

## КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ, НЕСУЩЕЙ СОСРЕДОТОЧЕННУЮ МАССУ, ПРИ УЧЕТЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Фомин В.М. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса)

В процессе землетрясений амплитуды колебаний строительных конструкций достигают таких значений, что расчет их по линейной теории дает неверные результаты. Поэтому представляется необходимым применение методов теории нелинейных колебаний при их исследовании. В качестве первого приближения при определении деформаций используется геометрически нелинейная теория изгиба.

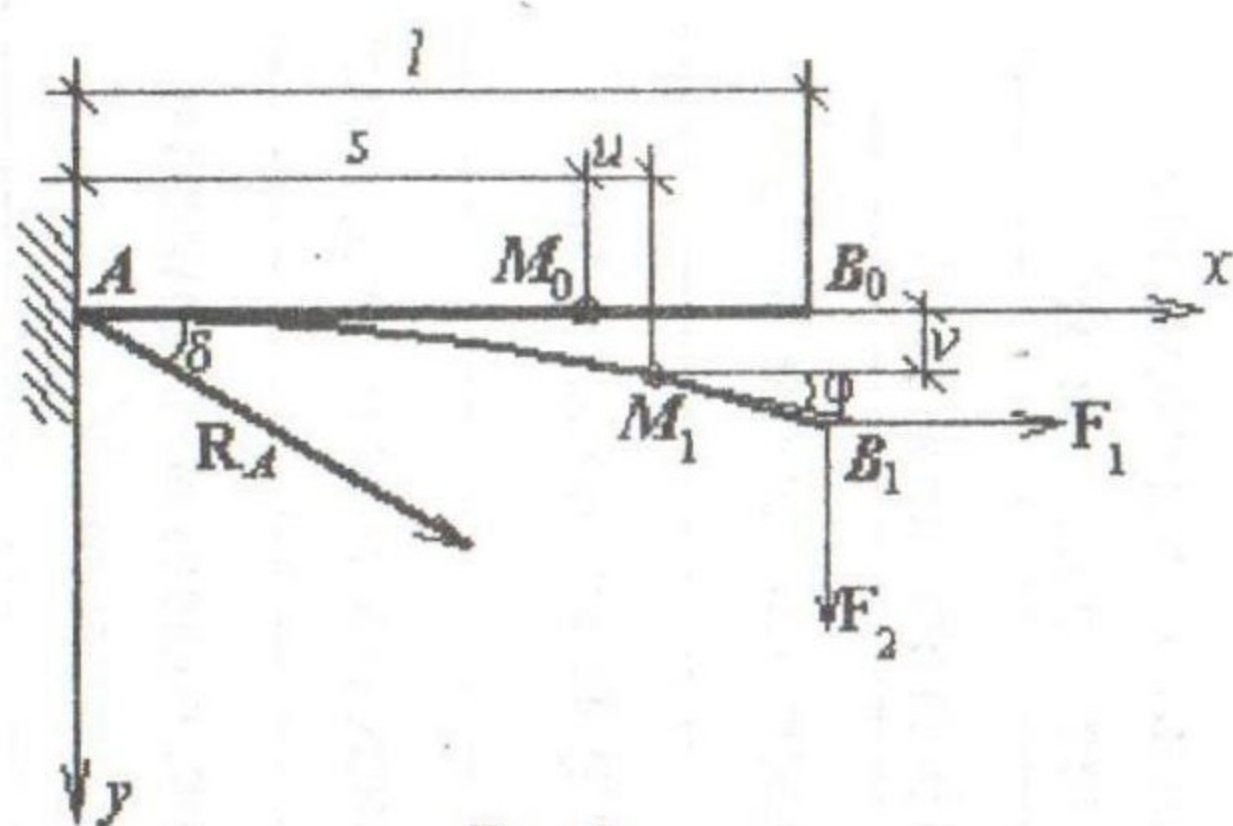


Рис. 1

Рассмотрим консольную балку постоянного поперечного сечения, находящуюся под действием двух сил  $F_1$  и  $F_2$ , приложенных к концу балки (рис.1). Уравнение плоского изгиба балки с учетом геометрической нелинейности имеет следующий вид [1]:

$$H\phi'' + R_A \sin(\phi - \theta) = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\phi$  - угол между касательной к оси балки и осью  $x$ ,  $\theta$  - угол между направлением опорной реакции  $R_A$  и осью  $x$ ,  $\phi'' = d^2\phi / ds^2$  ( $s$  - абсцисса точки оси балки до деформации),  $H$  - жесткость стержня при изгибе. Заметим, что  $s$  является материальной (т.е. остающейся неизменной) координатой точки. Таким образом, точка  $M_0$  и точка  $M_1$  (т.е. точка  $M_0$  после деформации) имеют одну и ту же материальную координату.

