УДК 539.4:624.07

К ПРИМЕНЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ В РАСЧЁТЕ БАЛОК ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Дызов К.Г. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Расчёту балок, испытывающих действие локальных нагрузок, посвящено достаточно большое количество публикаций, в которых, как правило, излагаются существующие традиционные методы. В данной статье предлагается простая и эффективная методика расчета, основанная на использовании аппарата обобщённых функций, что дает возможность получать решения на всей области балки, включая и зоны воздействия.

Дифференциальное уравнение линии прогиба балки под действием произвольной нагрузки в безразмерных величинах имеет вид [1]

$$\tilde{w}^{\mathrm{IV}} = \tilde{q}(\tilde{x}), \tag{1}$$

где $\tilde{w}(\tilde{x}) = {}^{w(x)}\!/_{L}$ - обобщённый прогиб, $\tilde{x} = {}^{x}\!/_{L}$ - обобщённая координата, $\tilde{q}(\tilde{x}) = \dfrac{q(x)\cdot L^3}{EI}$ - величина обобщённой нагрузки, $q(x)$ - сама нагрузка, действующая на балку, $E \cdot I$ - жёсткость балки на изгиб, E - модуль упругости материала, I - момент инерции сечения балки, L - длина балки. Поперечная сила Q и изгибающий момент M определяются из следующих уравнений

$$\tilde{w}'' = -\tilde{M}\ ,\ \tilde{w}''' = -\tilde{Q}, \tag{2}$$

где $\tilde{M} = \dfrac{M \cdot L}{EI}$ - обобщённый момент, а $\tilde{Q} = \dfrac{Q \cdot L^2}{EI}$ - обобщённая перерезывающая сила.

Решение $\tilde{w}$ дифференциального уравнения (1) состоит из суммы двух решений: $\tilde{w} = \tilde{w}_0 + \tilde{w}_ч$; $\tilde{w}_0$ - общее решение однородного уравнения $\tilde{w}^{\mathrm{IV}} = 0$ (фундаментальная система решений) и $\tilde{w}_ч$ - частное решение уравнения (1).

В качестве фундаментального решения $\tilde{w}_0$ можно принять выражение [1]

$$\tilde{w}_0 = C_0 + C_1\tilde{x} + C_2\tilde{x}^2 + C_3\tilde{x}^3, \qquad (3)$$

где C_0, C_1, C_2 и C_3 - неизвестные константы интегрирования, которые определяются из граничных условий на концах балки. Частное решение $\tilde{w}_ч$ можно найти методом Коши [2]

$$\tilde{w}_ч = \int_0^x \tilde{w}_0(\tilde{x} - t)\tilde{q}(t)dt, \qquad (4)$$

где $\tilde{w}_0(\tilde{x} - t)$ - общее решение однородного уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\tilde{w}_0(0) = 0; \tilde{w}_0'(0) = 0; \tilde{w}_0''(0) = 0; \tilde{w}_0'''(0) = 1; \qquad (5)$$

$\tilde{q}(t)$ - правая часть (1); t - параметр интегрирования. При построении $\tilde{w}_0$ в (4) используется процедура Коши. Она состоит в том, что общее решение однородного уравнения (3) подчиняют условиям (5), определяя тем самым коэффициенты, входящие в это решение. Умножив эти коэффициенты на соответствующие им решения из фундаментальной системы (3), можно получить $\tilde{w}_0$. Продифференцируем трижды (3) и результат подчиним условиям (5). Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения C_i, $i = 0,1,2,3$

$$\begin{cases} C_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 = 0, \\ C_1 + 2C_2 \cdot 0 + 3C_3 \cdot 0 = 0, \\ 2C_2 + 6C_3 \cdot 0 = 0, \\ 6C_3 = 1 \end{cases}$$

из которой находим, что $C_0 = C_1 = C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{6}$ и формула (4) принимает вид

$$\tilde{w}_ч = \frac{1}{6}\int_0^x (\tilde{x} - t)^3 \tilde{q}(t)dt. \qquad (6)$$

Формула (6) является общей для нахождения частного решения уравнения (1) для произвольной нагрузки $\tilde{q}(\tilde{x})$.

