УДК 517.986

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С КОМПЛЕКСНЫМ СОПРЯЖЕНИЕМ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ (НЕ НЕТЕРОВСКОМ) СЛУЧАЕ

Ковалева Г.В., *к.ф.-м.н.*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

Пусть Γ – единичная окружность на комплексной плоскости, D^+ – внутренность единичного круга, а D^- – его внешность. Рассмотрим краевую задачу с комплексно сопряженными значениями неизвестной функции:

$$a(t)\varphi^+(t)+b(t)\overline{\varphi^+(t)}+c(t)\varphi^-(t)+d(t)\overline{\varphi^-(t)}=f(t),\quad t\in\Gamma, \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ – ограниченные измеримые функции на Γ; такие, что их логарифмы интегрируемы на Γ, $\varphi^\pm(t)$ – угловые предельные значения на Γ функций, аналитических соответственно в областях $D^\pm$, $\varphi^\pm(t)$ и $f(t)$ принадлежат $L_p(\Gamma)$ – пространству функций, интегрируемых в степени p на Γ, $p > 1$. Как известно, подобные задачи возникают при рассмотрении некоторых вопросов теории упругости и теории жесткости [1, 2, 3].

Применив к (1) оператор комплексного сопряжения, можно перейти к эквивалентной системе двух краевых задач ([4])

$$A(t)\Phi^+(t) + B(t)\Phi^-(t) = F(t), \tag{2}$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} \overline{a(t)} & \overline{td(t)} \\ \overline{tb(t)} & \overline{c(t)} \end{pmatrix},\qquad B(t)=e\,\overline{A(t)}\,e,\qquad e=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t)=\begin{pmatrix} f(t) \\ \overline{tf(t)} \end{pmatrix},\qquad \Phi^\pm(t)=\begin{pmatrix} \varphi^\pm(t) \\ \overline{t\varphi^\mp(t)} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Эта система является нормально разрешимой, если $\det A(t)\neq 0$ на Γ ([4]). В настоящей работе рассматривается случай, когда это условие нарушено. Тогда приходится либо налагать дополнительные условия на правую часть $f(t)$, либо допускать, что функции $\varphi^\pm(t)$ имеют неинтегрируемые особенности.

1. Пусть матрицу $A(t)$ можно представить в виде

$$A(t) = R(t)C(t),\quad \text{где}\quad R(t)=\begin{pmatrix} \rho_1(t) & \rho_2(t) \\ \rho_2(t) & \rho_1(t)) \end{pmatrix},\quad \det C(t)\neq 0\ \text{ на } \Gamma. \tag{4}$$

Здесь $\rho_i(t)$ – неотрицательные вещественнозначные функции, а элементы матрицы $C(t)$ ограничены на Γ. Тогда $B(t) = R(t)e\overline{C(t)}\,e$. Если при этом

$$R^{-1}(t)F(t) \in L_p^2(\Gamma),\ p > 1,$$

или, что то же самое,

$$\left(\rho_1^2(t) - \rho_2^2(t)\right)^{-1}\left(\rho_1(t)f(t) - \rho_2(t)\overline{tf(t)}\right) \in L_p(\Gamma),\ p > 1,$$

то система (2) эквивалентна нормально разрешимой системе

$$C(t)\Phi^+(t) + e\,\overline{C(t)}\,e\Phi^-(t) = R^{-1}(t)F(t).$$

Частный случай. Представление (4), в частности, возможно, если все коэффициенты задачи (1) $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $d(t)$ обращаются в ноль в одних и тех же точках контура Γ, и порядок этих нулей одинаков. Тогда $\rho_2(t)=0$. Если $\rho_1^{-1}(t)f(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, то вместо задачи (1) можно рассматривать следующую эквивалентную задачу:

$$a_1(t)\varphi^+(t) + b_1(t)\overline{\varphi^+(t)} + c_1(t)\varphi^-(t) + d_1(t)\overline{\varphi^-(t)} = \rho^{-1}(t)f(t),\quad t\in\Gamma,$$

где $a_1(t) = \rho_1^{-1}(t)a(t)$, $b_1(t) = \rho_1^{-1}(t)b(t)$, $c_1(t) = \rho_1^{-1}(t)c(t)$ и $d_1(t) = \rho_1^{-1}(t)d(t)$.

2. Предположим, что матрица $A(t)$ допускает представление вида

$$A(t)=C(t)R(t),\quad R(t)=\begin{pmatrix} \rho_1^+(t) & \rho_2^+(t) \\ \rho_3^+(t) & \rho_4^+(t) \end{pmatrix},$$

где элементы матрицы $C(t)$ ограничены на Γ, $\det C(t)\neq 0$ на Γ, элементы матрицы $R(t)$ ограничены на Γ и допускают аналитическое продолжение в область D^+. Тогда в силу (3) $B(t)=e\,\overline{C(t)}\,e\cdot e\,\overline{R(t)}\,e$, причем элементы матрицы $\overline{R(t)}$ допускают аналитическое продолжение в область D^-.