Из равновесия балки следует, что  $F_1 = -R_A \cos \theta$ ,  $F_2 = -R_A \sin \theta$ .

Тогда (1) принимает следующий вид:

$$H\phi'' - F_1 \sin \phi + F_2 \cos \phi = 0 \quad (2)$$

Будем считать, что рассматриваемая балка является элементом строительной конструкции, и является сравнительно жесткой. Поэтому

будем считать, что угол  $\phi$  сравнительно невелик, что позволяет представить  $\sin \phi$  и  $\cos \phi$  в следующем виде:

$$\sin \phi = \phi - \phi^3 / 6, \quad \cos \phi = 1 - \phi^2 / 2 \quad (3)$$

Будем искать решение уравнения (2) методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$\phi''_{n+1} = \frac{1}{l^2} (\alpha \phi_n - \frac{\alpha}{6} \phi_n^3 - \beta + \frac{\beta}{2} \phi_n^2) \quad (4)$$

Здесь  $\alpha = F_1 l^2 / H$ ,  $\beta = F_2 l^2 / H$ . Положив  $\phi_0 = 0$ , будем иметь

$$\phi''_1 = -\beta / l^2 \quad (5)$$

Интегрируя дважды по  $s$ , получаем

$$\phi'_1 = -\frac{\beta}{l^2} s + c_0, \quad \phi_1 = -\frac{\beta}{l^2} \frac{s^2}{2} + c_0 s + c_1 \quad (6)$$

( $c_0$  и  $c_1$  постоянные интегрирования).

Из граничных условий

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(l) = 0 \quad (7)$$

(второе следует из равенства  $M_z(l) = 0$  [1]) находим

$$c_1 = 0, \quad c_0 = \beta / l \quad (8)$$

Подставляя  $\phi_1$  с учетом (8) в правую часть (4) и дважды интегрируя по  $s$ , получаем

$$\phi_2 = \sum_{k=0}^8 \Phi_k s^k \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= -\beta / 2l^2, \quad \Phi_3 = \alpha\beta / 6l^3, \quad \Phi_4 = (\beta^3 - \alpha\beta) / 24l^4, \\ \Phi_5 &= -\beta^3 (3 + \alpha) / 120l^5, \quad \Phi_6 = \beta^3 (1 + 2\alpha) / 240l^6, \\ \Phi_7 &= -\alpha\beta^3 / 336l^7, \quad \Phi_8 = \alpha\beta^3 / 2688l^8 \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  определяются из граничных условий (7):

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = -\sum_{k=2}^8 \Phi_k k l^{k-1} \quad (11)$$

Заметим, что величины  $\alpha$  и  $\beta$  малы. Например, если у балки, поперечное сечение которой изображено на рис.2, в опасном сечении максимальные нормальные напряжения достигли  $\sigma_T$ , то при  $F_1 = 0$  получаем  $F_2 = 2\sigma_T J_z / lh$ . Отсюда при  $l = 10$  м для стали Ст3 находим