При решении задач механики для описания различных видов локальных нагрузок удобно использовать разрывные и сингулярные функции: единичные функции - $e(x)$, дельта – функции - $\delta(x)$, а также их производные - $\delta'(x)$ [3, 4]. Эти функции определяются следующим образом

$$e(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 1 \text{ при } x\ge 0,\end{cases}\quad \delta(x)=\frac{de(x)}{dx},\quad \delta'(x)=\frac{d\delta(x)}{dx}.$$

Единичная функция, дельта-функция и её производная обладают рядом полезных свойств

$$\delta(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\ne 0,\\ \infty \text{ при } x=0,\end{cases}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x)dx=f(0)\cdot e(x),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e(x-a)dx=e(x-a)\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1, \qquad (7)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x)dx=f(0)\cdot e(x).$$

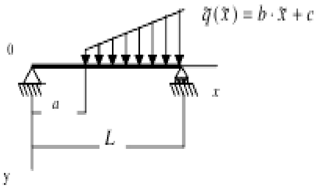


Рис. 1

В (7) функция $f(x)$ - непрерывна[1]. В случае если на балку действует нагрузка, изображённая на рис. 1, частное решение (1) с учётом свойств единичной функции (7) имеет вид

$$\tilde{w}_ч=\frac{1}{6}\int\limits_{0}^{\tilde{x}}(\tilde{x}-t)^3\tilde{q}(t)e(t-a)dt=\frac{1}{6}\int\limits_{a}^{\tilde{x}}(\tilde{x}-t)^3(b\cdot t+c)e(t-a)dt=$$
$$=\tfrac{1}{6}\Big[\Big(\tfrac{1}{20}b\tilde{x}^5+\tfrac{1}{4}c\tilde{x}^4\Big)-\Big(\tfrac{1}{2}a^2b\tilde{x}^3+ac\tilde{x}^3-a^3b\tilde{x}^2-\tfrac{3}{2}a^2c\tilde{x}^2+ \qquad (8)$$
$$+\tfrac{3}{4}a^4b\tilde{x}+a^3c\tilde{x}-\tfrac{1}{5}a^5b-\tfrac{1}{4}a^4c\Big)\Big]\cdot e(\tilde{x}-a).$$

Производные от $\tilde{w}_ч$ соответственно равны

---

[1] В теории обобщённых функций $f(x)$ называется носителем сингулярных функций.

$$\tilde{w}'_ч = \frac{1}{6}\Big[\Big(0{,}25b\tilde{x}^4 + c\tilde{x}^3\Big) - \Big(1{,}5a^2b\tilde{x}^2 + 3ac\tilde{x} - 2a^3b\tilde{x} - 3a^2c\tilde{x} + $$
$$+ 0{,}75a^4b + a^3c\Big)\Big]\cdot e(\tilde{x} - a) + \frac{1}{6}\Big[\Big(\frac{1}{20}b\tilde{x}^5 + \frac{1}{4}c\tilde{x}^4\Big) - \Big(\frac{1}{2}a^2b\tilde{x}^3 + $$
$$+ ac\tilde{x}^3 - \frac{3}{2}a^2c\tilde{x}^2 + \frac{3}{4}a^4b\tilde{x} + a^3c\tilde{x} - \frac{1}{5}a^5b - \frac{1}{4}a^4c\Big)\Big]\cdot \delta(\tilde{x} - a).$$

Здесь второе слогаемое, содержащее $\delta(\tilde{x} - a)$, является чисто символическим: оно сигнализирует о том, что при дифференцировании разрывной функции (8) в точке $\tilde{x} = a$ имеется разрыв со скачком равным этому слогаемому при $\tilde{x} = a$. В наших расчётах оно не используется и в дальнейших выкладках не приводится.[2]

$$\tilde{w}''_ч = \frac{1}{6}\Big[\Big(b\tilde{x}^3 + 3c\tilde{x}^2\Big) - \Big(3a^2b + 6ac\Big)\Big]\cdot e(\tilde{x} - a),$$

$$w'''_ч = \frac{1}{6}\Big[\Big(3bx^2 + 6cx\Big) - \Big(3a^2b + 6ac\Big)\Big]\cdot e(x - a).$$

Выше в формулах: a - координата начала точки приложения нагрузки $\tilde{q}(x) = b\cdot x + c$; b и c - коэффициенты, описывающие закон её изменения; $e(\tilde{x} - a)$ - единичная функция с разрывом в точке $\tilde{x} = a$.

