УДК 624.073.046.3

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ, ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПО ЗАКОНУ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Крутий Ю.С., *профессор, кандидат физико-математических наук*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса

1. Постановка научной проблемы и ее значение. Задача отыскания критических нагрузок для упругих сжатых стержней с переменной жесткостью является одной из актуальных проблем строительной механики и строительных конструкций. Особого внимания заслуживают стержни с непрерывно изменяющейся жесткостью. Такие стержни часто применяются в самолетостроении, мостостроении, при строительстве телевизионных башен, дымовых труб, опор линий электропередач и т.п. Расчет на устойчивость подобного рода объектов имеет важное практическое значение.

При эйлеровой форме потери устойчивости критическую силу определяют из дифференциального уравнения изогнутой оси стержня [1]

$$(E(x)I(x)y''(x))'' + Ny''(x) = 0. \tag{1}$$

где $E(x)I(x)$ – переменная поперечная жесткость стержня в точке x (жесткость на изгиб); $E(x)$ – модуль упругости материала стержня; $I(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня; N – постоянная сжимающая нагрузка; $y(x)$ – неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение (прогиб) сечения стержня в точке x (рис. 1).

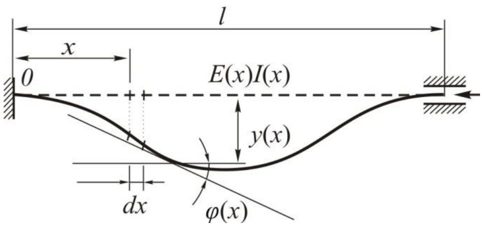

Рис. 1

Ранее автором было найдено точное решение уравнения (1) в случае произвольной непрерывной поперечной жесткости [2]. В данной статье, опираясь на указанное решение, исследуется устойчивость равновесия центрально-сжатого стержня, жесткость которого изменяется по закону четвертой степени. Определение спектра критических сил и других параметров устойчивости для такого стержня является актуальной научной и практической проблемой.

2. Анализ исследований по данной проблеме. Фундаментальные исследования проблемы устойчивости стержней выполнены многими известными учеными, среди которых следует отметить работы Л. Эйлера, Е. Ламарля, Л. Тетмайера, И. Баушингера, Т. Кармана, М. Консидера, Ф. Энгессера, Ф.С. Ясинского, А.Н. Динника, С.П. Тимошенко, А.С. Вольмира, П.Ф. Попковича, Н.С. Стрелецкого, А.Р. Ржаницына, Н.В. Карнаухова, Б.Г. Галеркина, И..Г. Бубнова, Ф.Р.Шенли,А.Ф. Смирнова, В.В. Болотина, В.Д. Потапова, Б.Я. Лащенникова, М.Д. Корчака, Л.М. Каган-Розенцвейга, Н.Н. Шапошникова, Ю.Б. Гольдштейна,А.М. Иващенко и др.

Множество работ посвящено устойчивости стержней переменной жесткости [3-15]. Решения в большинстве этих публикаций основаны на различных приближенных методах, что объясняется трудностями, возникающими при попытке интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Несмотря на то, что точное решение всегда обладает несомненным преимуществом, исследования проблемы устойчивости, основанные на точных решениях дифференциального уравнения изогнутой оси стержня, в научной литературе встречаются крайне редко [16].

3. Цель и задачи статьи. Главная цель данной работы – определить спектр критических сил для упругого однородного центрально-сжатого стержня, концы которого заделаны (рис. 1), а момент инерции изменяется по закону четвертой степени

$$I(x) = I_0 \left(1 - (1-\alpha)\frac{x}{l} \right)^4 ,$$

где I_0 – момент инерции поперечного сечения стержня в точке $x = 0$;

$\alpha-$ константа, удовлетворяющая условию $0 < \alpha \le 1$.

Также ставится задача – выписать в явном виде формулы для искривленных форм равновесия стержня.

4. Результаты исследования. К параметрам, которые полностью характеризуют напряженно-деформированное состояние стержня, относятся перемещение $y(x)$, угол поворота $\varphi(x)$, изгибающий момент $M(x)$ и поперечная сила $Q(x)$. Уточним, что под поперечной силой здесь понимаем силу, перпендикулярную недеформированной оси стержня.

