

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЁТА ГИБКИХ БАЛОК, ИСПЫТЫВАЮЩИХ ДЕЙСТВИЕ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Дызов К.Г., к.т.н., доцент

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Публикаций, посвящённых расчёту гибких балок, испытывающих действие локальных нагрузок, автору не известно. Вероятно, это связано с тем, что дифференциальное уравнение изгиба гибкой балки, разрешённое относительно нагрузки, крайне громоздкое [1], вследствие чего становится проблемной её численная реализация. Более простое точное уравнение (1) в правой части содержит моменты. Поэтому расчёты выполняются в линейной постановке, руководствуясь утверждением [3, с. 230], что “в связи с малостью деформации балки¹ в формуле (1) можно пренебречь членом \tilde{w}'^2 и записать линейное уравнение”, что действительно справедливо для не очень больших величин нагрузки.

Уравнение упругого равновесия гибкой балки (1) записано в предположении “стержня малой жёсткости” [2, с. 14]

$$\frac{\tilde{w}''(\tilde{x})}{\left[1 + \tilde{w}'^2\right]^{3/2}} = \pm \tilde{M}(\tilde{x}). \quad (1)$$

Знак в правой части выбирается в соответствии со знаком момента $\tilde{M}(\tilde{x})$ и направлением координатных осей.

Здесь и далее, обобщённый прогиб - $\tilde{w}(\tilde{x}) = w(x)/L$, $\tilde{x} = x/L$ - обобщённая координата, $\tilde{a} = a/L$ - обобщённая координата приложения локальной нагрузки, $\tilde{M}(\tilde{x}) = \frac{M(x) \cdot L}{E \cdot I}$ - обобщённый момент,

$\tilde{q}(\tilde{x}) = \frac{q(x) \cdot L^3}{E \cdot I}$ - величина обобщённой нагрузки, $q(x)$ - сама нагрузка, действующая на балку, $E \cdot I$ - жёсткость балки на изгиб, E - мо-

¹ $w_{\max} = (0,01 - 0,001) \cdot l$ и $\theta_{\max} \leq 1^\circ$

дуть упругости материала, I - момент инерции сечения балки, L - длина балки.

Численный аналог (1) представляется в виде следующей итерационной схемы

$$\tilde{w}_{n+1}''(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^{m_1} a_i^{(n)} \tilde{x}^i + e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} b_i^{(n)} \tilde{x}^i, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

$e(\tilde{x} - \tilde{a})$ - единичная функция.

Полиномы $\sum_{i=0}^{m_1} a_i^{(n)} \tilde{x}^i$ и $\sum_{i=0}^{m_2} b_i^{(n)} \tilde{x}^i$ аппроксимируют выражения

$$(1 + \tilde{w}_n''^2(\tilde{x}))^{3/2} \cdot L_1(\tilde{x}), \quad (3)$$

$$(1 + \tilde{w}_n''^2(\tilde{x}))^{3/2} \cdot L_2(\tilde{x}). \quad (4)$$

В качестве начального приближения $\tilde{w}_0''(\tilde{x})$ берётся её линейный аналог. Составляющие функции $L_1(\tilde{x})$ и $L_2(\tilde{x})$ тоже выбираются из линейного решения, в сумме дают значение момента $\tilde{M}(\tilde{x})$ и учитывают его особенности (изломы, скачки, см. рис. 1 и 2), а также количественные и качественные характеристики локальных нагрузок, действующих на балку. В [4] изложена эффективная методика расчёта балок, испытывающих действия локальных нагрузок.

На рис. 1 представлены графики $L_1(\tilde{x})$ и $L_2(\tilde{x})$ шарнирно опертой балки под действием сосредоточенной силы в точке $\tilde{a} = 0,5$ с интенсивностью $\tilde{q} = 1$, а на рис. 2 представлена эпюра $\tilde{M}(\tilde{x})$, которая является результатом их суперпозиции.