В случае, когда в $\tilde{q}(x) = b\cdot x + c$, $b = 0$, нагрузка становится полосовой с постоянной интенсивностью $\tilde{q} = c$ (рис. 2) и выражения (8) существенно упрощаются

$$\tilde{w}_ч = \frac{\tilde{q}}{24}(\tilde{x} - a)^4 \cdot e(\tilde{x} - a), \quad \tilde{w}'_ч = \frac{\tilde{q}}{6}(\tilde{x} - a)^3 \cdot e(\tilde{x} - a),$$

$$\tilde{w}''_ч = \frac{\tilde{q}}{2}(\tilde{x} - a)^2 \cdot e(\tilde{x} - a), \quad \tilde{w}'''_ч = \tilde{q}(\tilde{x} - a)\cdot e(\tilde{x} - a).$$

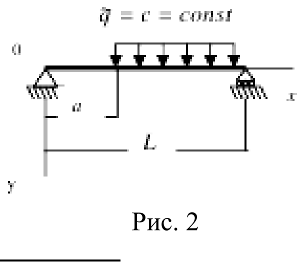


Рис. 2

[2] В ряде задач расчёта элементов строительных конструкций с резким изменением жёсткости учёт скачков разрывов обязателен, см. например [4].

Если на балку в точке $\tilde{x} = a$ действует сосредоточенная сила интенсивности $\tilde{q}$, частное решение (6) принимает вид

$$\tilde{w}_ч = \frac{1}{6}\int_0^x (\tilde{x} - t)^3 \tilde{q} \cdot \delta(t-a)dt \,. \qquad (9)$$

В (9) выражение $\tilde{q} \cdot \delta(t-a)$ означает, что в точке $t = a$ на балку действует сосредоточенная сила интенсивностью $\tilde{q}$. Из (9) с учётом свойств функции $\delta(x)$ (7) получаем

$$\tilde{w}_ч = \frac{\tilde{q}}{6}(\tilde{x}-a)^3 \cdot e(\tilde{x}-a), \;\; \tilde{w}'_ч = \frac{\tilde{q}}{2}(\tilde{x}-a)^2 \cdot e(\tilde{x}-a),$$
$$\tilde{w}''_ч = \tilde{q}(\tilde{x}-a) \cdot e(\tilde{x}-a), \;\; \tilde{w}''_ч = \tilde{q}(\tilde{x}-a) \cdot e(\tilde{x}-a).$$

Для сосредоточенного момента $\tilde{M}$ интенсивности $\tilde{q}$ с учётом свойств функции $\delta'(x)$ (7), частное решение и его производные принимают следующий вид

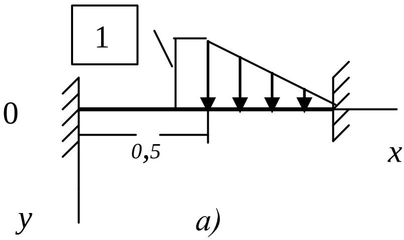
$$\tilde{w}_ч = \frac{1}{6}\int_0^{\tilde{x}} (\tilde{x}-t)^3 \tilde{q} \cdot \delta'(t-a)dt = \frac{3\tilde{q}}{6}\int_0^x (\tilde{x}-t)^2 \cdot \delta(t-a)dt =$$
$$= \tfrac{q}{2}(\tilde{x}-a)^2 \cdot e(\tilde{x}-a), \;\; \tilde{w}'_ч = \tilde{q}(\tilde{x}-a) \cdot e(\tilde{x}-a), \;\; \tilde{w}''_ч = \tilde{q} \cdot e(\tilde{x}-a),$$
$$\tilde{w}'''_ч = 0\,.$$

Выражение $\tilde{q} \cdot \delta'(t-a)$ означает, что в точке $t = a$ на балку действует сосредоточенный момент интенсивностью $\tilde{q}$.