Основополагающими формулами в данной статье будут представления для параметров состояния стержня из упомянутой выше работы автора [2]. Прежде чем выписать эти представления заметим, что в силу однородности стержня $E(x) = E = const$. Также введем обозначение $u = 1 - (1-\alpha)\frac{x}{l}$. Тогда применительно к данному случаю, указанные формулы в безразмерном формате принимают вид:

$$y(x) = y(0) + \varphi(0) l X_2(x) - M(0)\frac{1}{N}\left(1 - X_1(x)\right) - Q(0)\frac{l}{N}\left(\frac{x}{l} - X_2(x)\right); \qquad (2)$$

$$\varphi(x) = \varphi(0)\tilde{X}_2(x) + M(0)\frac{1}{Nl}\tilde{X}_1(x) - Q(0)\frac{1}{N}\left(1 - \tilde{X}_2(x)\right); \qquad (3)$$

$$M(x) = \varphi(0) N l X_2(x) + M(0) X_1(x) + Q(0) l X_2(x); \qquad (4)$$

$$Q(x) = Q(0); \qquad (5)$$

$$X_n(x) = \alpha_{n,0}(x) - K\alpha_{n,1}(x) + K^2\alpha_{n,2}(x) - K^3\alpha_{n,3}(x) + \cdots (n = 1,2); \qquad (6)$$

$$\alpha_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1}, \ \alpha_{n,k}(x) = \frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^4}\alpha_{n,k-1}(x)\,dxdx \ (k = 1,2,3,...); \qquad (7)$$

$$N = K\frac{EI_0}{l^2}. \qquad (8)$$

Здесь $X_n(x), \tilde{X}_n(x) = lX_n'(x)\ (n=1,2)$ – безразмерные функции, а K – безразмерный коэффициент колебаний, подлежащий определению.

Воспользовавшись специально выведенной формулой

$$\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^3}\left(\frac{x}{u}\right)^i dxdx = \frac{1}{(i+1)(i+2)}u\left(\frac{x}{u}\right)^{i+2} \quad (i=1,2,3,\ldots)\,, \tag{9}$$

интегралы (7) можно вычислить в явном виде. Доказательство этой формулы оставляем за рамками изложения. Укажем только на один из возможных вариантов такого доказательства. Дифференцируя дважды обе части формулы (9), придем к тождеству. Это будет означать, что левая часть формулы равна правой с точностью до произвольного многочлена первой степени. Однако, учитывая тот факт, что обе эти части вместе со своими первыми производными обращаются в ноль, когда $x=0$, заключаем, что указанный многочлен есть тождественный ноль.

Вначале непосредственным двукратным интегрированием получаем

$$\alpha_{1,1}(x) = \frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^4}\alpha_{1,0}(x)dxdx = u\left(\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{lu}\right)^2 + \frac{1-\alpha}{3!}\left(\frac{x}{lu}\right)^3\right).$$

Далее, пользуясь формулой (9), последовательно находим:

$$\alpha_{1,k}(x) = \frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^4}\alpha_{1,k-1}(x)dxdx = u\left(\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{x}{lu}\right)^{2k} + \frac{1-\alpha}{(2k+1)!}\left(\frac{x}{lu}\right)^{2k+1}\right)$$

$$(k=2,3,4,\ldots);$$

$$\alpha_{2,k}(x) = \frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^4}\alpha_{2,k-1}(x)dxdx = \frac{1}{(2k+1)!}u\left(\frac{x}{lu}\right)^{2k+1} \quad (k=1,2,3,\ldots).$$

Согласно формуле (6) теперь будем иметь:

$$\begin{aligned} X_1(x) &= u\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k K^k\left(\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{x}{lu}\right)^{2k} + \frac{1-\alpha}{(2k+1)!}\left(\frac{x}{lu}\right)^{2k+1}\right) = \\ &= u\left(\cos\sqrt{K}\,\frac{x}{lu} + \frac{1-\alpha}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\,\frac{x}{lu}\right); \end{aligned} \tag{10}$$

$$X_2(x) = u\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}K^k\left(\frac{x}{lu}\right)^{2k+1} = \frac{u}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\,\frac{x}{lu}\,. \tag{11}$$

По известным функциям $X_n(x)\ (n=1,2)$ находим:

$$\tilde{X}_1(x) = (1-\alpha)^2 \frac{x}{lu}\cos\sqrt{K}\frac{x}{lu} - \left(\frac{(1-\alpha)^2}{\sqrt{K}} + \frac{\sqrt{K}}{u}\right)\sin\sqrt{K}\frac{x}{lu}; \tag{12}$$

$$\tilde{X}_2(x,K) = \frac{1}{u}\cos\sqrt{K}\frac{x}{lu} - \frac{1-\alpha}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\frac{x}{lu}. \tag{13}$$

