

КРИТЕРИЙ СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ПАРНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОЕКТОРАМИ

Полетаев Г.С., к.ф.-м.н., доц.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
Украина*

Вводные положения и предмет изучения

0.1. В теоретических и прикладных вопросах встречаются разных видов и классов уравнения, которые можно трактовать как парные. С их помощью бывает возможным моделировать взаимосвязи известных и неизвестных величин [1-7]. Простейшие парные уравнения относительно неизвестного вектора из R_3 возникают в некоторых задачах: статики на определение сил взаимодействия; - кинематики твердого тела - на восстановление угловых скоростей [2, 4, 6], а также других. Парные уравнения с неизвестной матрицей, включая парные матричные уравнения с проекторами, также встречаются в задачах механики. Например, в задачах, которые можно поставить для двух разных совокупностей, одинаковых, внутри каждой совокупности, по геометрическому и физическому описанию, тел (о равновесии,- о прогибах и других). Аналогично, для двух разных совместно рассматриваемых тел (в частности, элементов строительных конструкций, сооружений) под действием, одинаковой на каждое из этих тел, нагрузки при «п» её вариантах. Известны, связанные с интегральными типа Винера–Хопфа, парные интегральные уравнения типа свертки [8-12]. Это один из замечательных объектов математических исследований. Они связаны с задачами математической и теоретической физики, задачами теории аналитических функций, родственными задаче Римана–Гильберта–Привалова. Оказывается, что в сериях постановок задачи разрешимости, все отмеченные парные уравнения допускают трактовку, как частные реализации в конкретных кольцах парных уравнений (уравнений – моделей) общих видов в абстрактных кольцах с факторизационными парами [1, 3, 5, 7]. Отметим, что для ряда классов и видов уравнений: числовых, функциональных, матричных, интегральных, бывает возможным обнаружить связь между некоторыми решениями. Ограничимся далее выяснением такой связи для соответствующих парных матричных уравнений с проекторами.

0.2. Рассмотрим ниже вопрос о связи решений парных матричных уравнений с проекторами относительно неизвестной матрицы $X \in R_{n \times n}$ вида:

$$\begin{cases} [A_1 X]^- = C^-, \\ [A_2 X]^+ = B^+. \end{cases} \quad (1)$$

Причём, между решениями уравнений с произвольной правой частью и решений этого же вида (1) абстрактных парных матричных уравнений с проекторами и этих же уравнений с правой частью, равной единичной матрице [1, 7]. Уравнение (1) не переписывается в форме одной системы линейных алгебраических уравнений. Это важно, как для обзорности, упрощений при больших значениях « n », так и для демонстрации единства подхода к парным уравнениям.

Рассматриваемые здесь парные матричные уравнения с проекторами (1) являются общим подвидом абстрактных парных матричных уравнений с проекторами в кольце матриц общего вида:

$$\begin{cases} (A_{11} X A_{12})^- = C^-, \\ (A_{21} X A_{22})^+ = B^+. \end{cases} \quad (2)$$

При этом важна трактовка кольца квадратных матриц, как кольца с факторизационной парой подколец, образованной соответствующими треугольными. В свою очередь, парные уравнения (2) можно трактовать как реализации в кольцах матриц соответствующих парных уравнений в абстрактных кольцах с факторизационными парами [1, 3, 5, 7].

1. Обозначения и постановка задачи

1.1. Следуя [13, 14] (ср.[15]) обозначим через $R_{n \times n}$ кольцо вещественных числовых квадратных матриц размера $n \times n$, $n \geq 2$, $n \in N$. Пусть $R_{n \times n}^+$, $R_{n \times n}^-$ - подкольца нижних и верхних треугольных матриц из $R_{n \times n}$, соответственно. Через p^- , p^+ обозначим [1, 3, 5, 7, 15] коммутирующие проекторы: $R_{n \times n} \rightarrow R_{n \times n}^-$, $R_{n \times n} \rightarrow R_{n \times n}^+$, соответственно. Каждой матрице $A \in R_{n \times n}$ они ставят в соответствие матрицы $A^- := p^-(A) \in R_{n \times n}^-$, $A^+ := p^+(A) \in R_{n \times n}^+$, получающиеся из A заменой её элементов, расположенных для A^- ниже, а для A^+ выше главной диагонали, нулями. Положим $p^0 := p^+ p^- (= p^- p^+)$; $p_+ := p^+ - p^0$; $p_- := p^- - p^0$; $R_{n \times n}^0 := p^0(R_{n \times n})$, $(R_{n \times n})_{\pm} := p_{\pm}(R_{n \times n})$. Легко видеть, что, $R_{n \times n}^{\mp} := p^{\mp}(R_{n \times n})$, $R_{n \times n}^0 := R_{n \times n}^+ \cap R_{n \times n}^-$. Результат

