УДК 691.328:539.4

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ИСЛЕДОВАНИЮ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА

Клованич С.Ф. (*Одесский национальный морской университет*), **Безушко Д.И.** (*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*), *г. Одесса*

Предлагается методика численного эксперимента по исследованию механических характеристик бетона при сложном напряженном состоянии, которая позволяет осуществить тестирование известных моделей деформирования и, при необходимости, осуществить их корректировку.

1. Введение. Расчет железобетонных конструкций методом конечных элементов требует решения системы нелинейных алгебраических уравнений

$$[K(\{q\})]\cdot\{q\}=\{P\}, \tag{1}$$

где $\{P\}$ - вектор внешней нагрузки; $\{q\}$ - вектор узловых перемещений; $[K(\{q\})]$ - нелинейная матрица жесткости системы.

Система (1) решается итерационным путем т.к. вектор неизвестных $\{q\}$ является аргументом функции жесткости $[K(\{q\})]$. Указанное обстоятельство накладывает определенные требования к форме нелинейных физических соотношений для бетона, а именно связь между напряжениями и деформациями должна иметь вид

$$\{\sigma\}=[D(\{\varepsilon\})]\cdot\{\varepsilon\}, \tag{2}$$

где $\{\sigma\}$ - вектор напряжений, $\{\varepsilon\}$ - вектор деформаций, $[D(\{\varepsilon\})]$ - нелинейная матрица механических характеристик материала.

Между уравнениями (1) и (2), несмотря на их различную физическую природу, соблюдается методологическое единство, а процесс вычисления деформаций при заданных напряжениях также требует использования итерационных процедур для системы уравнений вида

$$\{F\}=\{\sigma\}-[D(\{\varepsilon\})]\{\varepsilon\}=0. \tag{3}$$

Реализация итерационного алгоритма для уравнения (3) позволяет создать своеобразную «компьютерную лабораторию» по исследованию прочностных и деформационных характеристик бетона при сложном напряженном состоянии с использованием той или иной модели деформирования, провести тестирования новой модели на стадии разработки и уточнения, без привлечения достаточно сложного и громоздкого аппарата метода конечных элементов.

Итерационная последовательность для решения системы (3) может быть записана в виде стандартной рекурентной формулы

$$\{\varepsilon\}^{i+1} = \{\varepsilon\}^{i} + \left[D^{i}\right]^{-1} \{F\}^{i}, \tag{4}$$

где под матрицей $\left[D^{i}\right]$ будем понимать матрицу секущих модулей, $\{\varepsilon\}^{i}$ - вектор деформаций на i-ой итерации.

2. Общая формулировка деформационной теории пластичности бетона. Как правило теория пластичности формулируется в октаэдрических осях в виде связи между октаэдрическими напряжениями $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$;

$$\tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{yz}}^2 + {\tau_{xz}}^2)}$$

и деформациями $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$;

$$\gamma_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}({\gamma_{xy}}^2 + {\gamma_{yz}}^2 + {\gamma_{xz}}^2)}$$

При этом используются следующие гипотезы [2]: материал считается однородным и изотропным; связь между октаэдрическими напряжениями τ_0 и сдвигами γ_0 нелинейна $\tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0$ [9], где $G(\gamma_0)$ - секущий модуль сдвига; связь между октаэдрическими нормальными напряжениями σ_0 и деформациями ε_0, также нелинейна и имеет вид $\sigma_0 = K(\gamma_0)(\varepsilon_0 - \rho\gamma_0^2)$, где второе слагаемое обусловлено дилатацией, а ρ – модуль дилатации [2], $K(\gamma_0)$ - модуль объемных деформаций.

Для определения секущих модулей, также как и в [2], используется гипотеза, подобная гипотезе о «единой кривой деформирования» [3], согласно которой форма связи между напряжениями и деформации не зависит от вида напряженного состояния, т.е. связь между γ_0 и τ_0 может быть принята такой же, как и при одноосном сжатии. Применив для диаграммы деформирования материала зависимость, предложенную, например, в [6] можно получить выражения для определения секущего модуля в виде $G(\gamma_0) = G_0 \cdot f(\gamma_0)$, где

$$f(\gamma_0) = \frac{1}{1 + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3}, \tag{5}$$

где $C = \lambda \dfrac{1-\xi_r}{\xi_r(\eta_r - 1)^2} - \dfrac{1}{\eta_r}$, $B = 1 - 2C$, $A = C + \lambda - 2$, $\xi_r = \dfrac{\sigma_r}{R} \approx 0.85$

и $\eta_r = \dfrac{\gamma}{\gamma_r} \approx 1.41$, $\eta = \dfrac{\gamma_0}{\gamma_0}$; $G_0 = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ - начальный модуль сдвига, E- начальный модуль упругости, μ - коэффициент поперечных деформаций.