Примеры расчётов. Построить линию прогиба $\tilde{w}$, эпюры момента $\tilde{M}$ и перерезывающей силы $\tilde{Q}$ балки с жёсткой заделкой на концах, под действием нагрузки $\tilde{q}(\tilde{x}) = (-2\tilde{x}+2) \cdot e(\tilde{x}-0{,}5)$, действующей с точки $\tilde{x} = 0{,}5$, рис. 3 а.

Условию жёсткой заделки соответствуют следующие граничные условия: $\tilde{w}(0) = \tilde{w}'(0) = 0$ при $\tilde{x} = 0$ и $\tilde{w}(1) = \tilde{w}'(1) = 0$ при $\tilde{x} = 1$. С учётом (3) получаем следующую систему для нахождения констант интегрирования

$$\begin{cases} C_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 = 0, \\ C_1 + 2C_2 \cdot 0 + 3C_3 \cdot 0 = 0, \\ C_0 + C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 1 = -\tilde{w}_ч(1), \\ C_1 + 2C_2 \cdot 1 + 3C_3 \cdot 1 = -\tilde{w}'_ч(1). \end{cases}$$



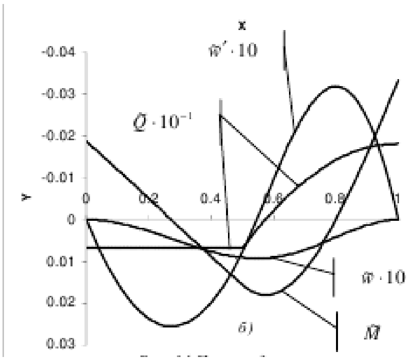


Рис. 3

Из первого уравнения системы находим, что $C_0 = 0$, а из второго, что $C_1 = 0$. Для оставшихся неизвестных получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_2 + C_3 = -\tilde{w}_ч(1), \\ 2C_2 + 3C_3 = -\tilde{w}'_ч(1), \end{cases}$$

из которой находим c_2 и c_3. На рис. 3 б приведены масштабированные обобщённые кривые $\tilde{w}, \tilde{w}', \tilde{M}, \tilde{Q},$ а на рис. 4 представлен фрагмент Excel – таблицы расчёта данного примера.

На рис. 5 приведены обобщённые кривые $\tilde{w},\ \tilde{w}', \tilde{M}, \tilde{Q}$ свободно опёртой балки, под действием полосовой нагрузки (рис. 2) $\tilde{q}(\tilde{x}) = 1 \cdot e(\tilde{x} - 0{,}5)$, действующей с точки $\tilde{x} = 0{,}5$. На рис. 6 б приведены кривые $\tilde{w},\ \tilde{w}', \tilde{M}, \tilde{Q}$ балки с жёсткой заделкой, под действием сосредоточенного момента $\tilde{M} = 1 \cdot \delta'(\tilde{x} - 0{,}5)$ в точке $\tilde{x} = 0{,}5$. На рис. 7 приведены кривые $\tilde{w},\ \tilde{w}'_ч,\ \tilde{M}, \tilde{Q}$ консольной балки, под действием сосредоточенной силы $\tilde{q}(\tilde{x}) = 1 \cdot \delta(\tilde{x} - 1)$, приложенной на свободном конце.

