УДК 624.041

Ю.С. Крутій, М.Г. Сур'янінов
Одеська державна академія будівництва та архітектури

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЩО ЛЕЖИТЬ НА ЗМІННІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Розглядається задача про вільні коливання прямокутної пластини, що лежить на змінній пружній основі, реакція якої описується моделлю Вінклера. Побудовано аналітичний розв'язок відповідного диференціального рівняння коливань пластини для випадку, коли коефіцієнт постелі є довільною неперервною функцією однієї з координат. Виписані частотні рівняння й головні форми вільних коливань пластини.

Ключові слова: *прямокутна пластина, вільні поперечні коливання, змінна пружна основа, аналітичний розв'язок, частотне рівняння, головні форми коливань.*

Ю.С. Крутий, Н.Г. Сурьянинов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассматривается задача о свободных колебаниях прямоугольной пластины, лежащей на переменном упругом основании, реакция которого описывается моделью Винклера. Построено аналитическое решение соответствующего дифференциального уравнения колебаний пластины для случая, когда коэффициент постели представляет собою произвольную непрерывную функцию одной из координат. Выписаны частотные уравнения и главные формы свободных колебаний пластины.

Ключевые слова: *прямоугольная пластина, свободные поперечные колебания, переменное упругое основание, аналитическое решение, частотное уравнение, главные формы колебаний.*

Yu. Krutiy, N. Suryaninov

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF FREE VIBRATION OF A PLATE LYING ON AN ELASTIC FOUNDATION OF VARIABLE

The problem of free oscillations of a rectangular plate lying on an elastic foundation, the reaction is described by the Winkler model. Two opposite sides of the plate are considered to be simply supported and the other two sides of the boundary conditions can be set arbitrarily. Analytical solution of the corresponding differential equation of oscillations of a plate constructed by the method of direct integration for the case when the ratio of the bed represents an arbitrary continuous function of one of the coordinates. An analytical representation of the frequency oscillations of the plate, allowing the determination of the frequency is reduced to finding a dimensionless parameter. The conditions for finding a dimensionless parameter are frequency equations, which are obtained after the implementation of the given boundary conditions on the edges of the plate. We write the main form of free oscillations of the plate.

Keywords: *rectangular plate, free transverse vibrations, alternating elastic base, analytic solution, frequency equation, the main waveforms.*

Постановка проблеми. Прямокутні пластини зі змінними геометричними та механічними параметрами знаходять широке застосування в різних галузях промисловості. Змінними параметрами тут можуть виступати, наприклад, товщина пластини, циліндрична жорсткість, пружна основа.

Фундаменти багатьох споруд, їх міжповерхові перекриття, а також днища циліндричних резервуарів часто являють собою пластини змінної товщини. Задачі про пластини змінної товщини виникають і в процесі розрахунків конструкцій, що примикають до льодового покрову. Подібні задачі широко зустрічаються також при розрахунках роторів турбін, різних клапанів і заслінок.

Однією з актуальних задач динаміки є проблема поперечних коливань пластин на змінній пружній основі. Прямокутна попередньо завантажена пластина може опиратися на пружну основу, як це має місце, наприклад, в покриттях автомобільних доріг, мостів або злітно-посадкових смуг. Загалом пластина на пружній основі є широко розповсюдженою розрахунковою моделлю конструктивних елементів об'єктів будівництва, машинобудування, суднобудування і т.п.

У розрахунках таких механічних систем доводиться зустрічатися з диференціальними рівняннями (або системами рівнянь) зі змінними коефіцієнтами. Успіхи математики в плані розв'язку таких рівнянь виглядають досить скромно – відомі лише деякі випадки побудови точних аналітичних розв'язків. Дотепер для розв'язку диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами переважно використовуються наближені й чисельні методи. Сучасний стан обчислювальної техніки дозволяє отримати результат практично з будь-якою заданою точністю. Однак це лише

© Ю.С. Крутій, М.Г. Сур'янінов

кількісний результат. Якісну оцінку механічної системи можна отримати тільки на основі аналітичного розв'язку.