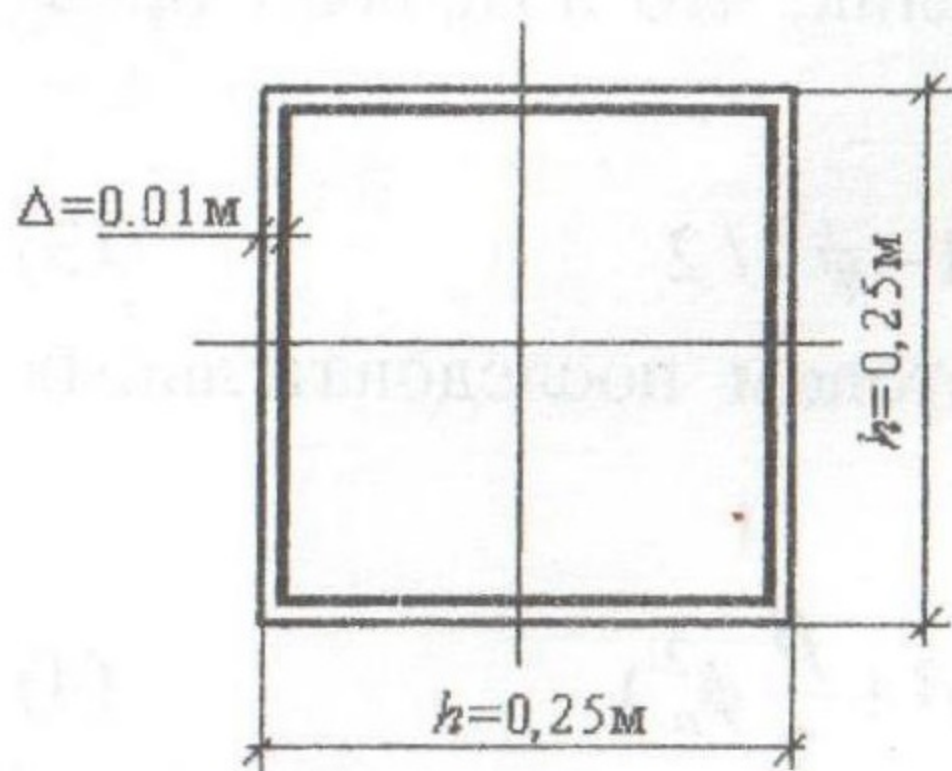


Рис.2

$\beta = F_2 l^2 / EJ_z = 0,1$ . Поэтому, исходя из (10), полагаем  $\Phi_5 = \Phi_6 = \Phi_7 = \Phi_8 = 0$ .

Остановимся на втором приближении и в дальнейшем индекс у  $\phi_2$  будем опускать.

Для  $n$ -ой степени угла  $\phi$  имеем следующие разложения:

$$\phi^n = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{n,m} S^m, \quad \Phi_{n,m} = \sum_{k=0}^m \Phi_{n-1,k} \Phi_{1,m-k}$$

в частности,

$$\Phi_{2,m} = \sum_{k=0}^m \Phi_{1,k} \Phi_{1,m-k}, \quad \Phi_{3,m} = \sum_{k=0}^m \Phi_{2,k} \Phi_{1,m-k} \quad (12)$$

При малых продольных деформациях оси балки имеют место следующие соотношения [2]:

$$v'(s) = \sin \phi, \quad u'(s) = \cos \phi - (1 + \varepsilon_s)^{-1} \quad (13)$$

Здесь  $v(s)$  - вертикальное перемещение точки оси балки,  $u(s)$  - горизонтальное,  $\varepsilon_s$  - относительная продольная деформация отрезка  $[0, s]$  оси балки.

Из (12) и (13) получаем

$$v(s) = \int_0^s \sin \phi(s) ds = \sum_{m=1}^4 (\Phi_{1,m} - \frac{1}{6} \Phi_{3,m}) \frac{s^{m+1}}{m+1} \quad (14)$$

После ряда несложных выкладок находим

$$v(l) = l \frac{5\beta - 2\alpha\beta - \beta^3}{15} \quad (15)$$

Аналогично,

$$u(s) = \int_0^s \cos \phi(s) ds - \int_0^s (1 - \varepsilon_s) ds \quad (16)$$

(здесь учтено, что  $\varepsilon_s \ll 1$ ).

Полагая, что продольная деформация оси стержня подчиняется закону Гука, можем записать, что

$$\varepsilon_s = (F_1 \cos \phi + F_2 \sin \phi) / ES \quad (17)$$

( $E$  - модуль упругости материала балки,  $S$  - площадь поперечного сечения). В числителе формулы (23) стоит сумма проекций сил  $F_1$  и  $F_2$  на направление касательной к оси балки в точке  $M_1$ , т.е. продольная сила.