Интегрируем (2)

$$\begin{aligned} \tilde{w}'_{n+1}(\tilde{x}) &= \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_i^{(n)} \tilde{x}^{i+1}}{i+1} + e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{x}^{i+1}}{i+1} - \\ &\quad - e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{a}^{i+1}}{i+1} + c_1, \\ \tilde{w}_{n+1}(\tilde{x}) &= \sum_{i=0}^{m_1} \frac{a_i^{(n)} \tilde{x}^{i+2}}{(i+1)(i+2)} + e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{x}^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - \\ &\quad - e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{a}^{i+2}}{(i+1)(i+2)} - e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m_2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{a}^{i+1} \tilde{x}}{i+1} + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ e(\tilde{x} - \tilde{a}) \sum_{i=0}^{m2} \frac{b_i^{(n)} \tilde{a}^{i+2}}{i+1} + c_1^{(n)} \tilde{x} + c_0^{(n)}.$$

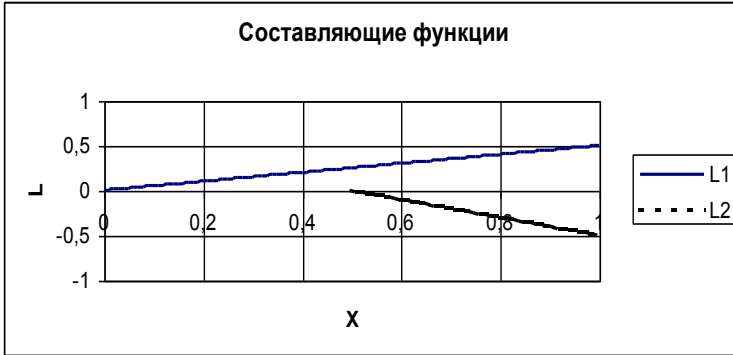


Рис. 1

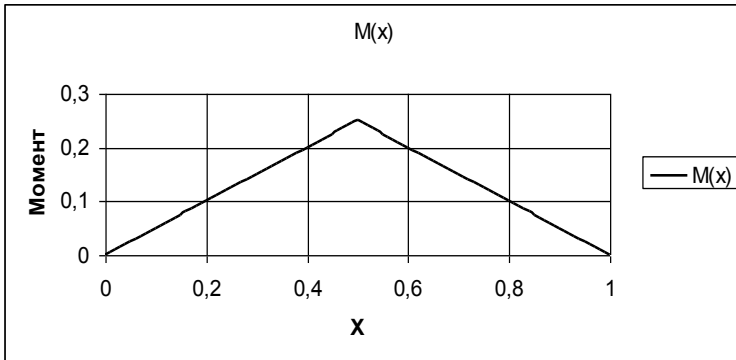


Рис. 2

Константы $c_1^{(n)}$ и $c_0^{(n)}$ в (5) определяются из граничных условий и уточняются на каждой итерации.

Алгоритм метода

1. Для заданных исходных данных решается задача в линейной постановке, $n = 0$.

2. Строятся аппроксимирующие полиномы $\sum_{i=0}^{m1} a_i^{(0)} \tilde{x}^i$ и $\sum_{i=0}^{m2} b_i^{(0)} \tilde{x}^i$.

3. Из соотношений (5) находятся константы интегрирования $c_1^{(0)}$ и $c_0^{(0)}$.

4. Вычисляются $\tilde{w}_n(\tilde{x})$ и $\tilde{w}'_n(\tilde{x})$.

5. Строятся аппроксимирующие полиномы $\sum_{i=0}^{m1} a_i^{(n+1)} \tilde{x}^i$ и $\sum_{i=0}^{m2} b_i^{(n+1)} \tilde{x}^i$.

6. Вычисляются $\tilde{w}_{n+1}(\tilde{x})$ и $\tilde{w}'_{n+1}(\tilde{x})$.

7. Вычисляется погрешность $\Delta = \max \left\{ \text{abs} \left[1 - \frac{\tilde{w}_n(\tilde{x})}{\tilde{w}_{n+1}(\tilde{x})} \right] \right\}$.

8. Если Δ больше заданной расчётной точности δ , то $n = n + 1$ и переход на пункт 4, иначе на пункт 9.

9. Итоговые значения $\tilde{w}_{n+1}(\tilde{x})$ и $\tilde{w}'_{n+1}(\tilde{x})$. Конец процесса.

Полиномы в пунктах 2 и 5 алгоритма строились по программе [5,6] с высокой точностью, $m1 = 5, m2 = 5$, коэффициент детерминации (адекватности) $r^2 = 99,98\% - 100\%$.

На рис. 3 представлена зависимость прогиба $\tilde{w}(\tilde{x})$ от величины сосредоточенной обобщённой нагрузки \tilde{q} в середине пролёта ($\tilde{a} = 0,5$) шарнирно опертой гибкой балки. На рис. 4 представлены эпюры линейных и нелинейных прогибов при $\tilde{q} = 10$, а на рис. 4 их первые производные.

