

## ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПОЛОГОЙ АРКИ ПРИ РАВНОМЕРНО-РАСПРЕДЕЛЕННОМ НАГРУЖЕНИИ

Коломийчук Г.П., Фролова А.С. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса, Украина)

Разработана математическая модель, описывающая поведение железобетонной пологой круговой арки под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки. С ростом нагрузки возможны стадии работы материала арки: упругая; упругопластическая в бетоне; трещины в бетоне.

В пологих арочных конструкциях при вертикальном нагружении возникает внецентренное сжатие. Характер разрушения таких конструкций зависит от соотношения между изгибающим моментом и продольной силой.

Выделяя элемент единичной длины из арки [1] и учитывая его пологость [2], после некоторых преобразований уравнения равновесия запишем так:

$$\frac{dN}{dx} + \frac{dM}{dx} \frac{1}{R} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{N}{R} - q = 0 \quad (2)$$

Геометрические соотношения с учетом нелинейной составляющей:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (3)$$

$$\kappa = - \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4)$$

Физические соотношения с учетом изменения свойств материала при нагружении:

$$\begin{vmatrix} \kappa \\ \varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & \bar{B} \\ \tilde{C} & C \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M \\ N \end{vmatrix} \quad (5)$$

В уравнениях (1) - (5):  $N$  - продольная сила;  $M$  - изгибающий момент;  $R$  - радиус срединной поверхности арки;  $q$  - равномерно распределенная нагрузка;  $\varepsilon$  - деформация срединной поверхности;  $u, w$  - перемещения;  $K$  - кривизна;  $B, \tilde{B}, C, \tilde{C}$  - жесткости.

Податливости арки при упругой работе определим по формулам:

$$B = \frac{6(w_1 + w_2)}{E_b h^3 b \nu_M w_1 w_2} \quad (6)$$

$$C = \frac{1}{E_b \nu_N h b}, \quad (7)$$

$$\tilde{B} = \tilde{C} = 0$$

где:  $E_b$  - начальный модуль упругости бетона;  $\nu_N, \nu_M$  - коэффициенты, учитывающие нелинейность деформаций бетона при действии соответственно продольной силы и изгибающего момента;  $w_1, w_2$  - коэффициенты полноты эпюры напряжений в бетоне;  $h, b$  - высота и ширина сечения арки.

Для определения переменных параметров физических соотношений рассмотрим элемент арки[3]:

- сплошной;
- с трещиной в бетоне нижней зоны;
- с трещиной в бетоне верхней зоны.

Упругая стадия справедлива при выполнении условия:

$$M_r \leq 0,5M_{crc}, \quad (8)$$

где:  $M_r$  - ядровый момент,  $M_r = \pm M + Nr$ ;  $r$  - расстояние от центра тяжести приведенного сечения до ядровой точки, наиболее удаленной от растянутой зоны, трещинообразование которой проверяется,

$$r = \frac{W_{red}}{A_{red}}; \quad M_{crc} - \text{момент трещинообразования.}$$

Если  $M_r > 0,5M_{crc}$  и  $M_r \leq M_{crc}$ , то возникли пластические деформации в бетоне нижней растянутой зоны. Физические соотношения претерпевают изменения посредством учета коэффициента пластических деформаций  $\nu_b$ :

