УДК 69.04(075.8)

СОБСТВЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ, НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Крутий Ю.С.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
г. Одесса, Украина

АНОТАЦІЯ: Пропонується новий метод дослідження власних поперечних коливань консольного стержня з довільною безперервною змінною поперечною жорсткістю і довільною безперервною змінною погонною масою. Метод дозволяє визначати динамічні характеристики будівель і споруд при розрахунку їх на сейсмостійкість.

АННОТАЦИЯ: Предлагается новый метод исследования собственных поперечных колебаний консольного стержня с произвольной непрерывной переменной поперечной жесткостью и произвольной непрерывной переменной погонной массой. Метод позволяет определять динамические характеристики зданий и сооружений при расчете их на сейсмостойкость.

ABSTRACT: The new method of research of own cross-section fluctuations of a console core with any continuous variable cross-section rigidity and any continuous variable running weight is offered. The method allows to define dynamic characteristics of buildings and constructions at their calculation on seismic stability.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: консольный стержень, собственные поперечные колебания, частоты колебаний, собственные формы колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

Общеизвестно, что колебания являются наиболее распространенным видом движения и играют огромною роль в современной науке и технике. Сейсмостойкость здесь не является исключением. При этом особую роль в теории сейсмостойкости играют собственные (свободные) колебания. Степень и характер сейсмического воздействия на здания и сооружения в значительной степени характеризуются частотами и формами их собственных колебаний. Поэтому актуальной научной и практической проблемой является задача отыскания частот и форм собственных колебаний.

Среди возможных видов колебаний значительный практический интерес вызывают поперечные колебания. Так при расчетах сооружений на сейсмостойкость, в качестве расчетной схемы часто принимают консольный стержень переменного сечения с распределенными массами, работающий на изгиб.

Для модели, в которой принято пренебрегать продольными перемещениями сечений, их поворотами и сдвигами, дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний стержня с учетом сопротивлений имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+p(x,t)=0\,, \tag{1}$$

здесь $E(x)J(x)$ – переменная поперечная жесткость,

где $E(x), J(x)$ – соответственно модуль упругости материала и момент инерции поперечного сечения стержня в точке x;

$m(x)$ – интенсивность распределенной массы (погонная масса) стержня в точке x;

$p(x,t)$ – интенсивность сил сопротивления движению;

$y(x,t)$ – неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение точки оси стержня (прогиб) с координатой x в момент времени t.

В тех случаях, когда дифференциальное уравнение (1) допускает точное (аналитическое) решение, указанная задача решается сравнительно просто. Однако в большинстве практически важных задач приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Случаи построения точных решений таких уравнений составляют в теории колебаний редкое исключение. Отсутствие в большинстве случаев точных решений явилось одной из причин широкого применения приближенных методов. Из таких методов наибольшее распространение получили методы Рэлея, Ритца и Бубнова-Галеркина, основанные на вариационных принципах механики. Однако, как отмечается в [3], хотя принципиальное решение проблемы отыскания частот и форм собственных колебаний известно, вопрос о методе не может считаться исчерпанным.

Несмотря на то, что с момента публикации [3] утекло много времени, вопрос о методе является актуальным и в наши дни, особенно в таких его аспектах, как точность, универсальность и возможность сравнительно простой программной реализации. Разработке метода отыскания частот и форм собственных колебаний консольного стержня с переменными, непрерывно распределенными параметрами посвящена данная статья.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим упругий, вообще говоря, неоднородный, прямой консольный стержень (балку) длины l с переменным поперечным сечением и переменной погонной массой. Совместим ось x с осью стержня и будем считать, что конец $x=0$ жестко закреплен, а конец $x=l$ свободен.