применения введенных проекторов к матрицам, а также принадлежность матрицы из $R_{n \times n}$ подмножеству $R_{n \times n}^{\mp, 0}$, $(R_{n \times n})_{\pm}$ будем отмечать соответствующими индексами $+$, $-$, 0 .

1.2. В уравнениях вида (1), относительно неизвестной квадратной матрицы $X \in R_{n \times n}$, матрицы-коэффициенты $A_1, A_2 \in R_{n \times n}$ и матрицы $C^- \in R_{n \times n}^-$, $B^+ \in R_{n \times n}^+$ считаются известными. Всякую матрицу $X \in R_{n \times n}$, удовлетворяющую парному матричному уравнению с проекторами (1), будем называть его решением. Под задачей о связи решений будем понимать здесь задачу, которая состоит в отыскании формулы, представляющей решения в кольце матриц $R_{n \times n}$ уравнения (1) через известные его коэффициенты, операции в $R_{n \times n}$, действующие в этом кольце проекторы и решения $X = X_E \in R_{n \times n}$ парного уравнения:

$$\begin{cases} [A_1 X_E]^- = E, \\ [A_2 X_E]^+ = E; \end{cases} \quad (3)$$

где $E \in R_{n \times n}$ - единичная матрица в $R_{n \times n}$, а также условий существования такой связи [1, 7].

2. Главный результат

2.1. Решение $X = X_E \in R_{n \times n}$ абстрактного парного уравнения (1) с матрицами-коэффициентами $A_1, A_2 \in R_{n \times n}$ и правой частью $C^- = B^+ = E$, где $E \in R_{n \times n}$ - единичная матрица, то есть уравнения (3), играет в теории разрешимости этих уравнений (1) особую роль. В соответствующих условиях через это решение может быть представлено решение $X \in R_{n \times n}$ уравнения (1) с произвольной правой частью $C^- \in R_{n \times n}^-$, $B^+ \in R_{n \times n}^+$. Установлены следующие теоремы о связи решений парных уравнений (1) и (3) в $R_{n \times n}$.

Теорема 1 (Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами). Пусть в уравнении (1) матрицы-коэффициенты $A_1, A_2 \in R_{n \times n}$, $n \in N$, $n \geq 2$ и существует матрица - решение $X_E \in R_{n \times n}$ уравнения (3). Тогда для того, чтобы уравнение (1) при любой правой части $C^- \in R_{n \times n}^-$, $B^+ \in R_{n \times n}^+$ имело решение $X \in R_{n \times n}$, представимое через X_E, A_1, A_2, C^-, B^+ формулой:

$$X = X_E \{ [(A_1 X_E)^{-1} C^-]_- + [(A_2 X_E)^{-1} B^+]^+ \}, \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы матрицы X_E, A_1, A_2 были неособенными, $\det A_1 = \det A_2 \neq 0$ и выполнялось условие совместности:

$$[(A_1 X_E)^{-1} C^-]^0 = [(A_2 X_E)^{-1} B^+]^0. \quad (5)$$

Если существуют решение $X_E \in R_{n \times n}$ уравнения (3) и решение $X \in R_{n \times n}$ уравнения (1) с некоторой правой частью $C^- \in R_{n \times n}^-$, $B^+ \in R_{n \times n}^+$, тогда это последнее решение X в $R_{n \times n}$ для указанной правой части единственное.

Теорема 2. (Критерий связи решений парных матричных уравнений с проекторами). Пусть в уравнении (1) матрицы-коэффициенты $A_1, A_2 \in R_{n \times n}$, $n \in N$, $n \geq 2$, $\det A_1 = \det A_2 \neq 0$ и существует матрица - решение $X_E \in R_{n \times n}$ уравнения (3). Тогда для того, чтобы это уравнение (1) при любой правой части $C^- \in R_{n \times n}^-$, $B^+ \in R_{n \times n}^+$ имело решение $X \in R_{n \times n}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие совместности (5). При его выполнении уравнение (1) имеет в $R_{n \times n}$ единственное решение и это решение можно найти через X_E, A_1, A_2, C^-, B^+ по формуле (4).