$$\nu_b = 1 - 0,4 \left[ \frac{|M_r| - 0,5M_{crc}}{M_{crc}} \right] \quad (9)$$

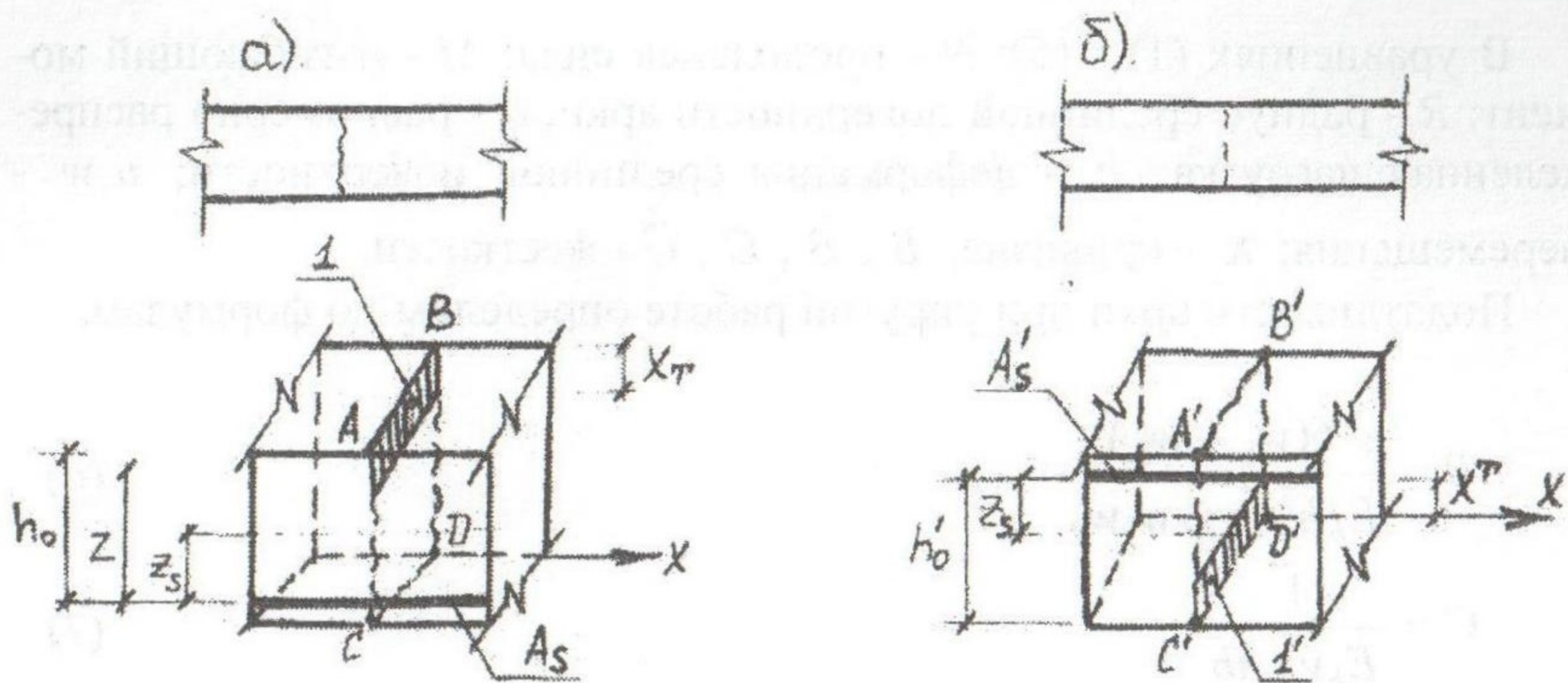


Рис.1. Схемы трещин : а) трещина в нижней зоне сечения (при  $M_r > M_{crc}$ ); б) трещина в верхней зоне сечения (при  $-M_r > M_{crc}$ ); 1-сжатая зона над трещиной; 1' - то же, под трещиной.

Если выполняется условие  $M_r > M_{crc}$  то возникла трещина в нижней растянутой зоне бетона арки (рис.1а). Податливости вычислим рассматривая элементарный прямоугольник арки:

$$B = \frac{d}{x} \left( 1 - \frac{1}{h_0} - \frac{1}{\xi} \right) \quad (10)$$

$$\bar{B} = \frac{z_s d}{x} \left( \frac{1}{\xi} - 1 + \frac{1}{h_0} \right) \quad (11)$$

$$\bar{C} = \frac{d}{x h_0} \left( 0,5h - z_s - \frac{0,5h}{\xi} \right) \quad (12)$$

$$C = \frac{z_s d}{x h_0} \left( \frac{0,5h}{\xi} - 0,5h + z_s \right), \quad (13)$$

где:  $d = \frac{\varphi_b}{z E_b \nu_b b}$ ;  $\varphi_b$  - коэффициент В.М.Мурашева;  $z_s$  - расстояние

между растянутой арматурой и осью арки;  $z$  - расстояние между растянутой арматурой и серединой высоты сжатой зоны бетона над трещиной.