	A	B	C	D	E	F
1	a=	0,5	b=	-2	c=	2
2	$\tilde{w}_ч =$	0,00208333	$\tilde{w}'_ч =$	0,015625		
3						
4	1	1	-0,00208			
5	2	3	-0,01563			
6						
7	3	-1	C2=	0,009375		
8	-2	1	C3=	-0,01146		
9						
10	x	$\tilde{w}\cdot 10$	$\tilde{w}''$	$\tilde{w}'''\cdot 10^{-1}$	$\tilde{w}'\cdot 10$	
11	0	0	-0,01875	0,006875	0	
12	0,01	9,2604E-06	-0,01806	0,006875	0,001841	
13	0,02	3,6583E-05	-0,01738	0,006875	0,003613	
14	0,03	8,1281E-05	0,01669	0,006875	0,005316	
………………………………………..						
110	0,99	1,6365E-05	-0,03152	-0,01812	-0,00324	
111	1	-1,301E-17	-0,03333	-0,01813	0	

Рис. 4

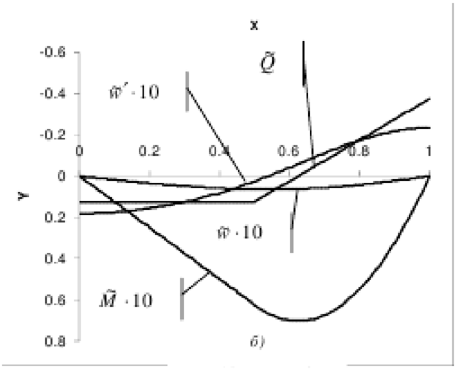


Рис. 5

Заключение

В заключение заметим, что изложенная методика расчёта хорошо программируется и позволяет получать, например в MS Excel, наглядные интерактивные графические решения.

Summary

The use of the apparatus of generalized functions in the analysis of beams, experiencing the action of local loads, makes it possible to obtain a simple and effective solutions.

1. Тимошенко С. П., Гере Дж. Механика материалов, ‘‘Мир’’, Москва, 1976, 669 с. 2. Подгорный А. Н., Марченко Г. А., Пустынников В. И. Основы и методы прикладной теории упругости, Киев, ‘‘Вища школа’’, 1981, 328 с. 3. Лазарян В. А., Коношенко С. И. Обобщённые функции в задачах механики,

‘‘Наукова думка’’, 1974, 192 с. 4. Дызов К. Г. К применению сингулярных функций в расчёте пластин при действии локальных нагрузок, ‘‘Известия ВУЗов, Строительство и архитектура’’, №10, 1991, Новосибирск, с. 19-23.

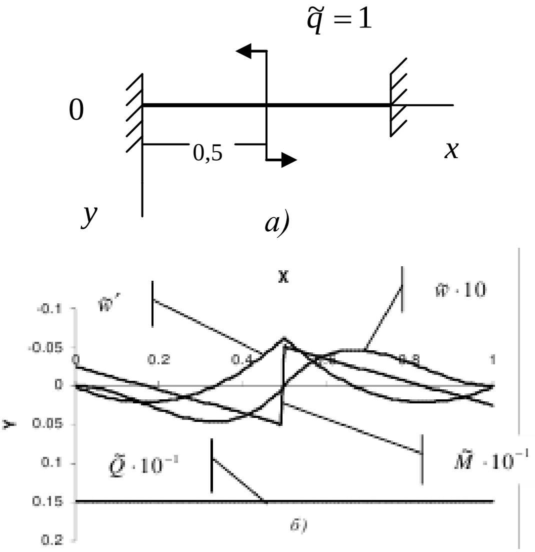


Рис. 6

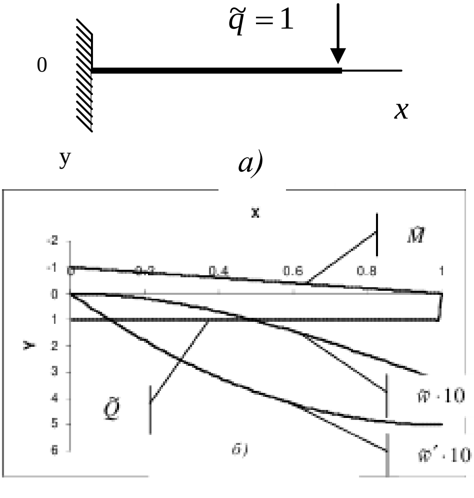


Рис. 7