Отметим, что условие (5), по сути, является требованием совпадения соответствующих диагональных элементов произведений матриц в квадратных скобках слева и справа в равенстве (5). Опускаемое доказательство, можно провести непосредственно или на основе результатов [1, 7].

3. О решении $X = X_E \in R_{n \times n}$, следствиях и иллюстративных примерах

3.1. Решение $X_E \in R_{n \times n}$ парного уравнения (3) существует и может быть построено по явным формулам, например, при соответствующих правильных факторизациях матриц-коэффициентов или элементов, строящихся по этим матрицам A_1, A_2 [1].

3.2. Иногда матрицу-решение $X_E \in R_{n \times n}$ уравнения (3) найти весьма легко. Например, в серии случаев, когда матрицы-коэффициенты являются неособенными треугольными. В частности,

при $A_1 = A_1^+ \in R_{n \times n}^+, A_2 = A_2^- \in R_{n \times n}^-$ и таких, что $A_1^0 = A_2^0; |A_1^0| \neq 0$, решение $X_E = (A_1^0)^{-1} = (A_2^0)^{-1}$. Действительно, в этом случае, $[A_1 X_E]^- = [A_1^+ (A_1^0)^{-1}]^- = A_1^0 (A_1^0)^{-1} = E$;
 $[A_2 X_E]^+ = [A_2^- (A_1^0)^{-1}]^+ = [A_2^- (A_2^0)^{-1}]^+ = A_2^0 (A_2^0)^{-1} = E$. Если же, кроме того, все элементы главных диагоналей неособенных треугольных матриц-коэффициентов $A_1 = A_1^+ \in R_{n \times n}^+, A_2 = A_2^- \in R_{n \times n}^-$ являются единицами, то оказывается, что $X_E = E$. Условие (5) и формула (4) в этом случае преобразуются, соответственно, к виду:

$$[A_2^{-1} B^+]^0 = [A_1^{-1} C^-]^0, \quad (6)$$

$$X = [A_1^{-1} C^-]_- + [A_2^{-1} B^+]^+ \quad (7)$$

Укажем, что установленные результаты можно углубить, используя известные или получаемые из известных условия обратимости и условия существования правильной факторизации квадратных матриц [15, С. 276-278; 16, С. 43-52].

3.3. Приведём простейшие иллюстрирующие некоторые идеи применений результатов примеры.

1.) Установить существование (не существование) матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \text{ удовлетворяющей при каких-либо, заранее}$$

неизвестных, например, вещественных числовых элементах $z_{I_{21}}; z_{II_{12}}$, — парному уравнению:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{I_{21}} & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_{II_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (8)$$

Стало быть, и каждому из матричных с частично неизвестной правой частью уравнений, составляющих это парное уравнение (8).

Такую матрицу X будем называть искомым решением уравнения (8).

Очевидно, что парное уравнение (8) представляет собой парное уравнение, относительно неизвестной матрицы X , вида:

$$\begin{cases} A_1 X = C, \\ A_2 X = B; \end{cases}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_{I_{21}} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_{I_{21}} & 0 \end{pmatrix} = C^- + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_{I_{21}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = C^0;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & z_{II_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z_{II_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^+ + \begin{pmatrix} 0 & z_{II_{12}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^0.$$

С помощью введенных проекторов, легко обнаружить, что при сделанных предположениях всякое искомое решение $X \in R_{2 \times 2}$ уравнения (8) является также решением в $R_{2 \times 2}$ парного уравнения (1) с указанными выше значениями матриц $A_1, A_2; C^-, B^+$. Обратное, всякое решение $X \in R_{2 \times 2}$ парного уравнения (1) с такими же коэффициентами A_1, A_2 и правой частью C^-, B^+ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = C^0; B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B^0,$$

будет и искомым решением парного уравнения (8), если выбрать вещественные числа $z_{I_{21}}; z_{II_{12}}$, соответствующими.