Аналогично определяется и модуль объемных деформаций $K(\gamma_0) = K_0 \cdot f(\gamma_0)$, где $K_0 = \dfrac{E}{1-2\mu}$ – начальный модуль. График функции $f(\gamma_0)$ представлен на рис.1.

3. Прочность. В функцию нелинейности $f(\gamma_0)$ входят предельные характеристики прочности $\bar{\tau}_0$ и деформативности $\bar{\gamma}_0$ материала. В свою очередь, эти параметры зависят от вида напряженного состояния и могут быть определены с использованием условий прочности бетона. При этом условие прочности бетона должно описывать выпуклую и гладкую поверхность, симметричную относительно диагонали пространства главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Ее построение осуществляется, как правило, в местной цилиндрической системе координат z, ρ, θ, где

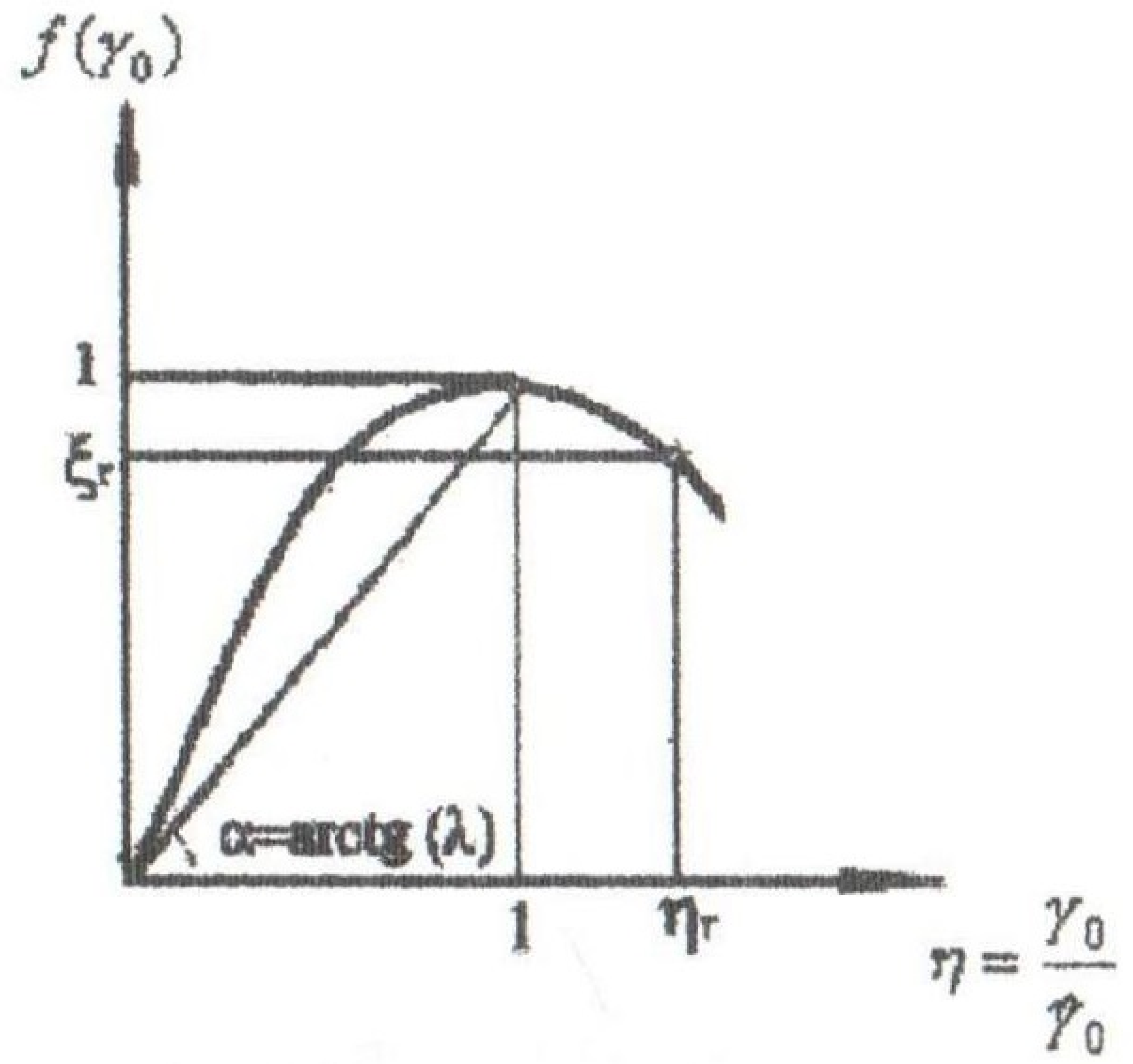


Рис.1. *Диаграмма деформирования бетона при одноосном сжатии*

$z = \sqrt{3}\sigma_0$; $\rho = \sqrt{3}\tau_0$; $\theta = \dfrac{1}{3} arccos\left(\sqrt{2}\dfrac{I_3}{\tau_0^3}\right)$, θ - угол вида напряженного состояния; I_3 – третий инвариант девиатора напряжений