Случаю обоих заделанных концов соответствуют граничные условия: $y(0)=0;\ \varphi(0)=0;\ y(l)=0;\ \varphi(l)=0$. Реализация этих условий с помощью формул (2), (3) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} (1-X_1(l))M(0) + l(1-X_2(l))Q(0) = 0; \\ \dfrac{\tilde{X}_1(l)}{l}M(0) - (1-\tilde{X}_2(l))Q(0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Для нетривиальной совместности системы ее определить должен равняться нулю. Отсюда, учитывая равенства (10) - (13), приходим к характеристическому уравнению

$$2 - 2\cos\frac{\sqrt{K}}{\alpha} - \frac{\sqrt{K}}{\alpha}\sin\frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0.$$

После элементарных тригонометрических преобразований, данное уравнение оказывается равносильным совокупности двух уравнений:

$$\sin\frac{\sqrt{K}}{2\alpha} = 0; \tag{15}$$

$$\sin\frac{\sqrt{K}}{2\alpha} - \frac{\sqrt{K}}{2\alpha}\cos\frac{\sqrt{K}}{2\alpha} = 0. \tag{16}$$

Множество коэффициентов устойчивости получим, когда объединим корни каждого из этих уравнений в единое множество и упорядочим их по возрастанию. Как показывают вычисления, в указанном упорядоченном множестве на местах с нечетными номерами располагаются корни уравнения (15), а на местах с четными номерами находятся корни уравнения (16).

Поскольку уравнение (15) является элементарным, то коэффициенты устойчивости с нечетными номерами определяются точно: $K_1 = (2\alpha\pi)^2$, $K_3 = (4\alpha\pi)^2, \ldots$. Следовательно, по формуле (8) точно определяются и критические силы с нечетными индексами

$$N_1 = (2\alpha\pi)^2\frac{EI_0}{l^2},\ N_3 = (4\alpha\pi)^2\frac{EI_0}{l^2}, \ldots.$$

Для отыскания коэффициентов устойчивости с четными номерами $K_2, K_4, \ldots$ служит трансцендентное уравнение (16).

Отыскать корни такого уравнения не составляет труда. Для этого существует множество различных программных возможностей. Ограничимся здесь только корнем K_2. Его значения, соответствующие каждому значению α с шагом 0,1 приведены в табл. 1.

Таблица 1

α	K_2
0,1	0,80763
0,2	3,23052
0,3	7,26866
0,4	12,9221
0,5	20,1907
0,6	29,0746
0,7	39,5738
0,8	51,6883
0,9	65,4179
1	80,7629

Вполне понятно, что и для любых других значений α можно отыскать коэффициенты устойчивости. Чтобы при этом можно было обходиться без решения характеристического уравнения, возникает идея выразить найденную табличную зависимость между параметрами K и α аналитически.

Рассматривая коэффициент устойчивости K как функцию переменной α, а также имея множество значений этой функции, соответствующих значениям независимой переменной $0 < \alpha \le 1$, аппроксимируем функцию K многочленом. В результате получаем $K_2 = 0,0001\alpha + 80,7626\alpha^2 + 0,0002\alpha^3$. При этом степень многочлена выбиралась из условия, что коэффициент детерминации не должен быть меньше, чем 0,9999. Следовательно,

$$N_2 = (0,0001\alpha + 80,7626\alpha^2 + 0,0002\alpha^3)\frac{EI_0}{l^2}.$$

Осталось выписать формулы для искривленных форм равновесия стержня. С этой целью формулу для перемещений (2) преобразуем к виду

$$y(x) = -\frac{M(0)}{N}\left[1 - u\left(\cos\sqrt{K}\,\frac{x}{lu} + \frac{1-\alpha}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\,\frac{x}{lu}\right) - \eta\left(\frac{x}{l} - \frac{u}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\,\frac{x}{lu}\right)\right], \tag{17}$$

где $\eta = -\dfrac{Q(0)\,l}{M(0)}$ – безразмерный параметр, подлежащий определению.

Из уравнений системы (14) находим

$$\eta=\frac{1-X_1(l)}{1-X_2(l)}=-\frac{\tilde X_1(l)}{1-\tilde X_2(l)}=\frac{1-\alpha\left(\cos\frac{\sqrt{K}}{\alpha}+\frac{1-\alpha}{\sqrt{K}}\sin\frac{\sqrt{K}}{\alpha}\right)}{1-\frac{\alpha}{\sqrt{K}}\sin\frac{\sqrt{K}}{\alpha}}.$$