При  $M_r^* > M_{crc}$  возникла трещина в верхней зоне бетона арки (рис.1б). Тогда податливости определяются по формулам:

$$B = \frac{d}{x} \left( 1 + \frac{1}{h_0} + \frac{1}{\xi} \right) \quad (14)$$

$$\bar{B} = \frac{z_s d}{x} \left( \frac{1}{\xi} + 1 - \frac{1}{h_0} \right) \quad (15)$$

$$\bar{C} = \frac{d}{x h_0} \left( 0,5h + z_s + \frac{0,5h}{\xi} \right) \quad (16)$$

$$C = \frac{z_s d}{x h_0} \left( \frac{0,5h}{\xi} + 0,5h - z_s \right) \quad (17)$$

Жесткости через податливости вычислим так:

$$[D] = [B]^{-1} \quad (18)$$

Разрешающие алгебраические уравнения получим применив к уравнениям (1) - (5) численный метод конечных разностей, заменой всех дифференциальных операторов конечноразностными.

Для этого на арке нанесем конечноразностную сетку (рис.2).

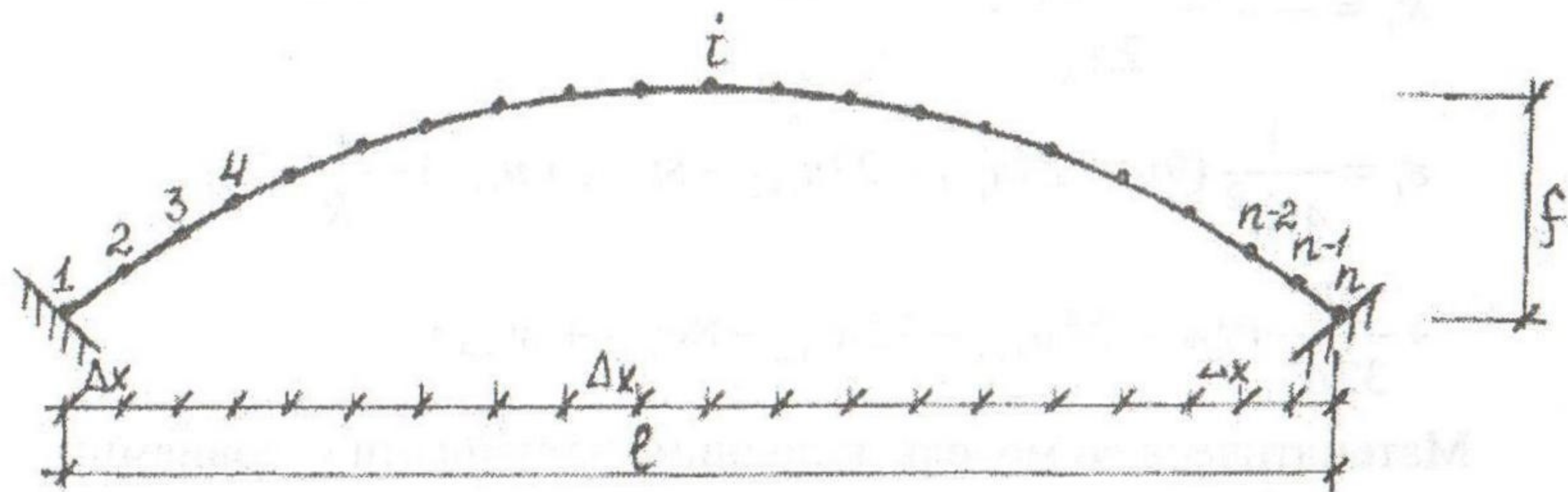


Рис.2 Арка с нанесенной конечно-разностной сеткой:

$l$  - пролет арки;  $f$  - подъемистость арки;  $i$  - произвольный узел.