$$I_3 = \begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_0) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_0) & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_y - \sigma_0) \end{vmatrix}.$$

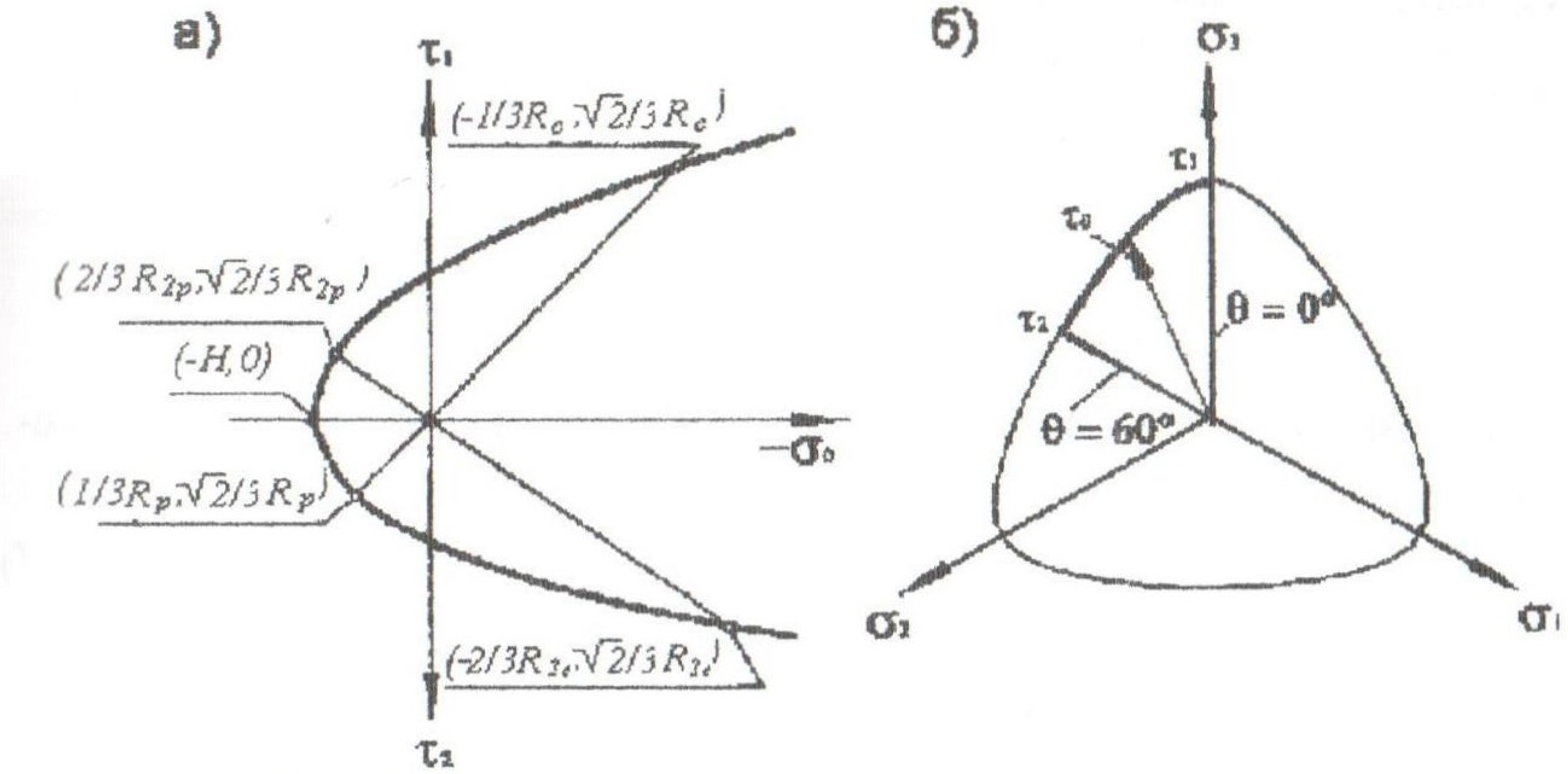


Рис. 2 *Характерные сечения поверхности прочности*

Другими словами, эта поверхность описывается уравнением вида $f(\sigma_0,\tau_0,,\theta)=0$, которое обычно строится на базе опытных данных при частных видах напряженных состояний способом, предложенным М.М. Филоненко-Бородичем [1]. Сначала формулируются две кривые $\tau_1(\sigma_0)$ и $\tau_2(\sigma_0)$, соответствующие экстремальным значениям $\theta=60^\circ$ и $\theta=0^\circ$. Затем осуществляется интерполяция для значений угла θ, находящихся между двумя предельными случаями. Характерные сечения поверхности представлены на рис. 2.

Графики функций $\tau_1(\sigma_0)$ и $\tau_2(\sigma_0)$ (рис.2,а) имеют ряд характерных точек. Так, кривая $\tau_1(\sigma_0)$ пересекает ось σ_3 в точке, соответствующей пределу прочности при одноосном сжатии - R_c, плоскость $\sigma_1-0-\sigma_2$ в точке, соответствующей пределу прочности при равномерном двухосном растяжении - R_{2p}. Кривая $\tau_2(\sigma_0)$ пересекает плоскость $\sigma_2-0-\sigma_3$ в точке, соответствующей пределу прочности при двухосном сжатии - R_{2c} и ось σ_1 в точке одноосного растяжения R_p.

Координаты перечисленных точек показаны на рис. 2,а. Кроме того, обе кривые пересекаются в точке с координатами *(-H,0)*, соответствующей трехосному равномерному растяжению.

Зависимость между σ_0 и τ_1, при $\theta=60^\circ$ может быть аппроксимирована следующим выражением