Из (16) и (17) получаем

$$\begin{aligned} u(l) &= w + \delta[\alpha(l+w) + \beta v(l)] \\ w &= l\beta^2(-24 + 13\alpha)/360, \quad \delta = J_z / Sl^2 \end{aligned} \quad (18)$$

( $S$  – площадь поперечного сечения балки).

Введем обозначения

$$\xi = u(l)/l, \quad \eta = v(l)/l, \quad \zeta = w/l \quad (19)$$

Заметим, что величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $\delta$  безразмерны. Кроме того,  $\delta \ll 1$ . Для балки с поперечным сечением, приведенным на рис.2,  $S = 0,0096 \text{ м}^2$ ,  $J_z = 9,232 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ ,  $H = 1,846 \cdot 10^7 \text{ Нм}^2$ ,  $\delta = 9,617 \cdot 10^{-5}$ .

Тогда (15) и (18) запишутся так

$$\begin{aligned} \xi &= \zeta + \delta[\alpha(1 + \zeta) + \beta\eta], \quad \zeta = \beta^2(13\alpha - 24)/360 \\ \eta &= \beta(5 - 2\alpha - \beta^2)/15 \end{aligned} \quad (20)$$

Проблема теперь состоит в том, чтобы обратить функции (20), т.е. выразить  $\alpha$  и  $\beta$  через  $\xi$  и  $\eta$ . Попробуем выразить  $\beta$  из последнего равенства (20) через  $\alpha$  и  $\eta$ . Пользуясь тем, что  $\beta^3 \ll \beta$ , применяем следующую схему метода последовательных приближений:

$$\beta_{n+1} = \frac{15}{5 - 2\alpha} \left( \eta + \frac{\beta_n^3}{15} \right) \quad (21)$$

Положим  $\beta_0 = 0$ . Тогда  $\beta_1 = 3\eta / (1 - 0,4\alpha)$ . Подставив это в правую часть (21), будем иметь

$$\beta_2 = \frac{3}{1 - 0,4\alpha} \left[ \eta + \frac{9\eta^3}{5(1 - 0,4\alpha)^3} \right] \quad (22)$$

Остановимся на этом шаге и в дальнейшем индекс 2 у  $\beta$  не будем указывать. Возведем (22) в квадрат, затем подставим полученное в первые два равенства (20). Учитывая, что  $\alpha^k \ll 1$  ( $k > 2$ ),  $\eta^4 \ll 1$ , получаем

$$\alpha = \frac{\xi + 0,6\eta^2 + (1,6\xi + 0,678\eta^2)\alpha^2}{2\xi + 1,045\eta^2 + \delta} \quad (23)$$

Для получения удобного аналитического выражения  $\alpha$  можно воспользоваться методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\xi + 0,6\eta^2 + \frac{1}{2}(1,6\xi + 0,678\eta^2)\alpha_n^2}{2\xi + 1,045\eta^2 + \delta} \quad (24)$$

Множитель  $\frac{1}{2}$  поставлен перед скобкой для ускорения сходимости процесса. Полагая  $\alpha_0 = 0$ , получаем

$$\alpha_1 = \frac{\xi + 0,6\eta^2}{2\xi + 1,045\eta^2 + \delta}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{(1,6\xi + 0,678\eta^2)\alpha_1^2}{2(2\xi + 1,045\eta^2 + \delta)} \quad (25)$$

Заметим, что формулы (22) и (25) достаточно хорошо обращают функции (20). Действительно, зададим значения  $\alpha = 0,25$ ;  $\beta = 0,2$ ;  $\delta = 9,617 \cdot 10^{-5}$ . Из (20) получаем  $\xi = -2,279 \cdot 10^{-3}$ ,  $\eta = 0,06$ . Подставляя эти значения в (22) и (25), находим, что  $\alpha_2 = 0,244$ ;  $\beta_2 = 0,199$ , т.е. полученные значения  $\alpha$  и  $\beta$  мало отличаются от исходных.

