

## УСТОЙЧИВОСТЬ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ БЕТОННОЙ КОЛОННЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

Фомина И.П.

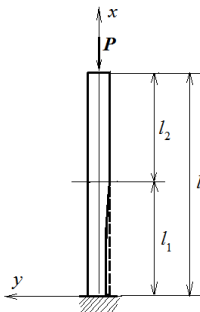
*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,  
г. Одесса*

Исследуем на устойчивость бетонную колонну прямоугольного поперечного сечения, жестко защемленную в грунте, при несимметричном воздействии этой среды, например, когда коррозии подвергается нижний участок боковой грани колонны (рис. 1а, поперечное сечение на нижнем участке показано на рис. 1б,  $C$  – центр неповрежденного сечения,  $C_1$  – центр неповрежденной части корродированного сечения).

Верхний край зоны коррозии перемещается вверх с постоянной скоростью  $v_0$ . Глубина поврежденной зоны определяется по формуле [1]

$$h(t_1) = h_0 e^{-\beta/t_1}. \quad (1)$$

Здесь  $t_1$  – время, отсчитываемое от момента  $t_0$  начала процесса



коррозии в данном поперечном

Рис. 1а

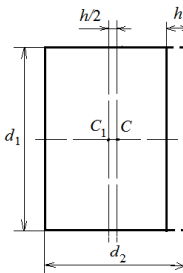


Рис. 1б

сечении стержня.

Очевидно

$$t_0 = x/v_0 \quad (2)$$

С учетом (2) формула (1) принимает следующий вид:

$$h(x, t) = h_0 e^{-\beta/(t-x/v_0)}. \quad (3)$$

( $x$  – абсцисса сечения). Здесь  $t$  – время, отсчитываемое с момента начала процесса коррозии в колонне. Так как длина  $l_1$  первого (корродированного) участка колонны равна

$$l_1(t) = v_0 t,$$

то формула (3) может быть записана так:

$$h(x, t) = h_0 e^{-\beta v_0 [l_1(t) - x]}.$$
 (4)

На рис. 2а штриховой линией показана ось, на которой расположены центры поперечных сечений неповрежденной части колонны. Сплошной линией

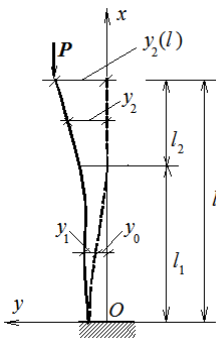


Рис. 2а

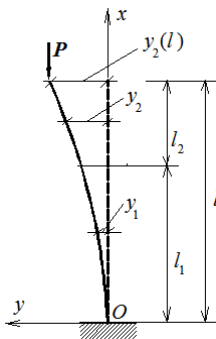


Рис. 2б

показано деформированное положение этой оси. Через  $y_1$  обозначены ординаты перемещений точек оси на первом (нижнем) участке, а  $y_0$  равно расстоянию  $CC_1$  в каждом сечении, т.е.

$$y_0 = h(x, t) / 2.$$
 (5)

Возникающее при этом напряженно-деформированное состояние колонны можно рассматривать как продольный изгиб стержня с начальным искривлением оси. Следуя [2] составляем дифференциальное уравнение для первого участка

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P[y_2(l, t) - y_1 - y_0] \quad (0 \leq x \leq l_1).$$
 (6)

Момент инерции поперечного сечения  $J$  определяется по формуле

$$J_1(x, t) = \frac{d_1 [d_2 - h(x, t)]^3}{12}$$
 (7)

( $d_1$  и  $d_2$  – ширина и высота поперечного сечения при  $t = 0$ ). Заметим, что время  $t$  играет роль параметра в уравнении (6).

Для второго (верхнего) участка колонны имеем следующее дифференциальное уравнение

$$EJ_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} = P[y_2(l, t) - y_2] \quad (l_1 \leq x \leq l), \quad (8)$$

где  $J_2 = d_1 d_2^3 / 12$ .