Для произвольного узла в диапазоне  $2 < i < n-1$  система разрешающих уравнений имеет вид:

$$\frac{1}{2\Delta_x} (N_{i+1} - N_{i-1}) + \frac{1}{2R\Delta_x} (M_{i+1} - M_{i-1}) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{\Delta_x^2} (M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}) - \frac{N_i}{R} - q_i = 0$$

$$N_i = D^{21}_i \varepsilon_i + D^{22}_i \kappa_i$$

$$M_i = D^{11}_i \varepsilon_i + D^{12}_i \kappa_i$$

$$(19) \quad \kappa_i = -\frac{1}{\Delta_x^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1})$$

$$(20) \quad \varepsilon_i = \frac{1}{2\Delta_x} (u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{w_i}{R} + \frac{1}{4\Delta_x^2} (w_{i+1} - w_{i-1})^2$$

Для контурных узлов 1, 2, n-1, n конечно-разностные аналоги деформации, кривизны и уравнений равновесия запишем в односторонних разностях в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\Delta_x^2} (9N_i - 24N_{i+1} + 22N_{i+2} - 8N_{i+3} + N_{i+4}) + \\ & + \frac{1}{4\Delta_x^2 R} (9M_i - 24M_{i+1} + 22M_{i+2} - 8M_{i+3} + M_{i+4}) = 0 \\ & \frac{-3M_i + 4M_{i+1} - M_{i+2}}{2\Delta_x} - \frac{N_i}{R} - q_i = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\kappa_i = \frac{-3w_i + 4w_{i+1} - w_{i+2}}{2\Delta_x}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = & \frac{1}{4\Delta_x^2} (9u_i - 24u_{i+1} + 22u_{i+2} - 8u_{i+3} + u_{i+4}) + \frac{w_i}{R} + \\ & + \frac{1}{32\Delta_x^4} (9w_i - 24w_{i+1} + 22w_{i+2} - 8w_{i+3} + w_{i+4})^2 \end{aligned}$$

Математическую модель дополним граничными условиями:

- для бесшарнирной арки:

$$u_1 = w_1 = \frac{dw}{dx} = 0 \quad u_n = w_n = \frac{dw}{dx} = 0 \quad (21)$$

- для двухшарнирной арки:

$$u_1 = w_1 = M_1 = 0, \quad u_n = w_n = M_n = 0 \quad (22)$$

Для решения системы уравнений (19) (20) применен шагово-итерационный метод последовательных приближений, предложенный в работе [4]. В начале принимаем нагрузку, соответствующую упругой работе арки. Для первой итерации следующего шага нагрузки по упру-

гому полю жесткостей вычисляется поле моментов и продольных сил. По этому решению анализируется стадия работы узла арки. В зависимости от стадии работы вычисляется новое поле жесткостей (жесткость снижается на тех участках, где имеются пластические деформации в бетоне и трещины) и по нему снова определяются моменты и продольные силы. Если новые  $M$  и  $N$  будут отличаться от предыдущих на величину, меньшую заранее заданной точности, то добавляется следующий шаг по нагрузке и решение выполняется еще раз.

При образовании трещин функции физические соотношения терпят разрыв, это усложняет построение сходящегося вычислительного процесса. В [5] предлагается аппроксимация зависимостей

$$\kappa_i = \kappa(M_i, N_i) \quad (23)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon(M_i, N_i), \quad (24)$$

которая при фиксированном отношении  $\frac{M_i}{N_i} = e_i$  представляет собой ломаные, состоящие из трех линейных участков (рис.3). В процессе вычислений за счет перераспределения усилий  $e_i$  может меняться, в соответствии с чем корректируются координаты характерных точек диаграмм.