Усе це свідчить про актуальність розробки аналітичних методів щодо оцінки напружено-деформованого стану пластин зі змінними параметрами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розвитку аналітичних методів розрахунку пластин змінної товщини присвячені публікації О.Б. Корєнєвої, з яких відзначимо фундаментальні роботи [9, 10]. Отримані нею розв'язки низки складних задач згину пластин, що лежать на пружній основі, у замкненому вигляді становлять безсумнівний інтерес, однак переважно мова йде про круглі й кільцеві пластини. Аналітичний розв'язок також покладено в основу дослідження [2] про згин прямокутної пластини, що лежить на пружній основі з двома параметрами. З робіт інших авторів відзначимо [4, 5], де на основі узагальнених рівнянь методу скінченних різниць отримані розв'язки задач про згин пластин й плит на пружній основі, що відрізняються високою точністю. Розрахунки одношарових і двошарових плит на пружній основі методом скінченних різниць виконані в [1]. Тут досліджена точність отриманих результатів залежно від способу розбивки й способу розв'язку. У публікації [8] розрахунок пластин ведеться методом скінченних елементів.

На наш погляд, особливої уваги заслуговує робота [7], в якій аналітичним методом досліджено власні коливання круглої пластини, що лежить на змінній пружній основі. Коефіцієнт постелі тут змінюється за степенним законом у напрямку радіуса. В статті [14] пораховано перші три зведені частоти коливань круглої трансверсально-ізотропної пластини, що лежить на пружній вінклеровій основі.

Щодо розрахунку прямокутних пластин на змінній пружній основі, то в науковій літературі зустрічаються розв'язки тільки для статичних задач. Так в публікації [16] розрахунок ведеться методом скінченних елементів, а в роботі [15] застосовано метод Гальоркіна. Відповідні розв'язки для задач динаміки авторам невідомі. Тому розв'язок задач динаміки пластин на змінній пружній основі представляється особливо актуальним.

Метою нашого дослідження є побудова аналітичного розв'язку задачі про вільні коливання пластини, що лежить на змінній пружній основі, реакція якої враховується за моделлю Вінклера.

Результати досліджень. Розглянемо вільні поперечні коливання прямокутної пластини $(0 \le x \le a;\ 0 \le y \le b)$ постійної циліндричної жорсткості D, що лежить на змінній пружній основі (рис.1), яка описується моделлю Вінклера. Як відомо, в такій моделі реакція пружної основи $R(x,y,t)$ та прогин $w(x,y,t)$ зв'язані рівністю $R(x,y,t) = -k\,w(x,y,t)$, де k – так званий коефіцієнт постелі. У загальному випадку коефіцієнт постелі є функцією x і y. У даній роботі будемо вважати, що він заданий довільною неперервною функцією, яка залежить тільки від змінної x, залишаючись постійним уздовж осі y, тобто $k = k(x)$.

Змінний коефіцієнт постелі представимо у вигляді $k(x) = k_0 A(x)$, де k_0 – постійний розмірний параметр (коефіцієнт постелі в деякій характерній точці, наприклад, у точці $x = 0$, а $A(x)$ – безрозмірна неперервна функція, що визначає закон зміни коефіцієнта постелі на відрізку $0 \le x \le a$.

На сторонах пластини $x = 0, x = a$ можуть бути задані будь-які граничні умови, а сторони $y = 0, y = b$ вважаються шарнірно опертими.

Точний розв'язок диференціального рівняння вільних коливань і формули для параметрів стану пластини. Як відомо [3], розв'язок задачі зводиться до знаходження розв'язку диференціального рівняння в частинних похідних

$$D\,\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_0 A(x) w = 0, \tag{1}$$

де $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, E – модуль пружності матеріалу, h – товщина пластини, μ – коефіцієнт Пуассона; Δ – оператор Лапласа; $w = w(x,y,t)$ – відхилення точки x, y від положення рівноваги в момент часу t (динамічний прогин); ρh – розподілена маса (маса одиниці площі пластини).

Розв'язок (1) шукаємо у вигляді

$$w = W(x,y)T(t), \tag{2}$$

де $W(x,y)$ – невідома амплітудна функція прогинів, що залежить лише від координат x і y (головна форма коливань), а $T(t)$ – функція часу, яка має вигляд

$$T(t) = T(0)\cos\omega t + \frac{\dot{T}(0)}{\omega}\sin\omega t .$$

Тут $T(0), \dot{T}(0)$ – параметри початкових умов руху; ω – невідома частота вільних коливань пластини.