Следуя [1] полагаем, что сопротивление пропорционально массе стержня и скорости, то есть, $p(x,t)=2\alpha m(x)\dfrac{\partial y}{\partial t}$, где $\alpha-$ константа. Тогда уравнение (1) запишется так

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)J(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2\alpha m(x)\frac{\partial y}{\partial t}=0\,. \qquad (2)$$

Точное решение $y(x,t)=v(x)T(t)$ такого уравнения для случая произвольной непрерывной переменной поперечной жесткости и произвольной непрерывной переменной погонной массы построено в работе [4]. Здесь $v(x)-$ амплитудная функция прогибов, а $T(t)-$ функция времени.

Задача - основываясь на точном решении уравнения (2), требуется сформулировать метод отыскания частот и собственных форм поперечных колебаний консольного стержня с произвольной непрерывной переменной поперечной жесткостью и произвольной непрерывной переменной погонной массой.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Искомый метод во многом будет определяться способом численной реализации точного решения уравнения (2). Но прежде зададимся целью получить конечные формулы в безразмерном формате. Это позволит на этапе программной реализации метода оперировать только безразмерными величинами.

На практике, когда исходные параметры являются переменными, их удобно представлять в виде:

$$E(x)J(x) = E_0 J_0 A(x),\ m(x) = m_0 B(x)\ , \tag{3}$$

где E_0, J_0, m_0 – некоторые постоянные, соответственно модуль упругости, момент инерции и погонная масса в какой-либо характерной точке стержня, а $A(x), B(x)$ – непрерывные безразмерные функции. По сути, функции $A(x)$ и $B(x)$ определяют соответственно закон изменения поперечной жесткости и закон изменения погонной массы вдоль длины стержня. По смыслу эти функции положительные.

Амплитудная функция прогибов определяется из уравнения

$$\left(E(x)J(x)v''(x)\right)'' - \omega^2 m(x)v(x) = 0\ . \tag{4}$$

Общее решение данного уравнения построено в работе [4], причем это решение выражено через начальные параметры: $v(0), \varphi(0), M(0), Q(0)$ – соответственно перемещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в точке $x = 0$. Пользуясь результатами данной работы, выпишем формулы, которыми определяется точное решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям $v(0) = 0,\ \varphi(0) = 0$. Учитывая при этом представления (3), будем иметь

$$v(x) = -M(0)\frac{l^2}{E_0 J_0} X_3(x) - Q(0)\frac{l^3}{E_0 J_0} X_4(x)\ , \tag{5}$$

где $X_3(x), X_4(x)$ – фундаментальные функции уравнения (4), которые определяются формулами:

$$X_3(x) = \gamma_0(x) + K^2\gamma_1(x) + K^4\gamma_2(x) + K^6\gamma_3(x) + \ldots\ ; \tag{6}$$

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}dxdx,\quad \gamma_i(x) = \frac{1}{l^4}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\int_0^x\int_0^x B(x)\gamma_{i-1}(x)dxdxdxdx\ (i = 1,2,3,\ldots); \tag{7}$$

$$X_4(x) = \delta_0(x) + K^2\delta_1(x) + K^4\delta_2(x) + K^6\delta_3(x) + \ldots\ ; \tag{8}$$

$$\delta_0(x) = \frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\frac{x}{l}dxdx,\quad \delta_i(x) = \frac{1}{l^4}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\int_0^x\int_0^x B(x)\delta_{i-1}(x)dxdxdxdx\ (i = 1,2,3,\ldots). \tag{9}$$

Здесь обозначено

$$K = \omega\, l^2\sqrt{\frac{m_0}{E_0 J_0}}\ . \tag{10}$$

Параметр K является безразмерным, в чем легко убедиться, подставляя в правую часть последней формулы размерности фигурирующих в ней величин.

Формулы для оставшихся двух фундаментальных функций $X_1(x), X_2(x)$ уравнения (4) не приводим, поскольку для исследования консольного стержня они не потребуются.

Функции $\gamma_i(x)$, $\delta_i(x)$ $(i = 1,2,3,...)$, помимо рекуррентных формул (7), (9), можно представить также в явном виде:

$$\gamma_i(x) = \frac{1}{l^{4i+2}} \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x\int_0^x B(x) ... \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x\int_0^x B(x) \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} dx...dx\,; \tag{11}$$

$$\delta_i(x) = \frac{1}{l^{4i+2}} \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x\int_0^x B(x) ... \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x\int_0^x B(x) \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} \frac{x}{l} dx...dx\,. \tag{12}$$

Количество интегралов в правой части каждой из двух последних формул равно $4i + 2$.