После преобразований приходим к формуле

$$\eta=\frac{1+tg^2\frac{\sqrt{K}}{2\alpha}-\alpha\left(1-tg^2\frac{\sqrt{K}}{2\alpha}+\frac{2(1-\alpha)}{\sqrt{K}}tg\frac{\sqrt{K}}{2\alpha}\right)}{1+tg^2\frac{\sqrt{K}}{2\alpha}-\frac{2\alpha}{\sqrt{K}}tg\frac{\sqrt{K}}{2\alpha}}. \qquad (18)$$

Если $K-$ корень уравнения (15), то $tg\frac{\sqrt{K}}{2\alpha}=0$, а если $K-$ корень уравнения (16), то $tg\frac{\sqrt{K}}{2\alpha}=\frac{\sqrt{K}}{2\alpha}$. Подставляя найденные значения тангенсов в формулу (18), находим, что для коэффициентов устойчивости с нечетными индексами $\eta=1-\alpha$, а для коэффициентов устойчивости с четными индексами $\eta=1+\alpha$.

Для искривленных форм равновесия примем представление

$$y_j(x)=C_j\,Y_j\left(\frac{x}{l}\right)(j=1,2,3,...),$$

где C_j – постоянный размерный множитель; $Y_j\left(\frac{x}{l}\right)-$ безразмерная функция, определяющая закон искривленной формы равновесия.

Тогда на основании формулы (17) получаем:

$$C_j=-\frac{M_j(0)l^2}{EI_0}\ (j=1,2,3,...);$$

$$Y_j\left(\frac{x}{l}\right)=\begin{cases}\frac{u}{((j+1)\alpha\pi)^2}\left(1-\cos\,(j+1)\alpha\pi\frac{x}{lu}\right)\ (j=1,3,...);\\ \frac{1}{K_j}\left(1-(1+\alpha)\frac{x}{l}-u\left(\cos\sqrt{K_j}\frac{x}{lu}-\frac{2\alpha}{\sqrt{K_j}}\sin\sqrt{K_j}\frac{x}{lu}\right)\right)\ (j=2,4,...).\end{cases}$$

При необходимости на основании представлений (3) - (5) легко выписать формулы для других параметров состояния стержня, соответствующие нашему случаю.

5. Выводы и перспективы дальнейших исследований. Основываясь на ранее полученных автором представлениях для параметров состояния стержня с произвольной непрерывной изгибной жесткостью, решена задача устойчивости для семейства стержней, жесткость которых изменяется по закону четвертой степени. Определен спектр критических сил и выписаны формулы для искривленных форм равновесия.

Представляются перспективными следующие направления деятельности:

- внедрение результатов данной работы в практику расчетов на устойчивость реальных объектов;
- применение общих формул для параметров состояния к исследованию устойчивости стержней с другими встречающимися на практике законами изменения поперечной жесткости.

Summary

Based on the exact solution of the differential equation of balance, the problem of stability for a set of the central squeezed cores which rigidity changes under the law of the fourth degree is investigated. The range of critical forces is determined and laws of the corresponding bent forms of balance of cores are written out.

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Издательство «Наука», 1967. – 984 с.
2. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости (продолжение) // Строительная механика и расчет сооружений. №2, 2011. – с. 27-33.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.:«Машиностроение», 1978. – 312 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под редакцией Биргера И.А., Пановко Я.Г. т.3. – М.: «Машиностроение», 1968. – 576 с.
5. Динник А.Н. Продольный изгиб. Кручение. – М.: Издательство академии наук СССР, 1955. – 392 с.
6. Динник А.Н. О продольном изгибе стержней переменного сечения // Изв. Донск. Полит. ин-та. №1, 1913, с. 390-404.
7. Динник А.Н. О расчете сжатых стоек переменного сечения // Вестн. инж. №1, 2, 1929.
8. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

9. Приходько В.Е. Исследование продольно-сжатых стержней переменной жесткости // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 2(66).– Х., 2011, с. 35 – 41.

10. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.

11. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

12. Bazant, Z, P. and Cedolin, L. *Stability of Structures* - New York: Oxford University Press, 1991.

13. Brush, D.O. and Almroth, B. O. *Buckling of Bars, Plates and Shells* - New York: Mc Graw-Hill, 1975.

14. Seide, P. Axisym metrical buck ling of circular cones under axial compression // Jornal of Applied Mechanics, 23, 1956, p. 625-628.

15. Timoshenko. S. P. and Gere, J. M. *Theory of Elastic Stability* - New York: McGraw-Hill, 1961.

16. Wang C.M., Wang C.Y., Reddy J.N. Exact solutions for buck ling of structural members. – Boca Raton, Florida, USA: CRC Press LLC (CRC series in computational mechanic san dap plied analysis), 2005. – 286 p.