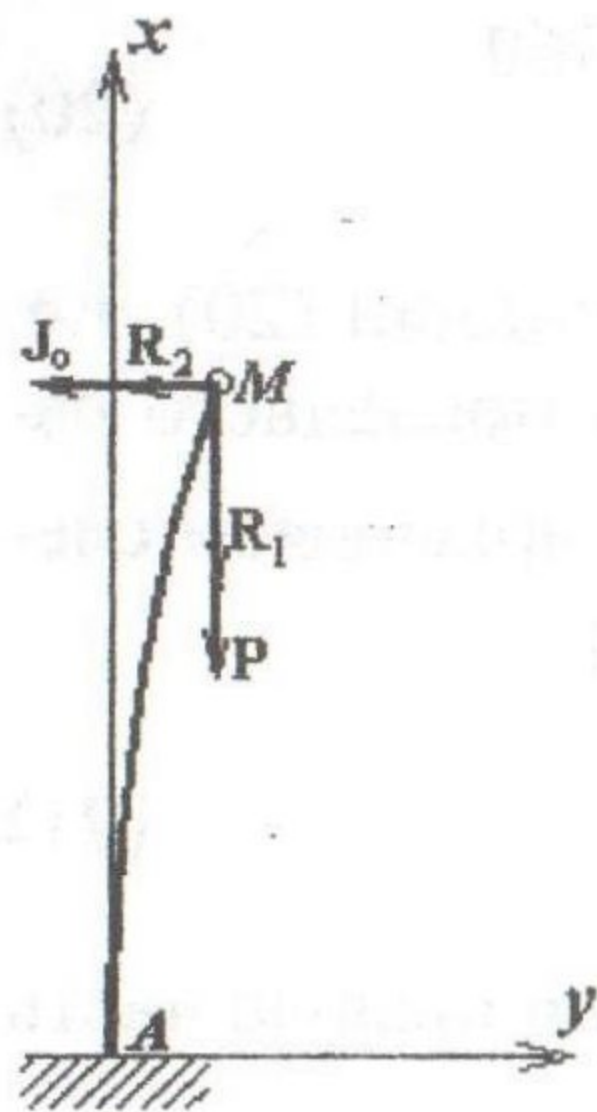


Рис. 3

Рассмотрим движение сосредоточенной массы  $M$ , расположенной на конце вертикальной колонны, если заделка совершает горизонтальные колебания по закону  $y_0 = e \sin \nu t$  (рис.3). Основное уравнение динамики для  $M$  выглядит так:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{J}_0 + \mathbf{P} \quad (26)$$

Здесь  $m$  и  $\mathbf{a}$  – масса и ускорение точки  $M$ ,  $\mathbf{P}$  – ее вес,  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  – горизонтальная и вертикальная реакции деформированной балки,  $\mathbf{J}_0$  – сила инерции, вызванная движением опоры  $A$  ( $\mathbf{J}_0 = -m\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_0$  – ускорение точки  $A$ ).

Проектируя (26) на оси координат, получаем

$$\begin{aligned} m\ddot{u} &= -P - R_1 \\ m\ddot{v} &= -R_2 - J \end{aligned} \quad (27)$$

( $u$  и  $v$  – горизонтальное и вертикальное перемещения точки  $M$ ). Заметим, что  $R_j = F_j$  ( $j = 1,2$ ).

Разделив обе части равенств (38) на  $ml$ , приходим к следующим уравнениям:

$$\ddot{\xi} = -\frac{g}{l} - \frac{H}{ml^3} \alpha \quad (28)$$

$$\ddot{\eta} = -\frac{H}{ml^3} \beta + \frac{e\nu^2}{l} \sin \nu t$$

Сделаем в уравнениях (28) подстановку

$$\xi = A\delta x_1, \quad \eta = \sqrt{A\delta} x_2 \quad (29)$$

где  $A$  – некоторая положительная константа, значение которой будет определено ниже. Разделив первое из равенств (28) на  $H/(ml^3)$ , второе – на  $\sqrt{A\delta}$ , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{x}_1 &= -\rho - \alpha \\ \ddot{x}_2 &= -\omega^2 x_2 (1 + A\delta b x_2^2) + \frac{e v^2}{l\sqrt{A\delta}} \sin vt \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь введены обозначения

$$\varepsilon = \frac{A\delta ml^3}{H}, \quad \rho = \frac{mgl^2}{H}, \quad \omega^2 = \frac{H}{ml^3} \frac{15}{5+2\rho}, \quad b = \frac{9}{5(1+0,4\rho)} \quad (31)$$