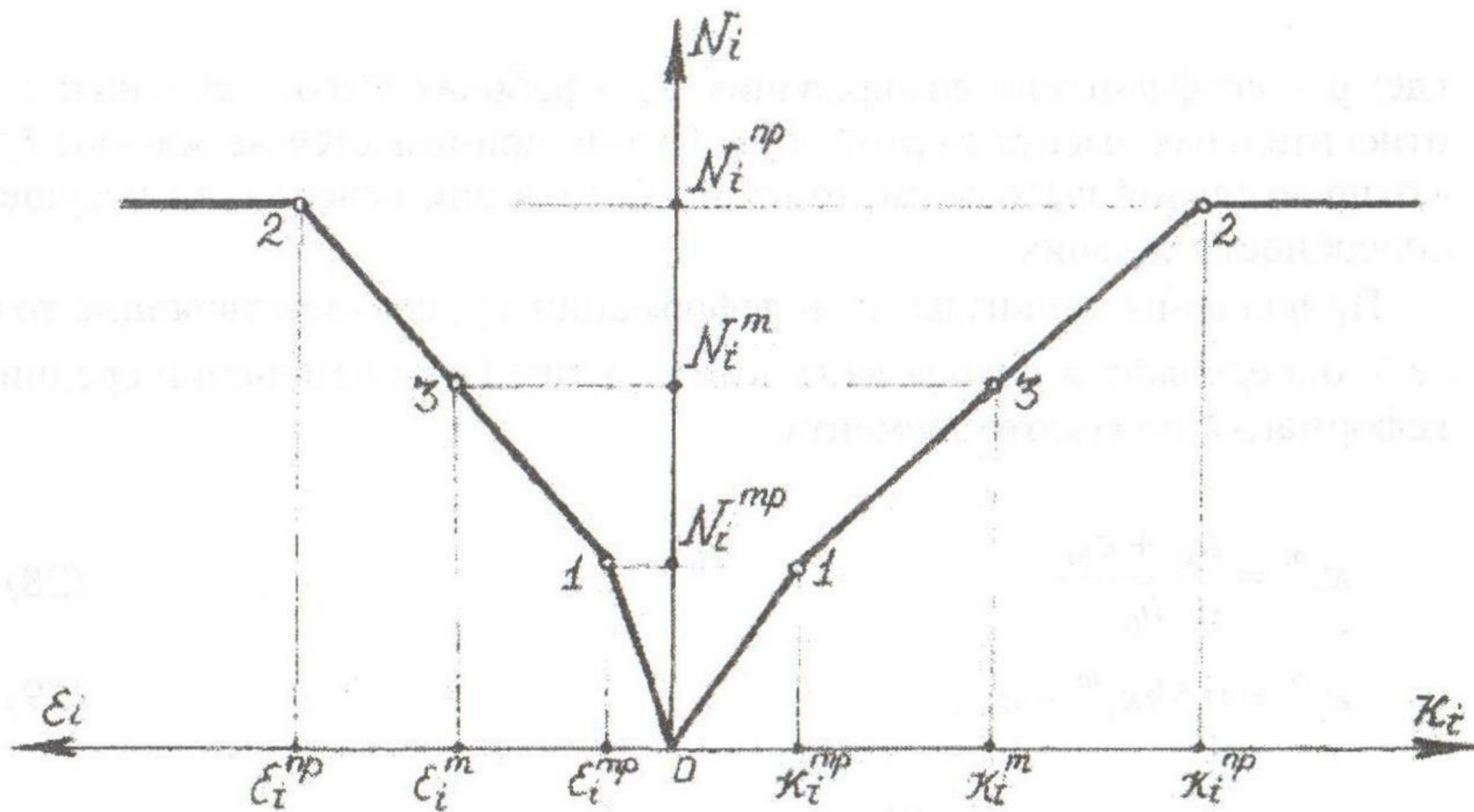


Рис.3. Изменение усилий и деформаций узла конечно-разностной сетки арки при нагружении.