Тоді для головної форми коливань одержимо

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \frac{1}{D}(k_0 A(x) - \rho h\omega^2)W = 0 . \tag{3}$$

За умовою, на краях $y = 0$ і $y = b$ повинні дорівнювати нулю прогин w і згинальний момент M_y, тобто

$$w = 0,\ \ M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 .$$

З метою заздалегідь задовольнити даним граничним умовам, розв'язок (3) обираємо у вигляді

$$W(x,y) = X(x)\,\sin\frac{m\pi y}{b} . \tag{4}$$

Після цього задача зводиться до знаходження невідомої функції $X(x)$ зі звичайного диференціального рівняння

$$X''''(x) - 2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 X''(x) + \left(\frac{k_0}{D}A(x) - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 \lambda\right)X(x) = 0 , \tag{5}$$

де λ – невідомий безрозмірний параметр,

$$\lambda = \left(\frac{b}{m\pi}\right)^4 \frac{\rho h\omega^2}{D} - 1 . \tag{6}$$

Крім прогину w, стан пластини характеризується також кутами повороту φ_x, φ_y, згинальними і крутним моментами M_x, M_y, M_{xy}, а також перерізуючими силами V_x, V_y. Зазначені характеристики будемо називати динамічними параметрами стану пластини.

Формули для зазначених параметрів стану, виражені через $X(x)$, будуть мати вигляд:

$$w = X(x)\sin\frac{m\pi y}{b}T(t) ; \tag{7}$$

$$\varphi_x = X'(x)\sin\frac{m\pi y}{b}T(t);\ \ \varphi_y = \frac{m\pi}{b}X(x)\cos\frac{m\pi y}{b}T(t) ; \tag{8}$$

$$M_x = -D\left(X''(x) - \mu\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 X(x)\right)\sin\frac{m\pi y}{b}T(t) ; \tag{9}$$

$$M_y = -D\left(\mu X''(x) - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 X(x)\right)\sin\frac{m\pi y}{b}T(t) ; \tag{10}$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{m\pi}{b}X'(x)\cos\frac{m\pi y}{b}T(t) ; \tag{11}$$

$$V_x = -D\left(X'''(x) - (2-\mu)\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 X'(x)\right)\sin\frac{m\pi y}{b}T(t) ; \tag{12}$$

$$V_y = -D\frac{m\pi}{b}\left((2-\mu)X''(x) - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 X(x)\right)\cos\frac{m\pi y}{b}T(t) . \tag{13}$$

Наряду з рівнянням (5) будемо розглядати також рівносильну йому систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = P(x)\Phi(x) , \tag{14}$$

де вектор невідомих і матриця коефіцієнтів мають вигляд:

© Ю.С. Крутій, М.Г. Сур'янінов

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} X(x)\\ X'(x)\\ X''(x)\\ X'''(x)\end{pmatrix}; \qquad (15)$$

$$P(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -(k_0/D)A(x)+(m\pi/b)^4\lambda & 0 & 2(m\pi/b)^2 & 0\end{pmatrix}$$

Розв'язок рівняння (5) побудуємо ***методом прямого інтегрування***, суть якого викладена в роботі [12] на прикладі диференціального рівняння поперечних коливань стрижня. При цьому поставимо мету – виразити шуканий розв'язок $X(x)$ через безрозмірні фундаментальні функції.

Розглянемо чотири нескінченних, поки що невідомих, системи функцій $\alpha_{n,0}(x)$, $\alpha_{n,k}(x)$ $(n=1,2,3,4)$ $(k=1,2,3,\dots)$, які будемо вважати неперервними разом зі своїми похідними включно до четвертого порядку. За допомогою цих функцій та їх похідних утворимо ряди:

$$X_n(x)=\alpha_{n,0}(x)+\alpha_{n,1}(x)+\alpha_{n,2}(x)+\alpha_{n,3}(x)+\dots; \qquad (16)$$

$$X_n^{(\nu)}(x)=\alpha_{n,0}^{(\nu)}(x)+\alpha_{n,1}^{(\nu)}(x)+\alpha_{n,2}^{(\nu)}(x)+\alpha_{n,3}^{(\nu)}(x)+\dots \ (\nu=1,2,3,4), \qquad (17)$$

де (ν) означає порядок похідної. Поки припускаємо, що ряди (16), (17) рівномірно збігаються, а значить, буде можлива операція їх послідовного почленного диференціювання.