Следуя [5], можно показать, что функции $\gamma_i(x), \delta_i(x)$ $(i = 0,1,2,...)$ являются безразмерными. Тогда непосредственно из формул (6), (8) вытекает, что фундаментальные функции $X_3(x), X_4(x)$ также являются безразмерными. Следовательно, согласно формуле (5), амплитудная функция прогибов выражена посредством безразмерных фундаментальных функций, причем коэффициенты при этих функциях имеют размерность длины.

Чтобы удовлетворить граничным условиям $M(l) = 0,\ Q(l) = 0$, соответствующим свободному концу, потребуются представления для изгибающего момента $M(x) = -E_0 J_0 A(x) v''(x)$ и поперечной силы $Q(x) = M'(x)$. Соответствующие формулы можно записать так

$$M(x) = M(0)\,\overline{X}_3(x) + Q(0)\,l\overline{X}_4(x), \tag{13}$$

$$Q(x) = M(0)\frac{1}{l}\hat{X}_3(x) + Q(0)\hat{X}_4(x). \tag{14}$$

Здесь $\overline{X}_k(x) = l^2 A(x) X_k''(x)$, $\hat{X}_k(x) = l\overline{X}_k'(x)$ $(k = 3,4)$, или в развернутом виде:

$$\overline{X}_3(x) = \overline{\gamma}_0(x) + K^2\overline{\gamma}_1(x) + K^4\overline{\gamma}_2(x) + K^6\overline{\gamma}_3(x) + ...,$$

$$\overline{\gamma}_0(x) = 1,\ \overline{\gamma}_i(x) = l^2 A(x)\gamma_i''(x)\ (i = 1,2,3,...);$$

$$\overline{X}_4(x) = \overline{\delta}_0(x) + K^2\overline{\delta}_1(x) + K^4\overline{\delta}_2(x) + K^6\overline{\delta}_3(x) + ...,$$

$$\overline{\delta}_0(x) = \frac{x}{l},\ \overline{\delta}_i(x) = l^2 A(x)\delta_i''(x)\ (i = 1,2,3,...);$$

$$\hat{X}_3(x) = \hat{\gamma}_0(x) + K^2\hat{\gamma}_1(x) + K^4\hat{\gamma}_2(x) + K^6\hat{\gamma}_3(x) + ...,$$

$$\hat{\gamma}_0(x) = 0,\ \hat{\gamma}_i(x) = l\overline{\gamma}_i'(x)\ (i = 1,2,3,...);$$

$$\hat{X}_4(x) = \hat{\delta}_0(x) + K^2\hat{\delta}_1(x) + K^4\hat{\delta}_2(x) + K^6\hat{\delta}_3(x) + ...,$$

$$\hat{\delta}_0(x) = 1,\ \hat{\delta}_i(x) = l\bar{\delta}_i'(x)\ (i = 1,2,3,...).$$

При этом функции $\bar{\gamma}_i(x), \bar{\delta}_i(x), \hat{\gamma}_i(x), \hat{\delta}_i(x)\ (i = 0,1,2,...)$, а значит и функции $\bar{X}_k(x), \hat{X}_k(x)\ (k = 3,4,)$, будут безразмерными. Таким образом, согласно формулам (13), (14), изгибающий момент и поперечная сила также представлены посредством безразмерных функций. При этом размерности постоянных коэффициентов в правых частях указанных формул совпадают с размерностями соответствующих левых частей.