Выберем  $A$  таким образом, чтобы выполнялось равенство  $A\delta b = e/l\sqrt{A\delta}$ , т.е.

$$A = (e/bl)^{2/3} / \delta \quad (32)$$

Заметим, что  $\varepsilon$  достаточно малая величина. Так в вышерассмотренном примере  $\varepsilon = 6,535 \cdot 10^{-3}$  при  $m=5$ т. Поэтому, пренебрегая величиной  $\varepsilon \ddot{x}_1$ , получаем из первого уравнения (40), что  $\alpha = -\rho$ , т.е. в этом случае  $\alpha$  – постоянная величина. Введем во втором уравнении (30) безразмерное время  $\tau$  по формуле  $\tau = \omega t$ . Тогда это уравнение запишется так

$$\frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + x_2 = -\varepsilon_0 x_2^3 + \varepsilon_0 \lambda^2 \sin \lambda \tau \quad (33)$$

где  $\varepsilon_0 = A\delta b$  (в приведенном выше примере  $\varepsilon_0 = 0,032$ ).

Уравнение (33) является уравнением Дуффинга. Введем переменные Ван-дер-Поля  $d$  и  $\psi$  следующим образом

$$x_2 = d \cos \psi, \quad \dot{x}_2 = -d \sin \psi \quad (34)$$

(здесь и в дальнейшем точка означает дифференцирование по  $\tau$ ).

Дифференцируя первое равенство (34) по  $\tau$  и приравнивая правой части второго, получим

$$\dot{d} \cos \psi - d \dot{\psi} \sin \psi = -d \sin \psi \quad (35)$$

Дифференцируя второе равенство (34) по  $\tau$  и подставляя  $\ddot{x}_2$  в (33), будем иметь

$$-\dot{d} \sin \psi - d \dot{\psi} \cos \psi = -d \cos \psi + \varepsilon_0 f_1(d \cos \psi) + \varepsilon_0 f_2(\tau) \quad (36)$$

где  $f_1(x_2) = -x_2^3$ ,  $f_2(\tau) = E \sin(\lambda \tau)$ ,  $E = \lambda^2$ .

Рассматривая (35) и (36) как систему уравнений относительно  $\dot{d}$  и  $\dot{\psi}$ , находим

$$\begin{aligned}\dot{d} &= -\varepsilon_0 \frac{\sin \psi [f_1(d \cos \psi) + f_2(\tau)]}{d} \\ \dot{\psi} &= 1 - \varepsilon_0 \frac{\cos \psi [f_1(d \cos \psi) + f_2(\tau)]}{d}\end{aligned}\quad (37)$$

Из-за малости  $\varepsilon_0$  амплитуда  $d$  является медленно меняющейся переменной. В то же время фаза  $\psi$  является быстро меняющейся переменной. Будем разыскивать периодические колебания конструкции, частота которых равна частоте возмущения. Введем новые переменные  $\chi = \lambda \tau$ ,  $\theta = \chi - \psi$  (т.е.  $\psi = \lambda \tau + \theta$ )

Тогда (37) можно записать так

$$\begin{aligned}\dot{d} &= -\varepsilon_0 \frac{\sin \psi [f_1(d \cos \psi) + E \sin \chi]}{d} \\ \dot{\theta} &= \lambda - 1 + \varepsilon_0 \frac{\cos \psi [f_1(d \cos \psi) + E \sin \chi]}{d} \\ \dot{\chi} &= \lambda\end{aligned}\quad (39)$$

Заметим, что  $\chi$  является быстрой переменной, что же касается  $\theta$ , то в окрестности главного резонанса, т.е. при  $\lambda \cong 1$ , она является медленной переменной. Будем разыскивать стационарные режимы колебаний, при которых  $\dot{d}$  и  $\dot{\theta}$  равны нулю. В окрестности стационарных режимов  $\theta$  также является медленной переменной. Следуя общей идее метода усреднения [3], заменим в правых частях первых двух формул (39) функции, зависящие от быстрой переменной  $\chi$ , их средними значениями за период  $T = 2\pi$ . В результате получаем

$$\begin{aligned}\dot{d} &= -\frac{\varepsilon_0}{2\pi d} \int_0^{2\pi} [f_1(d \cos(\chi - \theta)) + E \sin \chi] \sin(\chi - \theta) d\chi \\ \dot{\theta} &= \lambda - 1 + \frac{\varepsilon_0}{2\pi d} \int_0^{2\pi} [f_1(d \cos(\chi - \theta)) + E \sin \chi] \cos(\chi - \theta) d\chi\end{aligned}\quad (40)$$