Відповідно прийнятій в [12] термінології, функції $\alpha_{n,0}(x)$ $(n=1,2,3,4)$ будемо називати початковими, а функції $\alpha_{n,k}(x)$ $(n=1,2,3,4)$ $(k=1,2,3,\dots)$ – твірними. Знайдемо їх з умови, що $X_n(x)$ $(n=1,2,3,4)$ задовольняють рівнянню (5), тобто

$$X_n''''(x)-2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 X_n''(x)+\left(\frac{k_0}{D}A(x)-\lambda\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4\right)X_n(x)=0 \ (n=1,2,3,4). \qquad (18)$$

Підставляючи тут замість $X_n''''(x)$, $X_n''(x)$, $X_n(x)$ їхні значення (16), (17) і згрупувавши доданки спеціальним чином, будемо мати

$$\alpha_{n,0}''''(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{n,k}''''(x)-2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\alpha_{n,k-1}''(x)+\left(\frac{k_0}{D}A(x)-\lambda\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4\right)\alpha_{n,k-1}(x)\right)=0.$$

Остання рівність буде задовольнятись, коли будуть виконуватись умови:

$$\alpha_{n,0}''''(x)=0; \qquad (19)$$

$$\alpha_{n,k}''''(x)=2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\alpha_{n,k-1}''(x)-\left(\frac{k_0}{D}A(x)-\lambda\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4\right)\alpha_{n,k-1}(x) \ (k=1,2,3,\dots). \qquad (20)$$

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (19) оберемо у формі

$$\alpha_{n,0}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \ (n=1,2,3,4). \qquad (21)$$

Чотири рази інтегруючи рівняння (20), виразимо $\alpha_{n,k}(x)$ через $\alpha_{n,k-1}(x)$. Прагнучи отримати в результаті формулу з нульовими константами інтегрування, задаємо для всіх $n=1,2,3,4$ відповідні граничні умови:

$$\alpha_{n,k}(0)=\alpha_{n,k}'(0)=0 \ (k=1,2,3,\dots); \qquad (22)$$

$$\alpha_{n,k}''(0)=2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\alpha_{n,k-1}(0); \ \alpha_{n,k}'''(0)=2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\alpha_{n,k-1}'(0) \ (k=1,2,3,\dots). \qquad (23)$$

У результаті для значень $k=1,2,3,\dots$ одержимо

$$\alpha_{n,k}(x) = 2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \int\limits_0^x\int\limits_0^x \alpha_{n,k-1}(x)dxdx + \lambda\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 \int\limits_0^x\int\limits_0^x\int\limits_0^x\int\limits_0^x \alpha_{n,k-1}(x)dxdxdxdx -$$
$$-\frac{k_0}{D}\int\limits_0^x\int\limits_0^x\int\limits_0^x\int\limits_0^x A(x)\alpha_{n,k-1}(x)dxdxdxdx. \tag{24}$$

У підсумку маємо рекурентну формулу, згідно з якою кожній початковій функції $\alpha_{n,0}(x)$ буде відповідати своя нескінченна множина твірних функцій $\alpha_{n,k}(x)$. Для таких функцій рівності (18) тотожно задовольняються за побудовою. Отже, формулами (16), (21), (24) визначено чотири розв'язки $X_n(x)$ $(n = 1,2,3,4)$ рівняння (5). Кожному із цих розв'язків за формулою (15) буде відповідати свій вектор – розв'язок системи (14)

$$\Phi_n(x) = \begin{pmatrix} X_n(x) \\ X_n'(x) \\ X_n''(x) \\ X_n'''(x) \end{pmatrix} \quad (n = 1,2,3,4). \tag{25}$$

Тоді матриця, складена з даних векторів

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} X_1(x) & X_2(x) & X_3(x) & X_4(x) \\ X_1'(x) & X_2'(x) & X_3'(x) & X_4'(x) \\ X_1''(x) & X_2''(x) & X_3''(x) & X_4''(x) \\ X_1'''(x) & X_2'''(x) & X_3'''(x) & X_4'''(x) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

також задовольняє систему (14).

Обчислимо значення $\Omega(0)$. Вважаючи $x = 0$ у формулах (16), (17) і враховуючи граничні умови (22), (23) одержимо

$$\Phi_n(0) = \begin{pmatrix} X_n(0) \\ X_n'(0) \\ X_n''(0) \\ X_n'''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{n,0}(0) \\ \alpha_{n,0}'(0) \\ \alpha_{n,0}''(0) + 2(m\pi/b)^2\,\alpha_{n,0}(0) \\ \alpha_{n,0}'''(0) + 2(m\pi/b)^2\,\alpha_{n,0}'(0) \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\Phi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2(m\pi/b)^2 \\ 0 \end{pmatrix};\ \Phi_2(0) = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2(m\pi/b)^2 \end{pmatrix};\ \Phi_3(0) = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \Phi_4(0) = \frac{1}{a^3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\Omega(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 2(m\pi/b)^2 & 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 2(m\pi/b)^2/a & 0 & 1/a^3 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Очевидно, визначник матриці (26) являє собою вронскіан [6, 13], для якого з урахуванням (27) знаходимо $|\Omega(0)| = \dfrac{1}{a^4} \neq 0$. Звідси випливає [13], що вектори (25) лінійно незалежні. Отже, матриця $\Omega(x)$ є фундаментальною матрицею системи (14). Помноживши $\Omega(x)$ праворуч на постійну матрицю $\Omega^{-1}(0)$, будемо мати нову фундаментальну матрицю $\Lambda(x) = \Omega(x)\Omega^{-1}(0)$, для якої

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Як відомо [6, 13], фундаментальна матриця, що має властивість (28), визначається однозначно й називається матрицантом.