$$\sigma_0 = A_1\tau_1^2 + B_1\tau_1 + C_1, \tag{6}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 находятся подстановкой координат характерных точек и равны

$$A_1 = \frac{9}{2}\cdot\frac{R_cR_{2p} - H(R_c - R_{2p})}{R_cR_{2p}(R_c - R_{2p})};$$

$$B_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(R_c^2 - R_{2p}^2)H - R_cR_{2p}(\frac{2}{3}R_c + \frac{1}{3}R_{2p})}{R_cR_{2p}(R_c - R_{2p})};\ \ C_1 = -H\ .$$

Для зависимости между σ_0 и τ_2, при $\theta=0^\circ$ рекомендуется выражение аналогичное (6)

$$\sigma_0 = A_2\tau_2^2 + B_2\tau_2 + C_2 \tag{7}$$

где соответствующие коэффициенты

$$A_2 = \frac{9}{2}\cdot\frac{R_{2c}R_p - H(R_{2c} - R_p)}{R_{2c}R_p(R_{2c} - R_p)};$$

$$B_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(R_{2c}^2 - R_p^2)H - R_{2c}R_p(\frac{1}{3}R_{2c} + \frac{2}{3}R_p)}{R_{2c}R_p(R_{2c} - R_p)};\ C_1 = -H\ .$$

Таким образом получены две кривые, характеризирующие прочность при двух значениях $\theta=0^\circ$ и $\theta=60^\circ$. Для построения окончательной поверхности рассмотрим девиаторное сечение (рис.2,б). Как известно, данное сечение должно иметь форму криволинейного треугольника, для которого известны только два радиуса τ_1 и τ_2, что соответствует значениям угла вида напряженного состояния $\theta=0^o$ и $\theta=60^\circ$. Величина τ_0, соответствующая промежуточным значениям $0^\circ<\theta<60^\circ$, может быть найдена интерполяцией между двумя граничными случаями. При этом интерполяционная функция должна отвечать следующим условиям

$$\begin{cases} \tau_0 = \tau_1, \dfrac{\partial\tau_0}{\partial\theta} = 0 & при\,\theta = 0^0 \\ \tau_0 = \tau_2, \dfrac{\partial\tau_0}{\partial\theta} = 0 & при\,\theta = 60^0 \end{cases} \tag{8}$$

быть непрерывной и выпуклой.

