УДК- 539.376

ВЛИЯНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

Бекирова М.М., *к.т.н., доцент,* **Орлов А.Н.,** *к.т.н., доцент*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

При изучении устойчивости формы упругих стержней различают потерю устойчивости первого рода, связанную с возможностью существования двух равновесных форм и потерю устойчивости второго рода, связанную с возможностью неограниченного развития перемещений.

Поскольку ползучесть увеличивает деформации, а, следовательно и перемещения, то естественно следует рассматривать потерю устойчивости второго рода.

Рассматривается гибкий однородный и изотропный стержень из материала подчиняющегося законам линейной ползучести с поперечным сечением симметричным относительно одной из главных осей.

На опорах имеются жесткие связи, исключающие возможность линейных смещений, а также связи, обладающие упругими свойствами и ползучестью, препятствующие поворотам. Деформативные свойства стержня характеризуются модулем упругости $\mathring{A}(\mathrm{t})$ и полной относительной деформацией $\delta(\mathrm{t},\tau)$, а опорных связей $-\mathring{A}_1(\mathrm{t}), \delta_2(\mathrm{t},\tau)$, и $\mathring{A}_2(\mathrm{t}), \delta_2(\mathrm{t},\tau)$. Стержень имеет несовершенство в виде начальной погиби $y_0(x)$ и сжат постоянной во времени силой *P*. Изгиб стержня, а следовательно, и потеря устойчивости происходят в плоскости наименьшей жёсткости. Потеря устойчивости из этой плоскости исключена.

Связь между деформациями и напряжениями основана на зависимости линейной ползучести

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau \qquad (1)$$

При деформировании стержня в связях возникают реактивные усилия $M_1(t)$ и $M_2(t)$. Изгибающий момент в произвольном поперечном сечении стержня

$$M(t)=Py(x,t)+\frac{l-x}{l}M_1(t)+\frac{x}{l}M(t) \qquad (2)$$

При записи уравнения устойчивости, в данном случае уравнения медленного движения стержня, принимается во внимание, что линейная ползучесть не влияет ни на геометрию деформации, ни на зависимости между напряжениями и нагрузками [1],[2] . В силу этого справедливы зависимости

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=\frac{\varepsilon_1(x,t)-\varepsilon_2(x,t)}{h}\approx\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[y(x,t)-y_0(x)\right] \qquad (3)$$

$$\sigma_{1,2}(x,t)=\frac{P}{A}\pm\frac{M(x,t)}{2I}h \qquad (4)$$

где $\frac{1}{\rho(x,t)}$, дополнительная кривизна в рассматриваемом сечении, вызванная изгибом; $\varepsilon_1(x,t),\varepsilon_2(x,t),\sigma_1(x,t),\sigma_2(x,t)$ − деформации и напряжения в крайних волокнах сечения соответственно; h, A, I – высота, площадь и момент инерции сечения:

Из (3) с учётом (1) и (4) следует

$$\frac{1}{\rho(x,t)}=\frac{1}{I}\left[\frac{M(x,t)}{E(t)}-\int_{t_0}^{t}M(x,\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right] \qquad (5)$$

Под действием силы Р концевые сечения стержня поворачиваются на углы $\alpha(t)-\alpha_0$ и $\beta(t)-\beta_0$, пропорциональные возникающим в связях моментам $M_1(t)$ и $M_2(t)$

$$\alpha(t)-\alpha_0=\frac{1}{K_1(t)}\left[M_1(t)-E_1(t)\int_{t_0}^{t}M_1(\tau)\frac{\partial\sigma_1(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right], \tag{6}$$

$$\beta(t)-\beta_0=\frac{1}{K_2(t)}\left[M_2(t)-E_2(t)\int_{t_0}^{t}M_2(\tau)\frac{\partial\sigma_2(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right], \tag{7}$$

$$K_1(t)=\overline{K_1}E_1(t),\quad K_2(t)=\overline{K_2}E_2(t), \tag{8}$$

$\overline{K_1}$ и $\overline{K_2}$ − коэффициенты, определяемые свойствами связей (в частности их жесткостями).