Таким чином, допустивши на початку рівномірну збіжність рядів (16), (17) ми дійшли висновку, що матриця $\Lambda(x)$, яка утворена із сум $X_n(x)$, $X_n^{(\upsilon)}(x)$ $(\upsilon = 1,2,3)(n = 1,2,3,4)$ цих рядів, є матрицантом для системи (14). З іншого боку, у теорії диференціальних рівнянь доведено, що матрицант системи рівнянь із неперервними коефіцієнтами завжди являє собою абсолютно й рівномірно збіжний матричний ряд [6]. Із зазначеного факту, у силу однозначного визначення матрицанту, випливає абсолютна й рівномірна збіжність рядів (16), (17) для значень $\upsilon = 1,2,3$. Така ж збіжність рядів (17) для значення $\upsilon = 4$ випливає безпосередньо з тотожності (18).

Розв'язок системи (14) виражається за допомогою матрицанту за відомою формулою $\Phi(x) = \Lambda(x)\Phi(0)$. Звідси будемо мати:

$$X(x) = X(0)\left(X_1(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 X_3(x)\right) + aX'(0)\left(X_2(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 X_4(x)\right) + \\ + a^2 X''(0)X_3(x) + a^3 X'''(0)X_4(x); \tag{29}$$

$$X^{(\nu)}(x) = X(0)\left(X_1^{(\nu)}(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 X_3^{(\nu)}(x)\right) + aX'(0)\left(X_2^{(\nu)}(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 X_4^{(\nu)}(x)\right) + \\ + a^2 X''(0)X_3^{(\nu)}(x) + a^3 X'''(0)X_4^{(\nu)}(x) \quad (\nu = 1,2,3). \tag{30}$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (5) знайдено. Постійні інтегрування в цьому розв'язку виражені через початкові параметри $X(0), X'(0), X''(0), X'''(0)$.

Початкові функції (21) від самого початку обрані безрозмірними. Враховуючи цю обставину, на підставі результатів роботи [11] доходимо висновку про безрозмірну природу твірних функцій (24). Як наслідок, суми $X_n(x)$ $(n = 1,2,3,4)$ рядів (16) також будуть безрозмірними. Що стосується сум $X_n^{(\upsilon)}(x)$ $(\upsilon = 1,2,3)(n = 1,2,3,4)$ рядів (17) із похідних, то вони будуть безрозмірні тільки разом із множником a^ν $(\nu = 1,2,3)$. Інакше кажучи, безрозмірними будуть функції $\tilde{X}_n(x) = aX_n'(x)$, $\hat{X}_n(x) = a^2 X_n''(x)$, $\hat{X}_n(x) = a^3 X_n'''(x)$ $(n = 1,2,3,4)$, що також випливає з роботи [11].

Формули (30), виражені через функції $\tilde{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$ $(n = 1,2,3,4)$, запишуться у вигляді:

$$X'(x) = \frac{1}{a}X(0)\left(\tilde{X}_1(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \tilde{X}_3(x)\right) + X'(0)\left(\tilde{X}_2(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \tilde{X}_4(x)\right) + \\ + aX''(0)\tilde{X}_3(x) + a^2 X'''(0)\tilde{X}_4(x); \tag{31}$$

$$X''(x) = \frac{1}{a^2}X(0)\left(\hat{X}_1(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \hat{X}_3(x)\right) + \frac{1}{a}X'(0)\left(\hat{X}_2(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \hat{X}_4(x)\right) + \\ + X''(0)\hat{X}_3(x) + aX'''(0)\hat{X}_4(x); \tag{32}$$

$$X'''(x) = \frac{1}{a^3}X(0)\left(\hat{X}_1(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \hat{X}_3(x)\right) + \frac{1}{a^2}X'(0)\left(\hat{X}_2(x) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 \hat{X}_4(x)\right) + \\ + \frac{1}{a}X''(0)\hat{X}_3(x) + X'''(0)\hat{X}_4(x); \tag{33}$$

Частотні рівняння та головні форми вільних коливань пластини. Реалізація граничних умов на краях пластини $x = 0$, $x = a$ за допомогою формул (7) -(13), (29), (31) - (33) приведе до системи лінійних рівнянь відносно невідомих початкових параметрів $X(0), X'(0), X''(0), X'''(0)$. Із умови сумісності рівнянь системи одержимо частотне рівняння. Природу частотного рівняння будуть визначати значення безрозмірних функцій $X_n(x)$, $\tilde{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$ $(n=1,2,3,4)$ у точках $x=0$, $x=a$. Тому його безрозмірність гарантована.