Очевидно, $X_E = E$, где через X_E , как и ранее, обозначено, решение в $R_{2 \times 2}$ уравнения вида (3) при

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $A_1 X_E = A_1; (A_1 X_E)^{-1} = A_1^{-1}; (A_1^{-1})^0 = E;$

$A_2 X_E = A_2; (A_2 X_E)^{-1} = A_2^{-1}; (A_2^{-1})^0 = E;$

$\left[(A_1 X_E)^{-1} C^- \right]^0 = \left[A_1^{-1} C^0 \right]^0 = C^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$

$\left[(A_2 X_E)^{-1} B^+ \right]^0 = \left[A_2^{-1} B^0 \right]^0 = B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq C^0.$

Условие (6), в которое преобразуется, необходимое и достаточное, условие (5), - нарушено. Решений $X \in R_{2 \times 2}$ уравнения (1), а, стало быть, и искомым решений парного уравнения (8) в $R_{2 \times 2}$ не существует.

2.) В развёрнутом виде, парное с частично неизвестной правой частью уравнение (8), относительно неизвестной матрицы X, можно представить равносильной системой восьми равенств, неизвестными в которой являются элементы x_{ij} матрицы X; $i, j = 1, 2;$ а также некоторые правые части уравнений системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.) x_{11} = 1; \\ 2.) x_{12} = 0; \\ 3.) 2x_{11} + x_{21} = z_{I_{21}} = ? \\ 4.) 2x_{12} + x_{22} = 2; \\ 5.) x_{11} - x_{21} = 1; \\ 6.) x_{12} - x_{22} = z_{II_{12}} = ?; \\ 7.) x_{21} = 0; \\ 8.) x_{22} = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Задача состоит в нахождении элементов матрицы X, при условии, что $z_{I_{21}}; z_{II_{12}}$ пока неизвестны. Решений системы уравнений (9) относительно $x_{ij}; i, j = 1, 2$ не существует. Равенства 2, 4, 8 противоречивы при любых вещественных числах $z_{I_{21}}; z_{II_{12}}$.

В примере было "n"=2; $R_{n \times n} = R_{2 \times 2}$. При "n"≥3, даже, запись эквивалентной парному матричному уравнению с проекторами системы линейных алгебраических уравнений становится громоздкой. А, если уравнение и систему типа (8), (9) решать при

$n=10;100;1000;\dots$? Вместе с тем, при произвольном $n \geq 2$, $n \in N$ для матричных парных уравнений типа (1), (8) и равносильных им систем типа (9), опираясь на приведенные результаты, можно получать содержательные выводы.

3.) Найти в $R_{n \times n}$; $n \geq 2$, матрицу $X = (x_{ij}); i, j = \overline{1, n}$, такую, что:

$$\begin{cases} p^- [A_1 X] = p^- [C], \\ p^+ [A_2 X] = p^+ [B]; \end{cases} \quad (10)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21}^{(1)} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-11}^{(1)} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdot & \cdot & a_{nm-1}^{(1)} & 1 \end{pmatrix} = A_1^+;$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & a_{3n}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & a_{n-1n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2^-;$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nn} \end{pmatrix} = (x_{ij}); i, j = \overline{1, \dots, n};$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-1n-1} & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix} = C^+;$$

так что

$$p^{-}[C] = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} = C^0;$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & b_{n-1n-1} & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = B^{-};$$

так что

$$p^{+}[B] = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & b_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} = B^0.$$

Последнее парное уравнение (10) с указанными коэффициентами и правой частью в развёрнутом относительно элементов неизвестной матрицы $X \in R_{n \times n}$ виде привело бы к $2n^2$ равенствам. Если $n = 10$, это 200, а при $n = 1000$, - это $2 \cdot 10^6$ равенств с частично неизвестными правыми частями. Громоздкость такой формы записи при больших "n" здесь очевидна. Вместе с тем, если, хотя бы, при одном значении $i = i_0, 1 \leq i \leq n; n \in N, n \geq 2$ окажется, что $c_{i_0 i_0} \neq b_{i_0 i_0}$, то условие (6), равносильное в рассматриваемой ситуации совпадению диагональных матриц:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & b_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & b_{nn} \end{pmatrix},$$

будет невыполненным. Следовательно, уравнение (10) будет неразрешимым в $R_{n \times n}$. Так будет, например, когда в (10):

$$c_{11} = 1 = c_{22} = \dots = c_{nn}; b_{11} = 1 = b_{22} = \dots = b_{n-1, n-1}; b_{nn} = -1.$$

Такого рода ситуацию мы имели в первом примере выше.