В качестве интерполяционной функции примем следующие выражение [2]

$$\rho(\theta)=\frac{2a\cos\theta+b\sqrt{a(4\cos^2\theta-1)+b^2}}{4a\cos^2\theta+b^2}, \tag{9}$$

где $a=1-c^2$; $b=2c-1$, $c=\frac{\tau_2}{\tau_1}$. Тогда окончательное выражение для τ_0 в интервале $0°<\theta<60°$, будет иметь вид

$$\tau_0=\tau_1(\sigma_0)\rho(\theta) \tag{10}$$

Теперь, учитывая (6) и (10), можно получить

$$\sigma_0=\frac{A_1}{\rho^2}\tau_0^2+\frac{B_1}{\rho}\tau_0+C_1 \tag{11}$$

Анализируя приведенные выражения, можно сделать вывод, что в общем случае для однозначного описания функции прочности требуется пять независимых параметров прочности материала. Эти параметры соответствуют частным случаям напряженного состояния: прочность бетона при одноосном сжатии и растяжении R_c и R_p, прочность при двухосном сжатии и растяжении R_{2c} и R_{2p}, и прочность при трехосном равномерном растяжении H, и могут быть получены экспериментальным путем.

Значение прочности τ_0 в формуле (5) определяем с помощью уравнения (10), решая систему

$$\begin{cases}\tau_0-\tau_m=m(\sigma_0-\sigma_m);\\ \sigma_0=\mathrm{A}\ \tau_0^2+\mathrm{B}\ \tau_0+\mathrm{C},\end{cases} \tag{12}$$

где σ_m и τ_m - напряжения на предшествующей ступени нагружения. В случае простого пропорционального нагружения $\sigma_m=\tau_m=0$.

Предельные деформаций γ_0 в формуле (5) при сложном напряженном состоянии по рекомендациям [2] определяются пропорционально соответствующим значениям прочности т.е. $\gamma_0=\lambda\frac{\tau_0}{G_0}$, где $\lambda=1.5\div2$ – параметр нелинейности.

Таким образом, построена единая модель прочности и деформативности бетона при сложном напряженном состоянии.

4. Тестирование модели. Проведем тестирование модели деформирования бетона с использованием итерационной последовательности (4) и опытных данных [4]. Предварительно, учтем, что $E' = \dfrac{3K(\gamma_0)G(\gamma_0)}{G(\gamma_0)+K(\gamma_0)}$; $\mu' = \dfrac{K_p - 2G_p}{2(G_p + K_p)}$, где E' и μ' – секущее значения модуля деформаций и коэффициента поперечных деформаций. Матрицу $[D(\{\varepsilon\})]$ построим с помощью E' и μ', как для изотропного материала, с использованием хорошо известных правил. Тестирование предложенной модели проведем с использованием «компьютерной лаборатории» описанной ранее. В качестве критерия достоверности теории приимем результаты экспериментальных исследований бетона при трехосном напряженном состоянии А.В.Яшина [4].