Невідомим у частотному рівнянні буде виступати безрозмірний числовий параметр λ. Тому наступна наша мета – гарантувати можливість запису частотного рівняння у вигляді числового ряду по степенях параметра λ. Для цього фундаментальні розв'язки $X_a(x)$, що визначаються рядами (16), а також функції $\tilde{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$ слід представити у вигляді рядів по степенях λ.

Після знаходження безрозмірного параметра λ, для частоти вільних коливань пластини на підставі формули (6) будемо мати

$$\omega=\sqrt{(1+\lambda)}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \tag{34}$$

Цілком зрозуміло, що послідовно підставляючи у формулу (24) вирази для функцій $\alpha_{n,0}(x),\alpha_{n,1}(x),...,\alpha_{n,k-1}(x)$, одержимо многочлен степені k відносно параметра λ зі змінними коефіцієнтами. Іншими словами для твірних функцій справедливе представлення

$$\alpha_{n,k}(x)=\beta_{n,k,0}(x)+\lambda\beta_{n,k,1}(x)+...+\lambda^k\beta_{n,k,k}(x)\ \ (k=1,2,3,...), \tag{35}$$

де функції $\beta_{n,k,l}(x)$ $(k=1,2,3,...)(l=0,1,2,...,k)$ підлягають визначенню.

Підставляючи в формули (22), (23) замість функцій $\alpha_{n,k}(x)$ їх значення (35) й прирівнюючи в отриманих рівностях коефіцієнти при однакових степенях λ, для функцій $\beta_{n,k,l}(x)$ одержимо такі граничні умови:

$$\beta_{n,k,l}(0)=\beta'_{n,k,l}(0)=0\ \ (k=1,2,3,...)(l=0,1,2,...,k-1); \tag{36}$$

$$\beta''_{n,k,l}(0)=2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\beta_{n,k-1,l}(0),\ \ \beta'''_{n,k,l}(0)=2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\beta'_{n,k-1,l}(0)\ \ (k=1,2,3,...)(l=0,1,2,...,k-1); \tag{37}$$

$$\beta_{n,k,k}(0)=\beta'_{n,k,k}(0)=\beta''_{n,k,k}(0)=\beta'''_{n,k,k}(0)=0\ \ (k=1,2,3,...). \tag{38}$$

Формулу (35) можна поширити також і на випадок $k=0$, трактуючи вираз (21), як многочлен нульового степеню відносно λ, тобто

$$\alpha_{n,0}(x)=\beta_{n,0,0}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}. \tag{39}$$

Підставляючи (35) у формулу (24), одержимо

$$\sum_{l=0}^{k}\lambda^l\beta_{n,k,l}(x)=2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\sum_{l=0}^{k-1}\lambda^l\int_0^x\int_0^x\beta_{n,k-1,l}(x)\,dxdx+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4\sum_{l=1}^{k}\lambda^l\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x\beta_{n,k-1,l-1}(x)\,dxdxdxdx-$$
$$-\frac{k_0}{D}\sum_{l=0}^{k-1}\lambda^l\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x A(x)\beta_{n,k-1,l}(x)\,dxdxdxdx\ \ (k=1,2,3,...).$$

Прирівнюючи тут для кожного $k=1,2,3,...$ вирази при однакових степенях λ^l $(l=0,1,2,...,k)$, приходимо до рівностей:

Випадок 1. Для $k=1,2,3,...;\ l=0$

$$\beta_{n,k,0}(x)=2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\int_0^x\int_0^x\beta_{n,k-1,0}(x)\,dxdx-\frac{k_0}{D}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x A(x)\beta_{n,k-1,0}(x)\,dxdx; \tag{40}$$

Випадок 2. Для $k=2,3,4,...;\ l=1,2,...,k-1$

$$\beta_{n,k,l}(x)=2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\int_0^x\int_0^x\beta_{n,k-1,l}(x)\,dxdx+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x\beta_{n,k-1,l-1}(x)\,dxdxdxdx-$$
$$-\frac{k_0}{D}\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x A(x)\beta_{n,k-1,l}(x)\,dxdxdxdx; \tag{41}$$