Реализуя теперь заданные граничные условия, приходим к системе

$$\begin{cases} M(0)\bar{X}_3(l) + Q(0)l\bar{X}_4(l) = 0, \\ M(0)\dfrac{1}{l}\hat{X}_3(l) + Q(0)\hat{X}_4(l) = 0. \end{cases}$$

Условие разрешимости системы дает частотное уравнение

$$\bar{X}_3(l)\hat{X}_4(l) - \bar{X}_4(l)\hat{X}_3(l) = 0. \tag{15}$$

Из результатов работы [4] в частности вытекает абсолютная сходимость числовых рядов $\bar{X}_3(l), \bar{X}_4(l), \hat{X}_3(l), \hat{X}_4(l)$. Поэтому на основании известных теорем из математического анализа заключаем, что левая часть частотного уравнения (15) также представляет собою сходящийся ряд. Выполняя операции умножения и вычитания рядов, получим

$$\eta_0 + \eta_1 K^2 + \eta_2 K^4 + \eta_3 K^6 + ... = 0, \tag{16}$$

где

$$\eta_0 = 1,\ \eta_i = \sum_{k=0}^{i}\left(\bar{\gamma}_k(l)\hat{\delta}_{i-k}(l) - \bar{\delta}_k(l)\hat{\gamma}_{i-k}(l)\right)\ (i = 1,2,3,...). \tag{17}$$

Обозначим $K_1, K_2, K_3, ...$ – положительные корни уравнения (16), записанные в порядке возрастания. Очевидно, поскольку коэффициенты уравнения (16) безразмерные, то и его корни будут безразмерные. После того, как эти корни найдены, на основании (10) будем иметь частоты собственных поперечных колебаний стержня

$$\omega_j = \frac{K_j}{l^2}\sqrt{\frac{E_0 J_0}{m_0}}\ (j = 1,2,3,...). \tag{18}$$

Формулу (5) перепишем в виде $v(x) = -M(0)\dfrac{l^2}{E_0 J_0}\left(X_3(x) - \theta X_4(x)\right)$, где $\theta = -\dfrac{Q(0)l}{M(0)} = \dfrac{\bar{X}_3(l)}{\bar{X}_4(l)} = \dfrac{\hat{X}_3(l)}{\hat{X}_4(l)}$ – безразмерный параметр. Тогда, собственные формы колебаний, соответствующие частотам (18), предстанут в виде

$$v_j(x) = -M_j(0)\frac{l^2}{E_0 J_0}\left(X_3(x, K_j) - \theta_j X_4(x, K_j)\right)\ (j = 1,2,3,...), \tag{19}$$

причем θ_j можно определить по одной из формул $\theta_j = \dfrac{\overline{X}_3(l, K_j)}{\overline{X}_4(l, K_j)} = \dfrac{\hat{X}_3(l, K_j)}{\hat{X}_4(l, K_j)}$.

После того, как в аналитическом виде получено частотное уравнение и формулы для собственных форм колебаний стержня, становится актуальным вопрос об эффективной численной реализации найденных точных решений. А поскольку коэффициенты частотного уравнения (16) и собственные формы колебаний выражены через функции $\gamma_i(x), \delta_i(x), \overline{\gamma}_i(x), \overline{\delta}_i(x), \hat{\gamma}_i(x), \hat{\delta}_i(x)$ $(i = 0,1,2,...)$, то в первую очередь следует указать способ их вычисления.

Основная идея предлагаемого способа численной реализации заключается в аппроксимации исходных безразмерных функций многочленами:

$$\frac{1}{A(x)} = A_0 + A_1\left(\frac{x}{l}\right) + A_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + ... + A_s\left(\frac{x}{l}\right)^s; \tag{20}$$

$$B(x) = B_0 + B_1\left(\frac{x}{l}\right) + B_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + ... + B_p\left(\frac{x}{l}\right)^p, \tag{21}$$