Интегрируя и приравнявая правые части формул (40) нулю, находим

$$\cos \theta = 0, \quad \lambda = 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{3}{4} d^2 - \frac{E}{d} \sin \theta \right)\quad (41)$$

Из первого равенства (41) имеем  $\theta = \pm\pi/2$ , т.е.  $\sin \theta = \pm 1$ . Возводя второе равенство (41) в квадрат и пренебрегая слагаемыми, содержащими  $\varepsilon_0^2$ , будем иметь

$$\lambda^2 = 1 + \varepsilon_0 \left( \frac{3}{4} d^2 \pm \frac{E}{d} \right), \quad (42)$$

что совпадает с уравнениями резонансных кривых, полученными другими способами (см. например, [4]). Подставим в (41) выражение  $E = \lambda^2$ . В результате получаем следующую зависимость между  $d$  и  $\lambda$

$$\lambda^2 \pm \frac{2d}{\varepsilon_0} \left( \lambda - 1 - \frac{3\varepsilon_0 d^2}{8} \right) = 0 \quad (43)$$

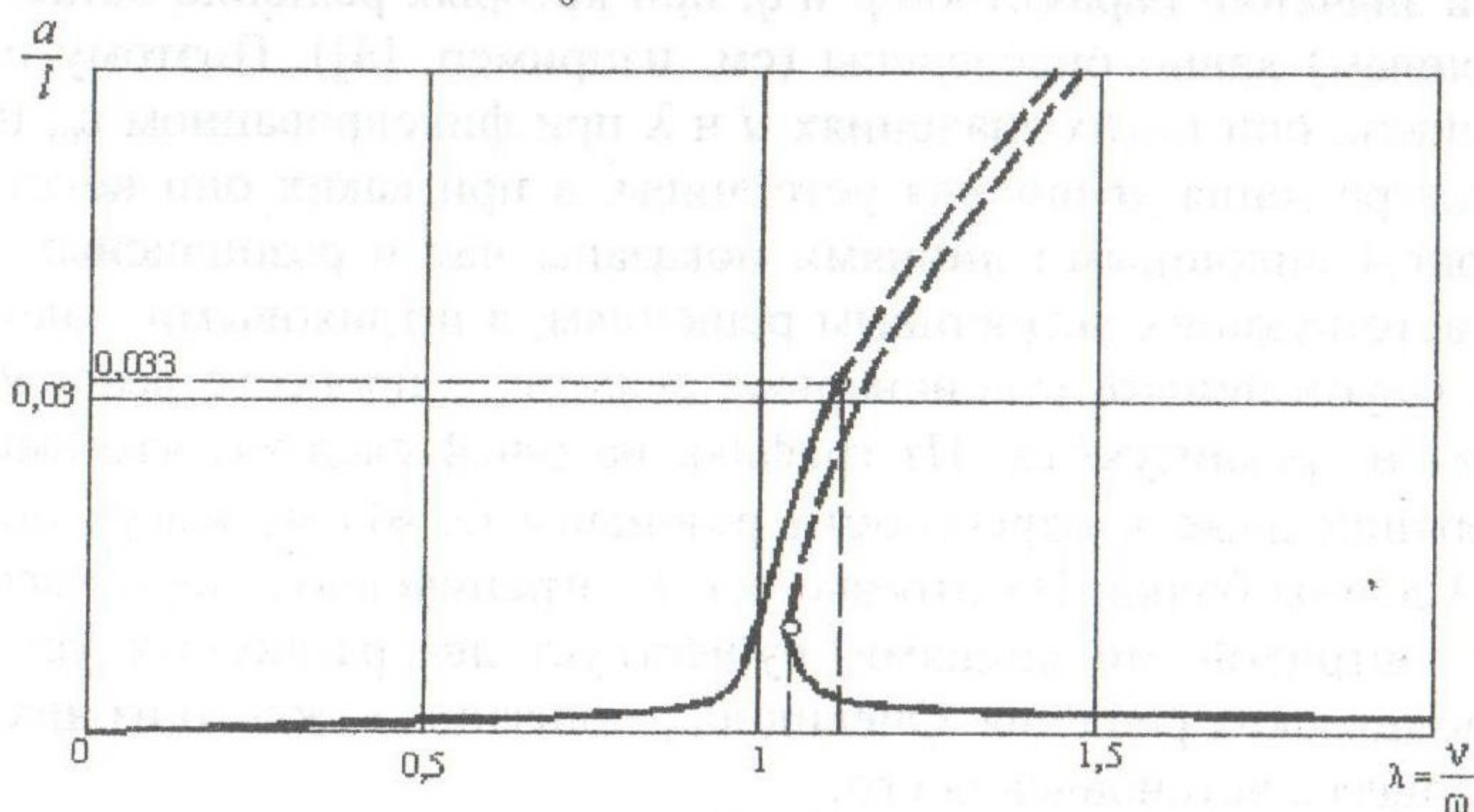


Рис.4

Графики кривых, соответствующих этой зависимости, приведены на рис.4 ( $a = d \cdot l / \sqrt{\delta}$  – амплитуда колебания в абсолютных единицах).

Исследуем стационарные режимы колебаний, соответствующие точкам графика, приведенного на рис.4, на устойчивость. Под устойчивостью понимается следующее: при малых отклонениях амплитуды и частоты колебаний от тех, которые соответствуют какой либо точке графика, эти отклонения остаются малыми и в дальнейшем движении, т.е. движение остается близким к стационарному режиму. При dim координате  $x_2$  малое приращение  $\delta x_2$  и подставим  $x_2 + \delta x_2$  вместо  $x_2$  в уравнение (33). Учитывая, что  $x_2$  является решением уравнения (33) и пренебрегая степенями  $\delta x_2$  выше первой, получаем

$$\frac{d^2 \delta x_2}{d\tau^2} + (1 + 3\varepsilon_0 x_2^2) \delta x_2 = 0 \quad (44)$$