Випадок 3. Для $k = 1,2,3,...;\ l = k$

$$\beta_{n,k,k}(x) = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 \int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x \beta_{n,k-1,k-1}(x)\,dxdxdxdx\,.$$

Остання формула з урахуванням (39) набирає вигляду

$$\beta_{n,k,k}(x) = \frac{1}{(n+4k-1)!}\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^{4k}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+4k-1}. \tag{42}$$

Отже функції $\beta_{n,k,l}(x)$ $(k = 1,2,3,...)(l = 1,2,3,...,k)$ повністю визначені формулами (40) - (42). При цьому безпосередньою перевіркою можна переконатися, що дані функції задовольняють граничних умов (36) - (38).

Підставляючи у формулу (16) замість функцій $\alpha_{n,0}(x)$, $\alpha_{n,k}(x)$ $(n = 1,2,3,4)$ $(k = 1,2,3,...)$ їх значення (39), (35) і збираючи подібні при однакових степенях λ, одержимо

$$X_n(x) = \delta_{n,0}(x) + \lambda\delta_{n,1}(x) + \lambda^2\delta_{n,2}(x) + \lambda^3\delta_{n,3}(x) + ...\ \ (n = 1,2,3,4), \tag{43}$$

де

$$\delta_{n,i}(x) = \sum_{p=i}^{\infty}\beta_{n,p,i}(x)\ \ (i = 0,1,2,...)\,. \tag{44}$$

Тоді для функцій $\tilde{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$ $(n = 1,2,3,4)$ будемо мати:

$$\tilde{X}_n(x) = \tilde{\delta}_{n,0}(x) + \lambda\tilde{\delta}_{n,1}(x) + \lambda^2\tilde{\delta}_{n,2}(x) + \lambda^3\tilde{\delta}_{n,3}(x) + ...; \tag{45}$$

$$\hat{X}_n(x) = \hat{\delta}_{n,0}(x) + \lambda\hat{\delta}_{n,1}(x) + \lambda^2\hat{\delta}_{n,2}(x) + \lambda^3\hat{\delta}_{n,3}(x) + ...; \tag{46}$$

$$\hat{X}_n(x) = \hat{\delta}_{n,0}(x) + \lambda\hat{\delta}_{n,1}(x) + \lambda^2\hat{\delta}_{n,2}(x) + \lambda^3\hat{\delta}_{n,3}(x) + ..., \tag{47}$$

де

$$\tilde{\delta}_{n,i}(x) = a\delta'_{n,i}(x),\ \hat{\delta}_{n,i}(x) = a^2\delta''_{n,i}(x),\ \hat{\delta}_{n,i}(x) = a^3\delta'''_{n,i}(x)\ \ (n = 1,2,3,4)\ (i = 0,1,2,...)\,. \tag{48}$$

Завдяки знайденим представленням (43) - (47), частотне рівняння завжди можна подати у вигляді

$$\eta_0 + \eta_1\lambda + \eta_2\lambda^2 + \eta_3\lambda^3 + ... = 0\,, \tag{49}$$

де η_k $(k = 0,1,2,...)$ – безрозмірні коефіцієнти, спосіб обчислення яких буде залежати від випадку граничних умов на краях $x = 0, x = a$. Також ці коефіцієнти будуть залежати від параметра m.

Позначимо через $\lambda_{1,m}, \lambda_{2,m}, \lambda_{3,m}, ...$ – корені частотного рівняння (49), що відповідають заданому параметру m й записані в порядку зростання. Тоді за формулою (34) одержимо спектр частот вільних коливань пластини

$$\omega_{jm} = \sqrt{(1+\lambda_{jm})}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\ \ (m = 1,2,3,...)(j = 1,2,3...)\,. \tag{50}$$

Знайденим кореням λ_{jm} за формулою (29) буде відповідати наступний розв'язок рівняння (5)

$$X_{jm}(x) = X_{jm}(0)\left(X_1(x,\lambda_{jm}) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 X_3(x,\lambda_{jm})\right) + aX'_{jm}(0)\left(X_2(x,\lambda_{jm}) - 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2 X_4(x,\lambda_{jm})\right) +$$
$$+ a^2X''_{jm}(0)X_3(x,\lambda_{jm}) + a^3X'''_{jm}(0)X_4(x,\lambda_{jm})\ \ (m = 1,2,3,...)(j = 1,2,3...).$$