В общем случае, когда упругие характеристики и характеристики ползучести стержня и его связей различны, задача по отысканию перемещений $y(x,t)$ и критических сил $P_{дл}$ при длительном действии нагрузки сводится к решению системы из трёх интегро-дифференциальных уравнений, полученных из (5),(6), (7) с учётом (2) и (3) и равенств

$$\begin{gathered}\alpha(t)-\alpha_0=\frac{\partial}{\partial x}\left[y(0,t)-y_0(0)\right]\\ \beta(t)-\beta_0=\frac{\partial}{\partial x}\left[y(l_1,t)-y_0(l)\right]\end{gathered} \tag{9}$$

Система имеет вид:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[y(x,t)-y_0(x)\right]+\frac{P}{E(t)I}\left[y(x,t)-E(t)\int_{t_0}^{t}y(x,\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]-\\ -\frac{l-x}{lE(x)}\left[M_1(t)-E(t)\int_{t_0}^{t}M_1(\tau)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]-\frac{x}{lE(t)I}\left[M_2(t)\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]=0\\ \frac{\partial}{\partial x}\left[y(0,t)-y_0(0)\right]=\frac{1}{K_1(t)}\left[M_1(t)-E_1(t)\int_{t_0}^{t}M_1(\tau)\frac{\partial\delta_1(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]\\ \frac{\partial}{\partial x}\left[y(l,t)-y_0(l)\right]=\frac{1}{K_2(t)}\left[M_2(t)-E_2(t)\int_{t_0}^{t}M_2(\tau)\frac{\partial\delta_2(t,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right]\end{cases} \tag{10}$$

При $t=t_0$ система (10) сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, соответствующего упруго-мгновенной задаче

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2y(x)=\frac{d^2y_0(x)}{dx^2}+\frac{\lambda^2K_1(l-x)}{Pl}\frac{d}{dx}\left[y(0)-y_0(\right.$$
$$-\frac{\lambda^2K_2\cdot x}{Pl}\frac{d}{dx}\left[y(l)-y_0(l)\right],\quad \lambda^2=\frac{P}{EI} \tag{11}$$

с граничными условиями $y(0)=0,\quad y(l)=0.$

Если начальная погиб задана в виде

$$y_0(x)=f_0\sin\frac{\pi x}{l}, \tag{12}$$

то решение уравнения имеет вид

$$y(x)=f\sin\frac{\pi x}{l}+\pi(f-f_0)\frac{Q}{\left(\eta_1-\frac{Pl}{K_1}\right)\left(\eta_1-\frac{Pl}{K_2}\right)-\eta_2^2}, \tag{13}$$

$$Q=\left(\eta_1+\eta_2-\frac{Pl}{K_1}\right)\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l}-\frac{x}{l}\right)-\left(\eta_1+\eta_2-\frac{Pl}{K_2}\right)\left(\frac{\sin\lambda x}{\tan\lambda l}-\cos\lambda x-\frac{l-x}{l}\right) \tag{14}$$

$$\eta_1=\frac{\lambda l}{\tan\lambda l}-1;\quad \eta_2=\frac{\lambda l}{\sin\lambda l}-1;\quad f=\frac{f_0}{1-\frac{P}{P_ý}},\quad P_ý=\frac{\pi^2EI}{l^2}.$$

Перемещение $y(x)$ неограниченно возрастает, когда знаменатель второго слагаемого в (13) стремится к нулю. Следовательно критические силы упруго-мгновенной задачи есть корни уравнения устойчивости

$$\left(\eta_1-\frac{Pl}{K_1}\right)\left(\eta_1-\frac{Pl}{K_2}\right)-\eta_2^2=0 \text{ или} \tag{15}$$

$$\left(\frac{\lambda l}{tan\,\lambda l}-\frac{Pl}{K_1}-1\right)\left(\frac{\lambda l}{tan\,\lambda l}-\frac{Pl}{K_2}-1\right)-\left(\frac{\lambda l}{sin\,\lambda l}-1\right)^2=0 \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (16) совпадает с уравнением устойчивости первого рода $[3]$.