Заключение

В заключение заметим, что изложенный метод является численно – аналитическим и быстро сходится. Например, при получении резуль-

татов, представленных на рис. 4 и 5, количество итераций n при $\delta = 10^{-7}$ и $\Delta = 10^{-7} - 10^{-9}$ составило 10.

При расчётах использовался пакет программ Slender_beam_2012, реализующий изложенный метод и охватывающий все основные виды опирания гибких балок и все типы локальных воздействий.

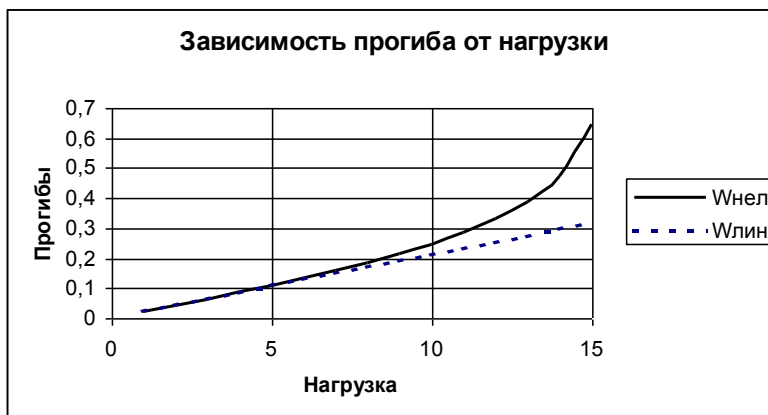


Рис. 3

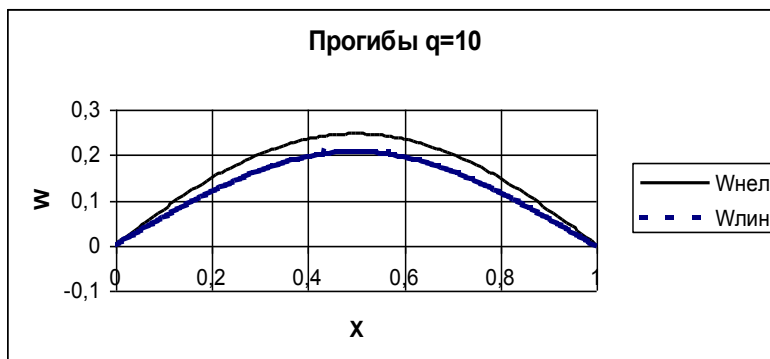


Рис. 4

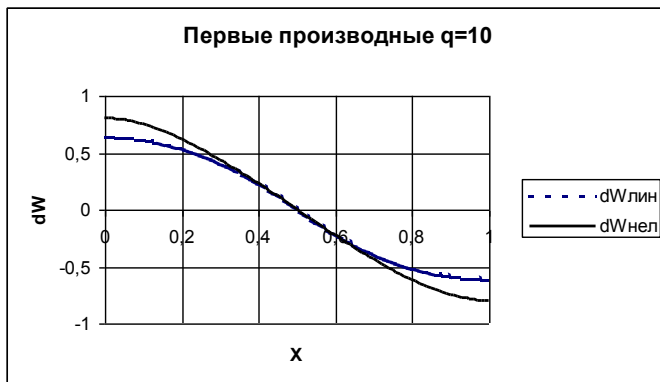


Рис. 5

Summary

Propose a method of calculation of flexible beams undergoing the action of local loads.

Литература

1. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи об изгибе балки. Математическое моделирование и краевые задачи. Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием, 15 – 17 сентября 2011. Часть 1, Самара, - 4 с. www.mmikz.ru/works/maket1:sing.pdf
2. Попов Е. П. Теория и расчёт гибких упругих стержней, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986, -296 с.
3. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов, «Наукова думка», Киев, 1975, - 704 с.
4. Дызов К. Г. К применению сингулярных функций в расчёте балок при действии локальных нагрузок, Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури, випуск 45, 2012 р., - 10 с.
5. Дызов К. Г. Интерактивное построение полиномиальных моделей в MS EXCEL, Тезисы доклада на XVII международной научно – методической конференции «Управление качеством подготовки специалистов», 19 – 20 апреля 2012 г., ОГАСА, Одесса
6. Дызов К. Г. К построению полиномиальных интерактивных моделей в MS EXCEL, - Тезисы доклада Международной научно – технической конференции «Компьютерные науки: образование, наука, практика», 14 -16 июня 2012 г., Академия наук судостроения Украины, г. Николаев