Заметим, что величины критических сил определяются из условия существования ненулевого решения у системы, состоящей из уравнения

$$EJ_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} = P[y_2(l, t) - y_1] \quad (0 \leq x \leq l_1) \quad (9)$$

и уравнения (8) при следующих условиях

$$y_1(0, t) = 0, \frac{dy_1}{dx}(0, t) = 0, y_2(l_1, t) = y_1(l_1, t), \frac{dy_2}{dx}(l_1, t) = \frac{dy_1}{dx}(l_1, t) \quad (10)$$

Произведем в уравнении (9) замену независимой переменной  $\xi = x/l$  ( $l$  – высота колонны). В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \varepsilon f(\xi, t) y_1 = \varepsilon f(\xi, t) D, \quad (11)$$

где

$$\varepsilon = \frac{Pl^2}{E\bar{\sigma}}, \quad f(\xi, t) = \frac{12}{d_1 [d_2 - h(\xi, t)]^3}, \quad D = y_2(l, t), \quad (12)$$

$$h(\xi, t) = h_0 e^{-\beta v_0 / l [\lambda_1(t) - \xi]}, \quad \lambda_1(t) = l_1(t) / l.$$

Аппроксимируем функцию  $f(\xi, t)$  на отрезке  $0 \leq \xi \leq \lambda_1(t)$  многочленом, используя интерполяционную формулу Лагранжа [3]

$$f(\xi, t) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i, t) \frac{\omega_i(\xi)}{\omega_i(\xi_i)}, \quad (13)$$

$$\omega_i(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)$$

$(\xi_i = \frac{\lambda_1}{n} i, i = 0, 1, \dots, n)$ . Представим  $\omega_i(\xi) (i = 0, 1, \dots, n)$  в следующем виде:

$$\omega_i(\xi) = \sum_{j=0}^n b_{i,j} \xi^j, \quad (14)$$

где  $b_{i,j} (i, j = 0, 1, \dots, n)$  - постоянные коэффициенты, однозначно выражаемые через  $\xi_i (i = 0, 1, \dots, n)$ .

Подставив представление (14) в формулу (13), получаем

$$f(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \xi^j, \quad (15)$$

где

$$f_j(t) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i, t) \frac{b_{i,j}}{\omega_i(\xi_i)} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad f_j(t) = 0 \quad (j > n).$$

Будем искать решение  $y_1(\xi, t)$  задачи Коши для уравнения (11) при начальных условиях

$$y_1(0, t) = 0, \quad \frac{dy_1(0, t)}{d\xi} = 0 \quad (16)$$

в виде разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$y_1(\xi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_{1,k}(\xi, t) \quad (17)$$

и будем полагать при этом, что условия (16) выполняются для каждой из функций  $y_{1,k}(\xi, t) (k = 0, 1, 2, \dots)$ .

Подставив это разложение в уравнение (11), получаем

$$\frac{d^2 y_{1,0}}{d\xi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left[ \frac{d^2 y_{1,k}}{d\xi^2} + f(\xi, t) y_{1,k-1} \right] = \varepsilon f(\xi, t) D. \quad (18)$$

Приравнявая коэффициенты при степенях  $\varepsilon$  нулю, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_{1,0}}{d\xi^2} &= 0, \quad \frac{d^2 y_{1,1}}{d\xi^2} = Df(\xi, t) - f(\xi, t)y_{1,0}, \\ \frac{d^2 y_{1,k}}{d\xi^2} &= -f(\xi, t)y_{1,k-1} \quad (k > 1) \end{aligned} \quad (19)$$

Из первого уравнения (19) с учетом условий (16) получаем

$$y_{1,0}(\xi, t) = 0. \quad (20)$$

При  $k = 1$  уравнение (19) с учетом (20) выглядит так

$$\frac{d^2 y_{1,1}}{d\xi^2} = Df(\xi, t). \quad (21)$$

Подставив сюда (15) и дважды интегрируя по  $\xi$ , находим

$$y_{1,1}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(1)} \xi^j, \quad (22)$$

