(s) h^3 / 2 \quad (22)$$

Из (18)-(22) и (14) следует

$$\begin{aligned} a_3(s) &= R_{A2}(s) / H_3(s), H_3(s) = G(s)bh^3 + G_a[d_2(h_1)S_1 + d_2(h_2)S_2], \\ G(s) &= \int_{-k/2}^{k/2} G[\varepsilon_0(s, x_2), \nu_0(s, x_2)] dx_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Проектируя (14) на направление вектора e_1 находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(s) &= \frac{H_1(s)\varphi'(s) - R_{A1}(s)}{H_0(s)}, H_0(s) = b\tilde{E}_{10}(s) + E_a(S_1 + S_2), H_1(s) = \\ &= b\tilde{E}_{11}(s) + E_a(S_1h_1 - S_2h_2), \tilde{E}_{10}(s) = \int_{-k/2}^{k/2} E_1(\varepsilon_0(s, x_2), \nu_0(s, x_2)) dx_2, \quad (24) \\ \tilde{E}_{11}(s) &= \int_{-k/2}^{k/2} E_1(\varepsilon_0(s, x_2), \nu_0(s, x_2)) x_2 dx_2. \end{aligned}$$

Главный момент внутренних усилий в сечении II относительно оси, совпадающей с направлением вектора e_3 , определяется по формуле

$$M_3(s) = M_\delta(s) - h_1 Q_{\delta,1}(s) + h_2 Q_{\delta,1}(s), M_\delta(s) = -b \int_{-k/2}^{k/2} x_2 \sigma_{11}(s, x_2) dx_2. \quad (25)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} M_\delta(s) &= -b[\varepsilon_1(s)\tilde{E}_{11}(s) - \tilde{E}_{12}(s)\varphi'(s)], \tilde{E}_{12}(s) = \\ &= \int_{-k/2}^{k/2} E_1(\varepsilon_0(s, x_2), \nu_0(s, x_2)) x_2^2 dx_2, M_3(s) = -\varepsilon_1(s)H(s)_1 + H_2(s)\varphi'(s), \\ H_2(s) &= b\tilde{E}_{12}(s) + E_a(S_1h_1^2 + S_2h_2^2). \end{aligned} \quad (26)$$

Из соотношения [1] $M_3'(s) = -Q_2(s)$ следует

$$\begin{aligned} H_5(s)\varphi''(s) + \left[\frac{dH_5(s)}{ds} - R_{A2}(s)H_6(s) \right] \varphi'(s) - R_{A1}(s)H_6'(s) - \\ - R_{A2}(s) = 0, H_5(s) = H_2(s) - H_1^2(s)/H_0(s), H_6(s) = H_1(s)/H_0(s). \end{aligned} \quad (27)$$

Вывод

Равенства (13),(23),(24) и дифференциальное уравнение (27) представляют собой замкнутую систему уравнений для определения углов поворота поперечных сечений балки, а следовательно, и ее прогибов.

SUMMARY

Equalities (13),(23),(24) and differential equation (27) constitute closed system of equations to determine angles of cross section rotation of a reinforced concrete beam and as a result its deflection.

Литература

1.Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вісник ОДАБА. Вып. 24, – Одесса, 2006. – с. 273 – 287.

2. Ильюшин А.А. Пластичность. – М: ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
3. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. – М: Стройиздат, 1974. – 316 с.