В этом случае в системе (2) можно перейти к новым неизвестным функциям $\Psi^+(t) = R(t)\Phi^+(t)$, $\Psi^-(t) = e\,\overline{R(t)}\,e\ \Phi^-(t)$, и получить нормально разрешимую систему

$$C(t)\Psi^+(t) + e\,\overline{C(t)}\,e\Psi^-(t) = F(t). \tag{5}$$

Пусть $\Psi^\pm(t) = \begin{pmatrix} \psi^\pm(t) \\ t\psi^\mp(t) \end{pmatrix}$ – решения системы (5). Тогда решения задачи (1) можно найти по формулам

$$\varphi^+(t) = (\det R(t))^{-1}\left(\rho_4^+(t)\psi^+(t) - \rho_2^+(t)\overline{t\psi^-(t)}\right),$$

$$\varphi^-(t) = \left(\det\overline{R(t)}\right)^{-1}\left(\overline{\rho_1^+(t)}\psi^-(t) - \overline{\rho_3^+(t)t\psi^+(t)}\right),$$

и эти функции могут оказаться неинтегрируемыми на Г.

Частный случай. Пусть функции $a(t)$ и $b(t)$ имеют нули одного порядка в одних и тех же точках контура Г. Тогда существует такая неотрицательная вещественнозначная функция $\rho_1(t)$ на Г, что функции $\rho_1^{-1}(t)a(t)$ и $\rho_1^{-1}(t)b(t)$ ограничены и отличны от нуля на Г. Пусть аналогичное условие выполняется и для функций $c(t)$ и $d(t)$, то есть существует такая неотрицательная вещественнозначная функция $\rho_2(t)$ на Г, что функции $\rho_2^{-1}(t)c(t)$ и $\rho_2^{-1}(t)d(t)$ ограничены и отличны от нуля на Г. Под $\rho_k^+(t)$ будем понимать функцию, совпадающую по модулю с функцией $\rho_k(t)$ и допускающую аналитическое продолжение в область D^+. В качестве такой функции можно взять, например, угловые предельные значения на Г внешней функции $\rho_k^+(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \ln \rho_k(e^{i\theta}) d\theta \right\}$ [5]. При этих условиях справедливы следующие равенства:

$$A(t)=C(t)R(t), \quad \text{где} \quad C(t)=\begin{pmatrix} a_1(t) & \overline{td_1(t)} \\ tb_1(t) & \overline{c_1(t)} \end{pmatrix}, \quad R(t)=\begin{pmatrix} \rho_1^+(t) & 0 \\ 0 & \overline{\rho_2^+(t)} \end{pmatrix},$$

$a_1(t) = (\rho_1^+(t))^{-1}a(t)$, $b_1(t) = \overline{(\rho_1^+(t))^{-1}}b(t)$, $c_1(t) = \overline{(\rho_2^+(t))^{-1}}c(t)$, $d_1(t) = (\rho_2^+(t))^{-1}d(t)$.

Если $\det C(t)\neq 0$ на Г, то система (5) является нормально разрешимой. Тогда решения задачи (1) получаются из решений $\Psi^{\pm}(t) = \begin{pmatrix} \psi^{\pm}(t) \\ \overline{t\psi^{\mp}(t)} \end{pmatrix}$ системы (5) по формулам:

$$\varphi^+(t) = (\rho_1^+(t))^{-1}\psi^+(t), \qquad \varphi^-(t) = \overline{(\rho_2^+(t))^{-1}}\psi^-(t).$$

Заключение

В настоящей работе рассматривается случай, когда краевая задача не является нормально разрешимой, то есть условие $\det A(t)\neq 0$ на Г нарушено. Тогда приходится либо налагать дополнительные условия на правую часть $f(t)$, либо допускать, что функции $\varphi^{\pm}(t)$ имеют неинтегрируемые особенности.

Summary

We consider boundary value problem with complex conjugate values of piecewise analytic function that occurs in some problems of the theory of elasticity and rigidity. Present work suggests methods of solving this problem in non-normal (non-Noetherian) case, i.e. when the corresponding operator's symbol vanishes on the contour.

Литература

1. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970. – 379 с.
2. Галин Л.А. Контактные задачи упругости и вязкоупругости. – М. Наука, 1980. – 304 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
5. Гарнетт дж. Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.