где $A_n \, (n = 0,1,2,..., s), B_k \, (k = 0,1,2,..., p)$ – безразмерные коэффициенты. Используя далее подход, изложенный в работе [5], для функций (11), (12) можно получить квадратуры, а также выписать формулы, позволяющие определить константы $\overline{\gamma}_i(l), \overline{\delta}_i(l), \hat{\gamma}_i(l), \hat{\delta}_i(l)$ $(i = 1,2,3,...)$. Достоинством такого подхода является то, что он позволяет избежать процедуры многократного численного интегрирования. Опуская промежуточные математические выкладки, выпишем только итоговые формулы:

$$\gamma_0(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \sum_{j=0}^{s} \frac{A_j}{(j+1)(j+2)}\left(\frac{x}{l}\right)^j, \quad \gamma_i(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{4i+2} \sum_{j=0}^{i(p+s)+s} c_{i,j}^{(3)}\left(\frac{x}{l}\right)^j \; (i = 1,2,3,...); \tag{22}$$

$$\delta_0(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^3 \sum_{j=0}^{s} \frac{A_j}{(j+2)(j+3)}\left(\frac{x}{l}\right)^j, \quad \delta_i(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{4i+3} \sum_{j=0}^{i(p+s)+s} c_{i,j}^{(4)}\left(\frac{x}{l}\right)^j \; (i = 1,2,3,...); \tag{23}$$

$$\overline{\gamma}_0(l) = 1, \; \overline{\gamma}_i(l) = \sum_{j=0}^{i(p+s)} \frac{d_{i-1,j}^{(3)}}{(4i+j-1)(4i+j)}; \; \overline{\delta}_0(l) = 1, \; \overline{\delta}_i(l) = \sum_{j=0}^{i(p+s)} \frac{d_{i-1,j}^{(4)}}{(4i+j)(4i+j+1)}; \tag{24}$$

$$\hat{\gamma}_0(l) = 0, \; \hat{\gamma}_i(l) = \sum_{j=0}^{i(p+s)} \frac{d_{i-1,j}^{(3)}}{(4i+j-1)}; \; \hat{\delta}_0(l) = 1, \; \hat{\delta}_i(l) = \sum_{j=0}^{i(p+s)} \frac{d_{i-1,j}^{(4)}}{(4i+j)}. \tag{25}$$

Здесь коэффициенты $c_{i,j}^{(\lambda+2)} \; (\lambda = 1,2)$ последовательно вычисляются по рекуррентным формулам:

$$c_{0,j}^{(\lambda+2)} = \frac{A_j}{(j+\lambda)(j+\lambda+1)} \; (j = 0,1,2,..., s); \tag{26}$$

$$c_{i,j}^{(\lambda+2)} = \frac{1}{(4i+j+\lambda)(4i+j+\lambda+1)} \sum_{m=0}^{j} \frac{A_{j-m}}{(4i+m+\lambda-2)(4i+m+\lambda-1)} \sum_{k=0}^{m} B_{m-k} \, c_{i-1,k}^{(\lambda+2)}, \tag{27}$$

причем $A_{j-m}=0$, если $j-m>s$ и $B_{m-k}=0$ если $m-k>p$. Для коэффициентов $d_{i-1,j}^{(\lambda+2)}$ $(\lambda=1,2)$ справедлива формула

$$d_{i-1,j}^{(\lambda+2)}=\sum_{k=0}^{j}B_{j-k}c_{i-1,k}^{(\lambda+2)}, \qquad (28)$$

причем $B_{j-k}=0$, если $j-k>p$. Кроме того, в каждой из формул (27), (28) следует положить $c_{i-1,k}^{(\lambda+2)}=0$, если $k>i(p+s)-p$.

Пользуясь формулами (17), (24) - (28), можно вычислить коэффициенты частотного уравнения (16). Уравнения типа (16), в которых левая часть представляет собою сходящийся ряд, часто встречаются в задачах строительной механики. Оценка погрешности решения в таких ситуациях проводится путем сравнения результатов расчета с различным числом удерживаемых членов ряда [6]. Такая процедура позволяет при отыскании корней уравнения (16) достичь любой наперед заданной точности и фактически приводит к необходимости последовательного отыскания корней многочленов $f_n(K^2)=\eta_0+\eta_1K^2+\eta_2K^4+...+\eta_nK^{2n}=0$ $(n=1,2,3,...)$. Остановимся на указанной процедуре подробнее.