В случае одинаковых свойств связей $(K_1=K_2=K)$ уравнения (13) и (16) упрощаются

$$y(x)=f\,sin\frac{\pi x}{l}-\pi(f-f_0)\frac{tan\frac{\lambda l}{2}sin\,\lambda x+cos\,\lambda x-1}{\frac{Pl}{K}+\lambda l\,tan\frac{\lambda l}{2}} \tag{17}$$

$$tan\frac{\lambda l}{2}=-\frac{P}{\lambda K} \tag{18}$$

В этом частном случае перемещения разыскиваются по формуле (17), а критическая сила при кратковременном действии нагрузки, $P_{\grave{e}\eth}$ как корень уравнения (19).

Если стержень и связи выполнены из материалов, подчиняющихся законам наследственной теории старения $[2]$, то

$$\begin{aligned}
&\delta(t,\tau)=\frac{1}{E(\tau)}+\theta(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right],\quad \theta(\tau)=C+Ae^{-\gamma\tau},\\
&\delta_1(t,\tau)=\frac{1}{E_1(\tau)}+\theta_1(\tau)\left[1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}\right],\quad \theta_1(\tau)=C_1+A_1e^{-\gamma_1\tau},\\
&\delta_2(t,\tau)=\frac{1}{E_2(\tau)}+\theta_2(\tau)\left[1-e^{-\gamma_2(t-\tau)}\right],\quad \theta_2(\tau)=C_2+A_2e^{-\gamma_2\tau}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Предполагается, что E, E_1 è E_2 не меняются во времени и являются постоянными величинами.

Система интегро-дифференциальных уравнений (10) сводится к системе дифференциальных уравнений с частными производными следующего вида (20).

Для определения перемещений *y* (*x, t*) следует решить систему (20) с известными граничными и начальными условиями. Однако для нахождения критических сил $P_{дл}$,что и является основным результатом при решении задач устойчивости, нет необходимости в поиске решения системы (20).

Известно, что для стержней с несовершенствами (в том числе с начальной погибью), критерий для определения критической силы $P_{дл}$ в условиях ползучести математически сформулирован так (21).

$$\begin{cases}
\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2}=\left[y(x,t)-y_0(x)\right]+\lambda^2\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\left[y(x,t)-y_0(x)\right]+\\
+\gamma\lambda^2\left[1+E\theta(t)\right]\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}-\frac{\lambda^2}{P}\cdot\frac{l-x}{l}\cdot\frac{\partial^2 M_1(t)}{\partial t^2}-\frac{\lambda^2}{P}\cdot\frac{x}{l}\cdot\frac{\partial^2 M_2(t)}{\partial t^2}-\\
-\gamma\frac{\lambda^2}{P}\cdot\frac{l-x}{l}\left[1+E\theta(t)\right]\frac{\partial M_1(t)}{\partial t}-\gamma\frac{\lambda^2}{P}\cdot\frac{x}{l}\left[1+E\theta(t)\right]\frac{\partial M_2(t)}{\partial t}=0;\\
K_1\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}\left[y(0,t)-y_0(0)\right]+\gamma_1K_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[y(0,t)-y_0(0)\right]=\frac{\partial^2 M_1(t)}{\partial t^2}+\\
+\gamma_1\left[1+E_1\theta_1(t)\right]\frac{\partial M_1(t)}{\partial t},\\
K_2\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}\left[y(l,t)-y_0(l)\right]+\gamma_2K_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[y(l,t)-y_0(l)\right]=\frac{\partial^2 M_2(t)}{\partial t^2}+\\
+\gamma_2\left[1+E_2\theta_2(t)\right]\frac{\partial M_2(t)}{\partial t}
\end{cases} \tag{20}$$

$$y(x,t)\Big|_{t\to\infty}\to\infty,\quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\Big|_{t\to\infty}\to const,\quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{t\to\infty}\to 0$$

(21)

и под критической следует понимать минимальную силу, вызывающую неограниченное развитие перемещений с постоянной скоростью $[4]$.