Приращения кривизны и деформации, соответствующие точке 1 вычисляются по формулам:

$$\kappa_i^{mp} = N_i^{mp} e_i \frac{0,85 E_b h^3}{12} \quad (25)$$

$$\varepsilon_i^{mp} = \frac{N_i^{mp}}{0,9 E_b h}, \quad (26)$$

где:  $N_i^{mp}$  - усилие, соответствующее образованию трещин в сечении.

Участок 1-2 описывает работу железобетонного элемента с трещинами.

Точка 2 соответствует исчерпанию несущей способности сечения, когда  $N_i = N_i^{np}$ . Значение  $N_i^{np}$  вычисляется по [6].

Точка 3 соответствует достижению напряжением в растянутой арматуре предела текучести  $\sigma_u$  (на рис.3  $N_i^m$ ). Усилие  $N_i^m$  находим по формуле:

$$N_i^m = \frac{\sigma_u \mu h_0}{1 + \frac{e_i - z_s}{h_0 (1 - 0,5 \xi_i)}}, \quad (27)$$

где:  $\mu$  - коэффициент армирования;  $h_0$  - рабочая высота сечения;  $\xi_i$  - относительная высота сжатой зоны бетона принимается не меньше  $\xi_i^{np}$  - относительной высоты сжатой зоны бетона при исчерпании несущей способности сечения.

Приращения кривизны  $\kappa_i$  и деформации  $\varepsilon_i$ , соответствующие точке 3, определяются исходя из гипотезы о линейном изменении средних деформаций по высоте элемента:

$$\kappa_i^m = \frac{\varepsilon_{si} + \varepsilon_{bi}}{h_0} \quad (28)$$

$$\varepsilon_i^m = 0,5 h \kappa_i^m - \varepsilon_{bi}, \quad (29)$$

где:  $\varepsilon_{si} = \frac{\sigma_{si}}{E_s}$  и  $\varepsilon_{bi} = \frac{\Psi_b \sigma_{bi}}{\nu E_b}$ ,

$\varepsilon_{si}$  и  $\varepsilon_{bi}$  - средние деформации арматуры и бетона на участке между трещинами;  $\sigma_{si}$  и  $\sigma_{bi}$  - напряжения в арматуре и в бетоне в сечении с трещиной;  $E_s$  - модуль упругости арматуры.

Значения  $\kappa_i^{np}$  и  $\varepsilon_i^{np}$  определяются по линейной экстраполяции с использованием значений точек 1 и 3.

При  $N_i = N_i^{np}$  принимается, что приращения кривизн и деформаций могут увеличиваться при неизменном усилии, чему соответствуют горизонтальные участки на диаграммах при  $\kappa_i > \kappa_i^{np}$  и  $\varepsilon_i > \varepsilon_i^{np}$ .

**Вывод.** Получена разрешающая система уравнений и разработан алгоритм расчета пологих круговых арок наиболее полно отражающие их поведение при нагружении.

### **Литература**

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

2. Фролова А.С. Габаритно-конструктивные параметры железобетонных арок (зданий, сооружений и экспериментальных моделей) при нагружении вертикальной нагрузкой // Сб. науч. трудов «Вісник одеської державної академії будівництва та архітектури», вып.22. - Одесса: ОГАСА. - 2006. - с. 264-268.

3. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.

4. Коломийчук Г.П. Методика расчета напряженно-деформированного состояния пологой несовершенной металлической оболочки, локально взаимодействующей с агрессивной средой // Сб. науч. трудов «Современные конструкции из металла и древесины». – Одесса: Внешрекламсервис. – 2003. – С. 143-146.

5. Соломин В.Н., Шматков С.Б. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций. – М.: Стройиздат, 1986. – 208 с.

6. СНиП 2.03.01 - 84. Бетонные и железобетонные конструкции. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985.-79с.