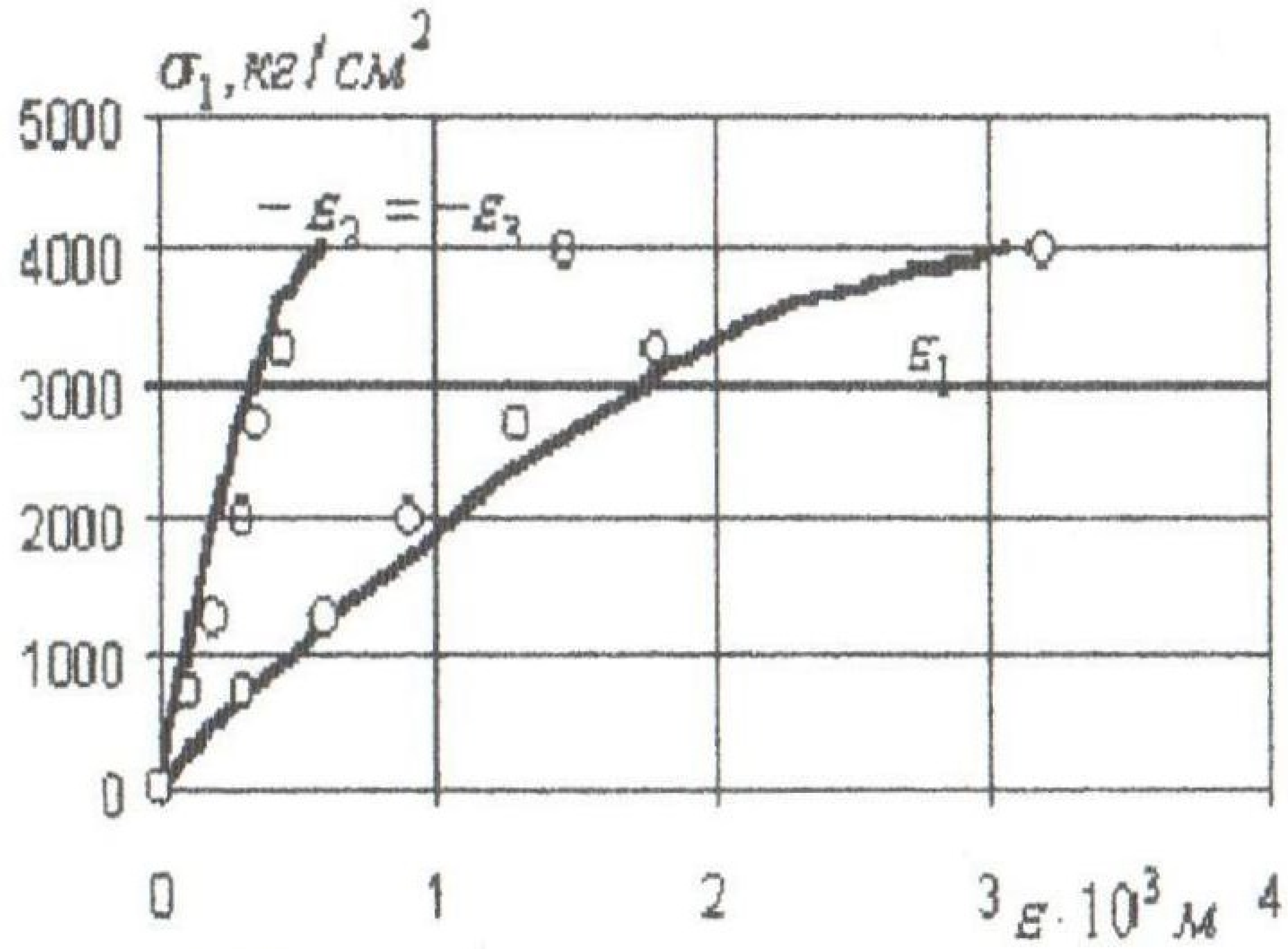
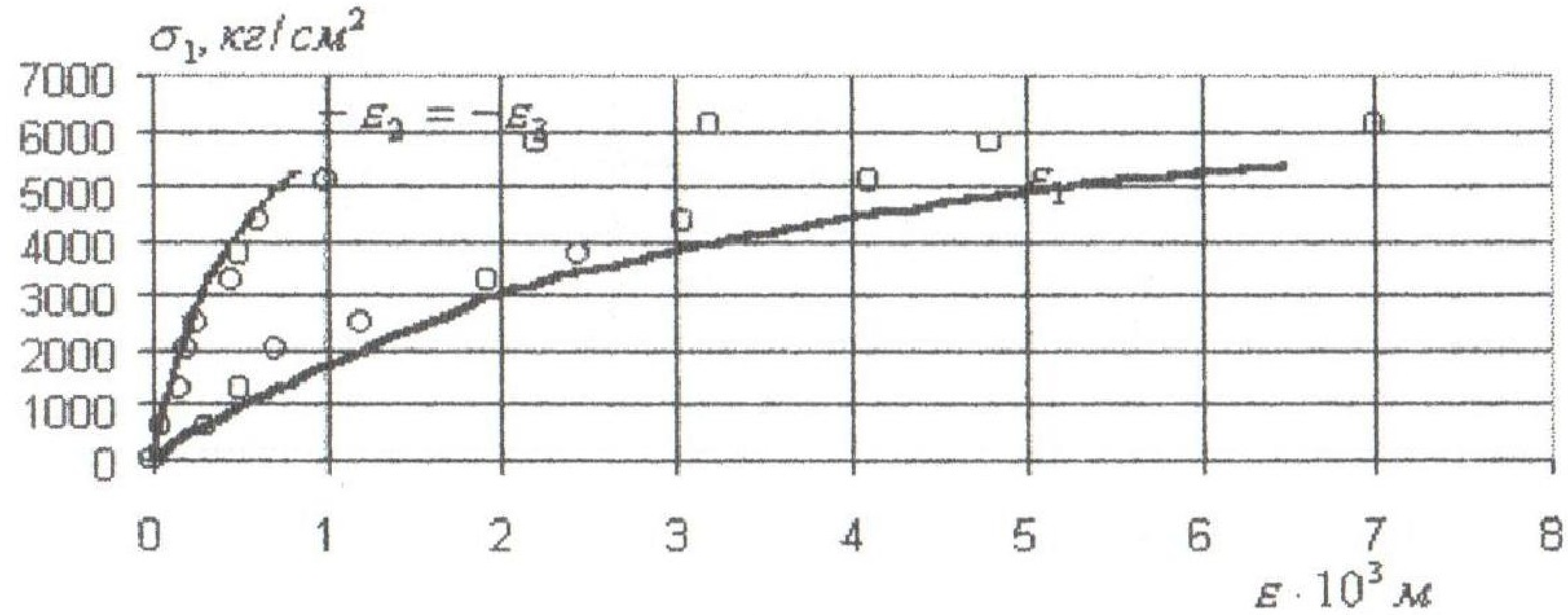