где

$$f_0^{(1)} = f_1^{(1)} = 0, \quad f_j^{(1)} = \frac{f_{j-2}}{(j-1)j} \quad (2 \leq j \leq n+2), \quad f_j^{(1)} = 0 \quad (j > n+2).$$

При  $k = 2$ , используя разложения (15) и (22), получим

$$\frac{d^2 y_{1,2}}{d\xi^2} = -D \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \xi^j \sum_{i=0}^{\infty} f_i^{(1)} \xi^i. \quad (23)$$

Перемножая стоящие в правой части (23) степенные ряды и дважды интегрируя по  $\xi$  с учетом условий (16), приходим к следующему выражению:

$$y_{1,2}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(2)} \xi^j, \quad (24)$$

где

$$f_0^{(2)} = f_1^{(2)} = 0, f_j^{(2)} = \frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(1)} \quad (j \geq 2).$$

Заметим, что достаточно быстрое убывание коэффициентов  $f_j^{(2)}$  с увеличением  $j$  и необходимость вычисления суммы рядов при  $\xi < 1$  на первом участке позволяют ограничиться вычислением небольшого числа коэффициентов ряда (24).

Совершенно аналогично поступаем и при  $k > 2$ . В результате получаем рекуррентные соотношения

$$f_0^{(k)} = f_1^{(k)} = 0, f_j^{(k)} = \frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(k-1)} \quad (k \geq 2, j \geq 2)$$

для коэффициентов разложений

$$y_{1,k}(\xi, t) = D \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(k)} \xi^j \quad (k = 2, 3, \dots) . \quad (25)$$

Ввиду существенной малости  $\varepsilon$  для практических задач можно ограничиться и небольшим числом членов в разложении (17). Таким образом, можно считать, что частное решение  $y_1(\xi, \varepsilon, t)$  задачи Коши для уравнения (11) с учетом условий (16) построено. Из (22), (24) и (25) следует, что оно может быть представлено в следующем виде:

$$y_1(\xi, t) = D Z_1(\xi, t), \quad (26)$$

где  $Z_1(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{1,k}(\xi, t) \varepsilon^k$ ,  $Z_{1,k}(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j^{(k)} \xi^j$ .

Переходим ко второму (некорродированному) участку. Дифференциальное уравнение (9) после подстановки  $\xi = x/l$  будет выглядеть так

$$\frac{d^2 y_2}{d\xi^2} + k_2^2 y_2 = k_2^2 D, \quad (27)$$

где  $k_2 = l \sqrt{\frac{P}{EJ_2}}$ ,  $J_2 = \frac{d_1 d_2^3}{12}$ ,  $D = y_2(1)$ . Общее решение этого уравнения

$$y_2(\xi, t) = C_1 \cos k_2 \xi + C_2 \sin k_2 \xi + D \quad (28)$$

( $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, зависящие от параметров  $t$  и  $P$ ).

Для нахождения этих постоянных используем третье и четвертое условия (10)

$$y_2(\lambda_1(t), t) = y_1(\lambda_1(t), \varepsilon, t), \quad y_2'(\lambda_1(t), t) = y_1'(\lambda_1(t), \varepsilon, t) \quad (29)$$

(штрих означает производную по  $\xi$ ,  $\lambda_1(t) = l_1(t)/l$ ).

Из (29) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \cos k_2 \lambda_1(t) + C_2 \sin k_2 \lambda_1(t) &= D[Z_1(\lambda_1(t), t) - 1] \\ k_2[-C_1 \sin_2 \lambda_1(t) + C_2 \cos k_2 \lambda_1(t)] &= DZ_1'(\lambda_1(t), t) \end{aligned} \quad (30)$$