Пусть $K_1^{(n)}$, $K_1^{(n+1)}$ $(j=1,2,3,...)$ – наименьшие положительные корни многочленов $f_n(K^2)$, $f_{n+1}(K^2)$ соответственно. Если для некоторого текущего значения $n=1,2,3,...$ будет выполнено условие $\left|K_1^{(n+1)}-K_1^{(n)}\right|<\varepsilon$, то полагаем, что первый положительный корень уравнения (16) найден, а именно $K_1=K_1^{(n)}$. Точность вычисления этого корня равна ε. Аналогично определяем и другие положительные корни уравнения (16), записывая их в порядке возрастания $K_1,K_2,K_3,...$. Здесь $K_j=K_j^{(n)}$ $(j=1,2,3,...)$ при условии, что

$$\left|K_j^{(n+1)}-K_j^{(n)}\right|<\varepsilon. \qquad (29)$$

Таким образом, в итоге имеем новый метод отыскания частот и главных форм собственных поперечных колебаний консольного стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью и произвольной непрерывной переменной погонной массой. Для удобства программной реализации предлагаемый метод сформулируем в виде следующего алгоритма.

1. Аппроксимируем заданные безразмерные функции $\dfrac{1}{A(x)}$, $B(x)$ многочленами (20), (21). При этом степени многочленов s и p в каждом конкретном случае выбираем из условия адекватного приближения.

2. Для текущего значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, последовательно применяя формулы (26) - (28), вычисляем числа $c_{i,j}^{(\lambda+2)}$, $d_{i-1,j}^{(\lambda+2)}$ $(i = 1,2,3,\ldots, n+1)$ $(j = 0,1,2,\ldots, i(p+s))$. После этого, применяя формулу (17), находим коэффициенты η_i $(i = 1,2,3,\ldots, n+1)$ и формируем пару многочленов $f_n(K^2)$, $f_{n+1}(K^2)$.

3. Задаем точность вычисления корней ε. Находим положительные корни $K_j^{(n)}$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ многочлена $f_n(K^2)$, удовлетворяющие условию (29), и записываем их в порядке возрастания $K_1^{(n)}, K_2^{(n)}, K_3^{(n)}, \ldots$ (здесь разным корням будут соответствовать разные значения n). Тогда для корней частотного уравнения (16) полагаем $K_j = K_j^{(n)}$ $(j = 1,2,3,\ldots)$. Соответствующие частоты собственных поперечных колебаний стержня получим по формуле (18).

4. Подставляя значения коэффициентов колебаний в формулу (19), получим законы главных форм собственных колебаний стержня, соответствующие найденным частотам.

При необходимости численной реализации формулы (19), например для построения графиков главных форм колебаний, ряды (6), (8) можно заменить приближенными выражениями, удерживая в них некоторое конечное число первых членов ряда. При этом для вычислений следует применять квадратуры (22), (23).

ВЫВОДЫ

Предложен новый метод отыскания частот и главных форм собственных поперечных колебаний консольного стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью и произвольной непрерывной переменной погонной массой. Учитывая, что метод основан на точном решении дифференциального уравнения поперечных колебаний, его с очевидными изменениями можно применить не только для консольного стержня, но и при любых других граничных условиях. Представляются перспективными также дальнейшие исследования, связанные с возможностью распространения данного метода на случай стержневых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев В.А. Строительная механика / Киселев В.А. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
2. Баженов В.А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології / Баженов В.А., Перельмутер А.В., Шишов О.В. – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
3. Рабинович И.М. Достижения строительной механики стержневых систем в СССР / Рабинович И.М. – М., 1949.
4. Крутий Ю.С. Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой / Крутий Ю.С. // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. - №5. - С. 47-53.
5. Крутий Ю.С. Продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной массой (продолжение) / Крутий Ю.С. // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. -№4. - С. 26-34.
6. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики / Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. - Мн.: Вышэйшая школа, 1990. – 349 с.

Статья поступила в редакцию 19.03.2012 г.