У результаті, згідно з формулою (4), головні форми коливань пластини, які відповідають частотам (50), запишуться у вигляді

$$W_{jm}(x,y) = X_{jm}(x)\sin\frac{m\pi y}{b}\ \ (m = 1,2,3,...)(j = 1,2,3...)\,.$$

Записуючи формули для головних форм коливань у кожному конкретному випадку граничних умов на краях $x = 0, x = a$, надалі умовимося представляти їх у вигляді

$$W_{jm}(x,y) = D_{jm}W^*_{jm}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right),$$

де D_{jm} – постійний розмірний множник, а $W^{*}_{jm}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$ – безрозмірна функція, що визначає закон головної форми коливань.

Обмежений обсяг статті не дозволяє привести тут формули для чисельної реалізації алгоритму й числові приклади. Ці питання будуть висвітлені в нашій наступній публікації.

Висновки. Побудовано аналітичний розв'язок задачі про вільні коливання прямокутної пластини, що лежить на змінній пружній основі, яка задана моделлю Вінклера, для випадку, коли коефіцієнт постелі є довільною неперервною функцією однієї з координат. Отримано частотні рівняння й головні форми вільних коливань пластини. В подальшому буде вказаний спосіб чисельної реалізації отриманих тут розв’язків і, як наслідок, сформульовано алгоритм дослідження вільних коливань пластини.

1. Андреев В.И. Расчет плит переменной жесткости на упругом основании методом конечных разностей / Андреев В.И., Барменкова Е.В., Матвеева А.В. // Вестник МГСУ. – 2014. - №4. - С. 30-38.
2. Большаков А.А. Прямоугольная пластина на двухпараметрическом упругом основании: аналитическое решение / Большаков А.А // Вестник СамГУ: Естественнонаучная серия. – 2011. - Вып.8 (89). – С. 128-133.
3. Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху / Василенко М.В., Алексейчук О.М. // – К. : Вища шк., 2004. – 525 с.
4. Габбасов Р.Ф. Обобщенные уравнения метода конечных разностей и их применение к расчету изгибаемых пластин переменной жесткости / Габбасов Р.Ф., Мусса Сали // Известия вузов: Строительство. - 2004. – №5. – С. 17-22.
5. Габбасов Р.Ф. Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету плит на упругом основании / Габбасов Р.Ф., Н.Б. Уварова // Вестник МГСУ. – 2012. - №4. – С. 102-107.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. / Гантмахер Ф.Р. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
7. Доронин А.М. Собственные колебания круглой пластинки, лежащей на переменном упругом основании типа Винклера / Доронин А.М., Соболева В.А // Вестник Нижегородского университета им. Лобачевского. – 2014. - №4 (1). - С. 254-258.
8. Запорожец Е.В. Расчет методом конечных элементов осесимметричного изгиба пластин на упругом основании / Запорожец Е.В., Красовский В.Л. // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури.– 2002. – №5. – С. 16-23.
9. Коренева Е.Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения / Коренева Е.Б. – М.: АСВ, 2009. – 240 с.
10. Коренева Е.Б. Развитие аналитических методов расчета пластин переменной толщины и их практические приложения: автореферат. дис. на получение науч. степеня доктор. / Коренева Е.Б. – М.: МГСУ, 1999. – 32 с.
11. Крутий Ю.С. Продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной массой (продолжение) / Крутий Ю.С. // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. - №4. – С. 26-34.
12. Крутий Ю.С. Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой / Крутий Ю.С. // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. - №5. – С. 47-53.
13. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Федорюк М.В. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
14. Шваб’юк В.І., Ротко С.В., Гуда О.В., Коливання транстропної пластини на пружній основі під тиском рідини / Шваб’юк В.І., Ротко С.В., Гуда О.В // Сучасні проблеми механіки і математики. В 3-х томах. Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. – Львів: ІПММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2013. – с. 182-184.
15. Mofid M. A plate on Vinkler foundation with variable coefficient / Mofid M., Noroozi M. // Transaction A: Civil Engineering. - 2009. - V.16. - № 3. - P. 249-255.
16. Witt M. Roz wiaszanie ptyty spoczywajacej na podtozu spezystym o zmiennym wspotczynniku podatnosci metoda elementow skonczonych / Witt M // Pr. nauk. Inst. inz. Lad. Pwr. - 1974. - № 13. - P. 143-149.

Стаття надійшла до редакції 29.03.2016.

© Ю.С. Крутій, М.Г. Сур’янінов