решая которую находим

$$C_1 = \frac{D}{k_2} F_1(P, t), \quad C_2 = \frac{D}{k_2} F_2(P, t),$$

где

$$\begin{aligned} F_1(P, t) &= [Z_1(\lambda_1(t), t) - 1]k_2 \cos k_2 \lambda_1(t) - Z_1'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_1(t), \\ F_2(P, t) &= [Z_1(\lambda_1(t), t) - 1]k_2 \sin k_2 \lambda_1(t) + Z_1'(\lambda_1(t), t) \cos k_2 \lambda_1(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Подставив полученные выражения в (28), будем иметь

$$y_2(\xi, t) = \frac{D}{k_2} [F_1(P, t) \cos k_2 \xi + F_2(P, t) \sin k_2 \xi], \quad (32)$$

Напомним, что

$$D = y_2(1, t). \quad (33)$$

Подставив сюда (32), будем иметь

$$D[F_1(P,t)\cos k_2 + F_2(P,t)\sin k_2 - 1] = 0,$$

и поскольку  $D \neq 0$ , то

$$F_1(P,t)\cos k_2 + F_2(P,t)\sin k_2 - 1 = 0. \quad (34)$$

Это и есть уравнение критических сил.

Переходим к определению прогибов колонны под действием продольной силы  $P$ . Сделаем в уравнении (6) подстановку  $\xi = x/l$ . В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \varepsilon f(\xi, t)y_1 = \varepsilon Df(\xi, t) - \varepsilon g(\xi, t). \quad (35)$$

Здесь  $g(\xi, t) = \frac{6h(\xi, t)}{d_1[d_2 - h(\xi, t)]^3}$ . Как и функцию  $f(\xi, t)$ , аппроксимируем функцию  $g(\xi, t)$  на отрезке  $0 \leq \xi \leq \lambda_1(t)$  интерполяционным многочленом Лежандра. В результате получаем

$$g(\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t)\xi^j, \quad (36)$$

где  $g_j(t) = \sum_{i=0}^n g(\xi_i, t) \frac{b_{i,j}}{\omega_i(\xi_i)}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ),  $g_j(t) = 0$  ( $j > n$ ).

Как и выше будем искать решение  $y_{1,u}(\xi, t)$  задачи Коши для уравнения (35) при начальных условиях (16) в виде разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$y_{1,u}(\xi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_{1,u,k}(\xi, t). \quad (37)$$

Действуя аналогично изложенному выше, получаем

$$\begin{aligned} y_{1,u,0}(\xi, t) = 0, \quad y_{1,u,k}(\xi, t) &= DZ_1^{(k)}(\xi, t) + Z_2^{(k)}(\xi, t), \\ Z_2^{(2)}(\xi, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} g_j^{(k)}(t)\xi^j, \end{aligned} \quad (38)$$



где

$$g_0^{(1)} = g_1^{(1)} = 0, g_j^{(1)} = \frac{g_{j-2}}{(j-1)j} \quad (2 \leq j \leq n+2), g_j^{(1)} = 0 \quad (j > n+2),$$

$$g_0^{(k)} = g_1^{(k)} = 0, g_j^{(k)} = -\frac{1}{(j-1)j} \sum_{m=0}^{j-2} f_m f_{j-m-2}^{(k-1)} \quad (k \geq 2, j \geq 2).$$

Искомое решение может быть записано в следующем виде:

$$y_{1,u}(\xi, t) = DZ_1(\xi, t) + Z_2(\xi, t), \quad (39)$$

где  $Z_2(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k Z_2^{(k)}(\xi, t).$

Переходим ко второму участку. Как и выше для нахождения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  в (28) используем условия (29). В результате получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \cos k_2 \lambda_1(t) + C_2 \sin k_2 \lambda_1(t) &= y_{1,u}(\lambda_1(t), t) - D \\ k_2 [-C_3 \sin \lambda_1(t) + C_4 \cos k_2 \lambda_1(t)] &= y_{1,u}'(\lambda_1(t), t) \end{aligned} \quad (40)$$