Рис. 3 *Напряжения-деформации тяжелого крупнозернистого бетона при* $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0.01 : 0.01$

В процессе численного эксперимента установлено, что между предельными напряжениями τ_0 и деформациями γ_0 отсутствует линейная зависимость. Рекомендуется следующее выражение для функции $\gamma_0(\tau_0)$

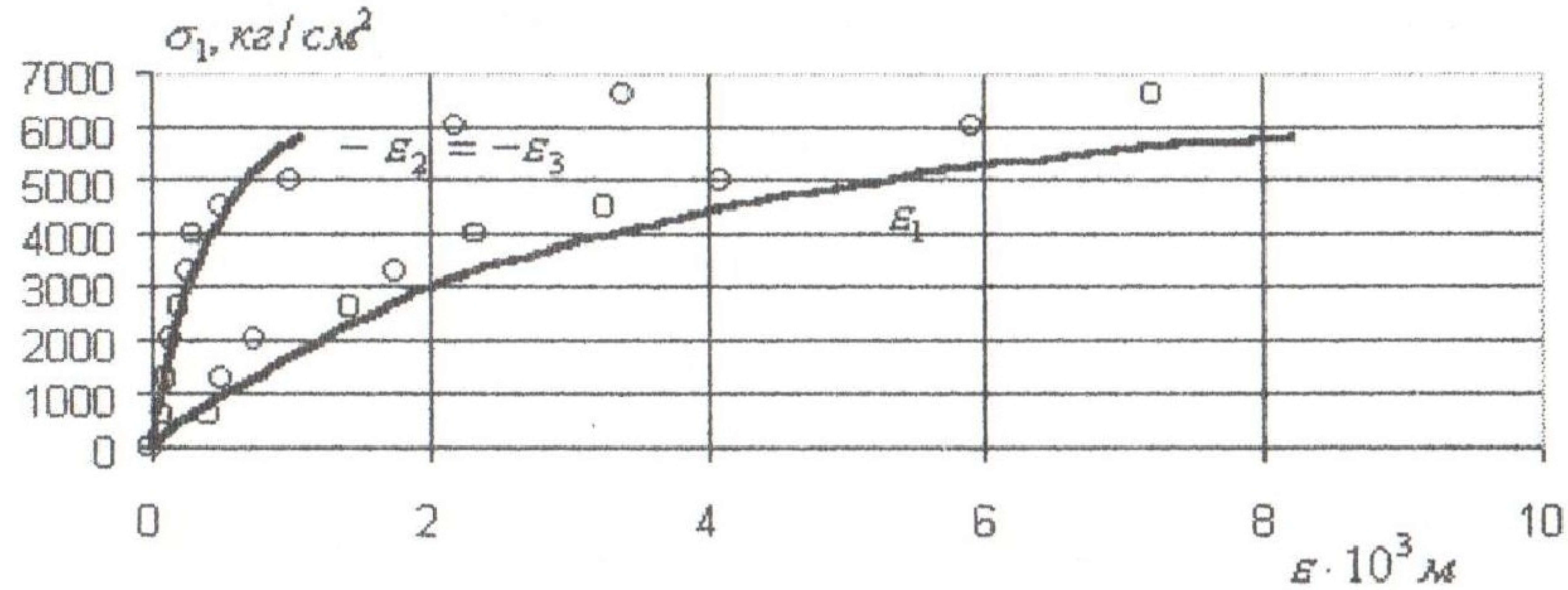
$$\gamma_0 = 0{,}003\left(\frac{\tau_0}{\sigma_0}\right)^{-3.72} \qquad (13)$$

Учитывая это обстоятельство, приведем окончательные значения деформаций при трехосном напряженном состоянии и различных соотношениях главных напряжений (рис.5-9) Результаты получены на тяжелом крупнозернистом бетоне с характеристиками аналогичными [4]: R_b=3600кг/см^2; E_b=2670000тс/м^{2}Проведем анализ данных полученных по результатам численного эксперимента, и сравним их с данными натурных экспериментов, заимствованных из [4].