Поскольку  $x_2$  является стационарным решением уравнения (33), то оно представляется в виде  $x_2 = \pm d \sin(\lambda \tau)$  (т.к.  $\theta = \pm \pi / 2$  в (38)). После подстановки этого выражения в (44) и замены независимой переменной  $\tau = z / (2\lambda)$  приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 \delta x_2}{dz^2} + (p + q \cos z) \delta x_2 = 0 \quad (45)$$

где  $p = (2 + 3\varepsilon_0 d^2) / 8\lambda^2$ ,  $q = 3\varepsilon_0 d^2 / 8\lambda^2$ . Таким образом, вопрос об устойчивости периодических решений уравнения (33) свелся к вопросу об устойчивости тривиального решения уравнения (45). Это уравнение называется уравнением Матье, зоны устойчивости которого (т.е. области значений параметров  $p$  и  $q$ , при которых решение остается ограниченным) давно определены (см. например, [4]). Поэтому нетрудно выяснить, при каких значениях  $d$  и  $\lambda$  при фиксированном  $\varepsilon_0$ , периодические решения уравнения устойчивы, а при каких они неустойчивы. На рис.4 сплошными линиями показаны части резонансных кривых, соответствующих устойчивым решениям, а штриховыми – неустойчивые. Неустойчивые стационарные режимы в процессе реального движения не реализуются. Из графика на рис.4 следует, что амплитуды колебаний даже в окрестности резонанса ( $\lambda \approx 1$ ) не могут превысить 0,033 длины балки. На отрезке оси  $\lambda$ , ограниченном двумя вертикальными штриховыми линиями, существует два различных устойчивых периодических решения. Очевидно, реализация каждого из них зависит от процесса установления его.

**Выводы.** Результаты проведенных исследований показали, что в окрестности резонанса, т.е. при близости частоты возбуждения с частотой собственных колебаний, амплитуды вынужденных колебаний остаются сравнительно небольшими даже при отсутствии демпфирования, что противоречит линейной теории.

#### Литература

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
2. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.
4. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: ИЛ, 1952. – 264 с.