(штрих означает производную по  $\xi$ ), решая которую находим

$$C_1 = \frac{1}{k_2} F_3(P, t), \quad C_2 = \frac{1}{k_2} F_4(P, t),$$

где

$$\begin{aligned} F_3(P, t) &= [y_{1,u}(\lambda_1(t), t) - D] k_2 \cos k_2 \lambda_1(t) - y_{1,u}'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_1(t), \\ F_4(P, t) &= [y_{1,u}(\lambda_1(t), t) - D] k_2 \sin k_2 \lambda_1(t) + y_{1,u}'(\lambda_1(t), t) \cos k_2 \lambda_1(t). \end{aligned} \quad (41)$$

Подставив полученные выражения в (28), будем иметь

$$y_2(\xi, t) = \frac{1}{k_2} [F_3(P, t) \cos k_2 \xi + F_4(P, t) \sin k_2 \xi] + D.$$

Используем теперь равенство (33), из которого с использованием (39) и (41) получаем

$$D = -\frac{Z_2(\lambda_1(t), t) k_2 \cos k_2 \lambda_2(t) + Z_2'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_2(t)}{[Z_1(\lambda_1(t), t) - 1] k_2 \cos k_2 \lambda_2(t) + Z_1'(\lambda_1(t), t) \sin k_2 \lambda_2(t)}.$$

**Пример.** Исследуем на устойчивость бетонную колонну, подверженную коррозии, при следующих значениях параметров:  $l =$

$16\text{м}$ ,  $d_1 = 0,5\text{м}$ ,  $d_2 = 0,4\text{м}$ ,  $E = 27 \cdot 10^3 \text{МПа}$ ,  $h_0 = 0,08\text{м}$ ,  $\beta = 7,5 \text{ лет}$ ,  $\nu_0 = 0,1 \text{ м/год}$ .

Критическая сила для неповрежденной коррозией колонны

$$P_{кр, \max} = \frac{\pi^2 EJ_2}{4l^2} = 694 \text{ кН}.$$

Используя изложенный выше алгоритм, определяем значения критической силы  $P_{кр}$  для ряда значений  $t$  в пределах от 0 до 150 лет. График изменения  $P_{кр}$  в зависимости от  $t$  представлен на рис.3 ( $P_{кр}$  - в кН,  $t$  - в годах). На рис.4 показаны деформированные положения оси колонны при  $t = 100$  лет и разных значениях продольной сжимающей силы: график 1 соответствует  $P = 0,8P_{кр}$ , график 2 –  $P = 0,9P_{кр}$ , график 3 –  $P = 0,97P_{кр}$ . Заметно резкое нарастание прогибов при приближении  $P$  к  $P_{кр}$ .

### **Вывод.**

Предложен метод, позволяющий проводить исследование устойчивости бетонных жестко заземленных в основании колонн при несимметричном агрессивном воздействии окружающей среды, что необходимо для своевременного их усиления для обеспечения надежности конструкции.

### **Summary**

The method for investigation of stability of concrete columns with taking into account nonsymmetrical aggressive environmental impact is offered, what allows their on-time strengthening to secure the reliability of constructions.

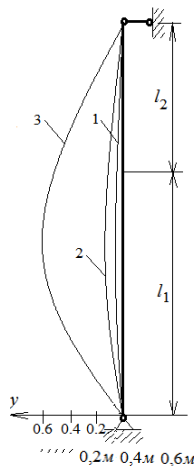
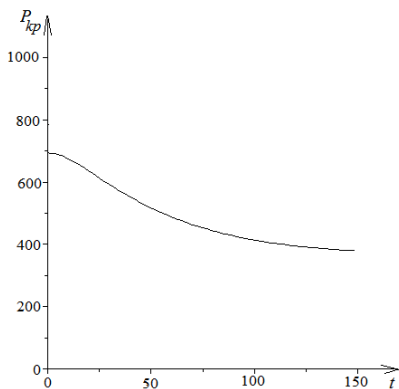


Рис. 3

Рис. 4

1. Сетков В.Ю., Шибанова И.С., Рысева О.П. Действие углекислого газа на железобетонные балки и плиты промышленных зданий и сооружений // Строительство и архитектура, №12, 1984. - с. 1 - 4.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. - М.: Физматгиз, 1962. - 464 с.