— численный эксперимент △ ○ экспериментальные данные из [4]

Рис. 4 *Напряжения-деформации тяжелого крупнозернистого бетона при* $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0.08 : 0.08$



— численный эксперимент △ ○ экспериментальные данные из [4]

Рис. 5 *Напряжения-деформации тяжелого крупнозернистого бетона при* $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0.09 : 0.09$

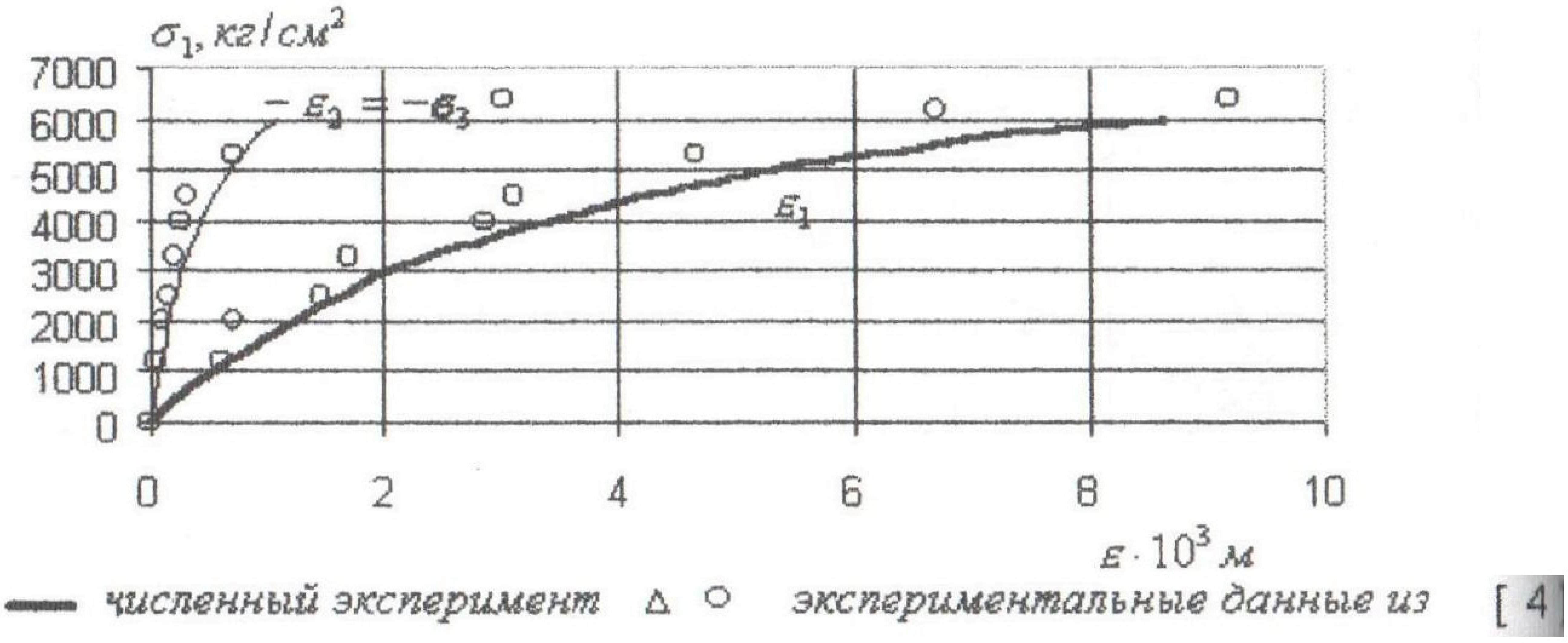


Рис. 6 *Напряжения-деформации тяжелого крупнозернистого бетона при трехосном сжатии* $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 1 : 0.1 : 0.1$

Вывод. Анализ сопоставления результатов расчетов с опытными данными свидетельствует о достаточной надежности предлагаемой модели деформирования бетона при сложном напряженном состоянии.

Литература

1. Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж.Сборник.-1954.-Вып.19.-С.36-48.
2. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. –М.: Стройиздат,1974.-314с.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 376с.
4. Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при неодноосных напряженных состояниях. - М., НИИЖБ Госстроя СССР, 1985.-72с.
5. Лейтес Е.С. Построение модели деформирования бетона на основе теории пластического течения // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987.-№2.-С.36-39.
6. Saennz I.P. Discussion of equation to the stress-strain corver of concrete by P.Desai and S.Krishnan // ACI Journall, Prok.-1964.-v.61.-№9, Sept.-P.1229-1235.
7. Kotsovos M.D. A mathematical description of the strength properties of concrete under generalized stress. // Magazine of Concrete Research.-1979.-Vol.31.-№108, Sept.-P.151-157.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.-М.:Мир, 1975.-272с.
9. Клованич С.Ф. Модель прочности и деформативности бетона и грунта при сложном напряженном состоянии // Строительные конструкции/ Межвед. н-т. сб. –вып.58.-Киев:НИИСК, 2003.-С.136-140.