Так как при $t \to \infty$ деформирование происходит с постоянной скоростью, то

$$\begin{gathered}
\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \to const, \quad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \to 0, \quad \frac{\partial M_1(t)}{\partial t} \to const, \quad \frac{\partial^2 M_1(t)}{\partial t^2} \to 0, \\
\frac{\partial M_2(t)}{\partial t} \to const, \quad \frac{\partial^2 M_2(t)}{\partial t^2} \to 0, \quad \theta(t) \to C, \quad \theta_1(t) \to C_1, \\
\theta_2(t) \to C_2, \quad CE = c, \quad C_1E_1 = c_1, \quad C_2E_2 = c_2
\end{gathered} \tag{22}$$

и система (20) вырождается в дифференциальное уравнение упругой линии стержня при $t = \infty$

$$\begin{gathered}
\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \lambda_{\text{äë}}^2 y(x) = \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda_{\text{äë}}^2 K_1}{P(1+c_1)} \cdot \frac{l-x}{l} \cdot \frac{d}{dx}\left[y(0) - y_0(0)\right] - \\
- \frac{\lambda_{\text{äë}}^2 K_2}{P(1+c_2)} \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{d}{dx}\left[y(l) - y_0(l)\right], \quad \lambda_{\text{äë}}^2 = \lambda^2 (1+c)
\end{gathered} \tag{23}$$

Используя решения упруго-мгновенной задачи и аналогию уравнений (11) и (21), можно записать уравнение устойчивости при $t \to \infty$

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\lambda_{\text{äë}} l}{tan\,\lambda_{\text{äë}} l} - \frac{Pl}{K_{1\text{äë}}} - 1\right)\left(\frac{\lambda_{\text{äë}} l}{tan\,\lambda_{\text{äë}} l} - \frac{Pl}{K_{2\text{äë}}} - 1\right) - \left(\frac{\lambda_{\text{äë}} l}{sin\,\lambda_{\text{äë}} l} - 1\right)^2 = 0 \\
K_{1\text{äë}} = \frac{K_1}{1+c_1}, \quad K_{2\text{äë}} = \frac{K_2}{1+c_2}
\end{gathered} \tag{24}$$

Итак, для нахождения критических сил при длительном действии нагрузки в уравнении устойчивости упруго- мгновенной задачи (16) достаточно заменить упруго-мгновенные модули длительными и определить *Pдл* как корень уравнения (24).

Уравнения (16) и (24) достаточно универсальны, так как позволяют решать задачи как упруго-мгновенной, так и длительной устойчивости во многих частных случаях. Имеются в виду различные комбинации деформативных свойств стержня и связей. В частном случае равенства деформативных характеристик стержня и связей уравнение устойчивости (16) принимает вид:

$$tan\frac{\lambda_{\text{äë}} l}{2} = -\frac{P}{\lambda_{\text{äë}} K_{\text{äë}}} \tag{25}$$

Выводы

1. Величины критических сил $P_{\text{дл}}$, так же как и в более простых случаях, зависят только от полностью обратимых деформаций ползучести.
2. В случае стержня с внецентренным загружением решение задачи устойчивости может быть получено изложенным способом после разложения эксцентриситета в ряд по соответствующим функциям.

3. Решения в полной мере распространяются и на армированные стержни с привлечением приведенного сечения.

4. Для практических расчётов удобно, что структуры уравнений устойчивости (16) и (24) идентичны.

SUMMARY

Obtained formulas allow to calculate the bars as in elastic state and taking account the creep, that gives an opportunity to determine critical force and displacement.

Литература

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести М., Гостехиздат, 1952.
2. Прокопович И.Е. Влияние длительных процессов на напряжённые и деформированные состояния конструкций. М., Госстройиздат,1963.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.,Наука,1971.
4. Орлов А.Н., Прокопович И.Е. О влиянии ползучести и старения на величины критических сил для гибких однородных и неоднородных стоек. Изв. АА АрмССр, Механика,1969, XXII.№3