В парном уравнении (10), при этом, матрицы-коэффициенты A_1, A_2 , являясь, соответственно, нижней и верхней треугольными, - на диагоналях имеют все элементы равные "1". Остальные их элементы, из, необязательно, равных нулю, могут быть любыми числами.

4.) Для парного с проекторами уравнения относительно $X \in R_{n \times n}$; $n \geq 2$:

$$\begin{cases} [A_1 X]^- = C^-, \\ [A_2 X]^+ = B^+; \end{cases} \quad (11)$$

как и для матричного парного относительно неизвестной матрицы $X \in R_{n \times n}$ с некоторыми соответствующими и пока неизвестными матрицами $Z_{\pm} \in (R_{n \times n})_{\pm}$ уравнения:

$$\begin{cases} A_1 X = C^- + Z_+ \\ A_2 X = B^+ + Z_-, \end{cases} \quad (12)$$

где известные $A_1 = A_1^+; A_2 = A_2^-; A_1^0 = A_2^0 = E; E$ - единичная матрица из $R_{n \times n}$, очевидно, что при $C^- = B^+ = E$ матрица $X = X_E = E \in R_{n \times n}$ является решением. Тогда, при, необходимом и достаточном, условии:

$$[A_2^{-1} B^+]^0 = [A_1^{-1} C^-]^0, \quad (13)$$

-прочих условиях теоремы 2 и любых $C^- \in (R_{n \times n})^-$; $B^+ \in (R_{n \times n})^+$,
 - неизвестную матрицу $X \in R_{n \times n}$ можно найти по формуле:

$$X = [A_1^{-1}C^-]_- + [A_2^{-1}B^+]^+. \quad (14)$$

5.) Пусть требуется найти матрицу $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ - решение

в $R_{3 \times 3}$, матричного парного уравнения с проекторами вида (11), где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в случаях: а) } \tilde{N}^- = B^+ = E;$$

$$\text{б) } C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае а), очевидно, матрица – решение $X = X_E = E$, где E - единичная матрица, размера 3×3 .

В случае б), т.е. при $C^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, вычисляем:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверяем условие (13):

$$(A_1^{-1}C^-)^0 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix};$$

$$(A_2^{-1}B^+)^0 = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{*} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{*} \end{pmatrix} \neq (A_1^{-1}C^-)^0.$$

Условие (13) не выполнено. Искомых решений нет.

Переходя к СЛАНУ, парное уравнение (11) для рассматриваемого случая можно переписать в виде 18 равенств, часть из которых имеет неизвестные правые части и среди которых действительно есть противоречивые.

6.) Пусть при прежних (как в п. 5.) матрицах-коэффициентах A_1, A_2 в (11), (12) будет:

$$C^- = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем парное, равносильное уравнению (11), относительно неизвестной матрицы $X \in R_{3 \times 3}$, уравнение (12) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 4 \end{pmatrix} (\equiv C^- + Z_+), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} (\equiv B^+ + Z_-). \end{array} \right. \quad (15)$$

Это уравнение (15) можно переписать и так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + Z_+, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} + Z_-; \end{array} \right.$$

где

$Z_+ \in (R_{3 \times 3})_+, Z_- \in (R_{3 \times 3})_-$ — соответствующие пока неизвестные матрицы, легко вычисляемые, после нахождения искомой матрицы $X \in R_{3 \times 3}$. Нахождение этих матриц $Z_+ \in (R_{3 \times 3})_+, Z_- \in (R_{3 \times 3})_-$ здесь мы своей целью не ставим.

Не проверяя условие совместности (13), для парного уравнения (11) построим по формуле (14) матрицу $X \in R_{3 \times 3}$:

$$X = [A_1^{-1}C^-]_- + [A_2^{-1}B^+]^+ = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right] + \\ + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^+ = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подстановкой выясним, решение ли это? Последовательно, находим:

$$\left\{ \begin{aligned} (A_1 X)^- &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^- = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = C^-; \\ (A_2 X)^+ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B^+. \end{aligned} \right.$$

Итак, построенная матрица $X \in R_{3 \times 3}$ - действительно решение парного уравнения (11), а, стало быть, и парного уравнения (15), относительно неизвестной матрицы $X \in R_{3 \times 3}$, при неизвестных пока $Z_+ \in (R_{3 \times 3})_+$, $Z_- \in (R_{3 \times 3})_-$, соответственно, в рассматриваемой ситуации. В силу теоремы 2, необходимое и достаточное, условие в форме (13) выполнено, а решение это единственное в $R_{3 \times 3}$ для рассматриваемого парного уравнения (11) относительно матрицы $X \in R_{3 \times 3}$. Действительно,

$$(A_1^{-1}C^-)^0 = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}; (A_2^{-1}B^+)^0 = \begin{pmatrix} \boxed{9} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = (A_1^{-1}C^-)^0.$$

Выводы

Ряд полезных положений, в частности, о связи решений парных матричных уравнений с проекторами (1) можно получать в рамках единых подходов. Эти подходы основаны на трактовке указанных уравнений как реализаций, в соответствующем кольце матриц,

некоторых изучаемых особо уравнений в кольцах с факторизационными парами. Итоги изучения связи решений абстрактных парных матричных уравнений с проекторами применимы, например, при решении конкретных, вида (1), парных матричных уравнений с проекторами и связанных с ними уравнений вида (12), а также для ориентировки в направлениях поиска версий соответствующих положений для интегральных уравнений типа свёртки и некоторых других.

Отметим, что основные результаты работы доложены автором на Международной научно-технической конференции «Гидротехническое и транспортное строительство», проведенной в Одесской государственной академии строительства и архитектуры в октябре 2012 года.

Summary

The connection between the solutions of the abstract paired matrix equations with respect to unknown matrix $X \in R_{nm}, n \in N; n \geq 2$ is presented. This criterion is proved.

Литература

1. Полетаев Г. С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой // Укр. матем. журн. – 1991, т. 43, № 9. – С. 1201 – 1213.
2. Полетаев Г. С. Парные уравнения в кольце с факторизационной парой и задача об угловой скорости // I Междунар. конф. «Экологическое моделирование и оптимизация в условиях техногенеза». Тез. докл. – Минск, БГПА, 1996. – С. 148.
3. Полетаев Г. С. Парные уравнения с правильно факторизуемыми коэффициентами // Укр. матем. конгресс. Международн. конф. по функц. анализу. – К., 2001. – С. 79.
4. Полетаев Г. С. О парных и тройных векторных уравнениях // Вестник Херсон. гос. техн. ун-та.- Вып. 2(15) – Херсон, 2002. – С. 373 – 377.
5. Полетаев Г. С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами // Вісник Харківського національного університету.-2002, № 582. – Серія “Математика, прикл. матем. і мех. ”. – Вып. 52. – С. 143 – 149.
6. Подлозний Э.Д., Полетаев Г.С. Об уравнениях в кольцах с векторным произведением и задачах механики//Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук.-2002.-№3.-С. 95-101.
7. Poletaev G.S. Connection of solutions of the abstract paired equations in the rings with factorization pairs// Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, Operator Theory: Advances and Applications. -2009. - Vol. 191.-P. 479-484.

8. Рапопорт И.М. О некоторых «парных» интегральных и интегродифференциальных уравнениях // Сборник трудов института математики АН УССР. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1949. — 12. — С. 102—118.

9. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И./ Уравнения типа свертки. - М.: Наука, 1978. - 296с.

10. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи матем. наук. — 1958. — 13, вып. 5(83). — С. 3—120.

11. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. О парном интегральном уравнении и его транспонированном I // Теорет. и прикл. математика. - Львов.- 1958.- №1.- С. 58-81.

12. Полетаев Г.С. Парное уравнение типа свертки с ядрами из различных банаховых алгебр // Укр. матем. журн. — 1991. — 43, № 6. — С. 803—813.

13. Полетаев Г. С. О постановках, матричных моделях некоторых обратных задач механики балок и представлениях факторизованных матриц влияния // Матем. модел. в образ., науке и пром. – Международн. ак. наук ВШ. – С.-Пб. – 2000. – С. 146–148.

14. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами. – К., 1988. – 20 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики: 88.31).

15. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators - I: Algebraic Theory and Examples // J. Funct. Anal. – 1972. –v. 9, № 3. – P. 262 – 295.

16. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988.-549с.