

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОГО ИЗГИБА ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Фомин В.М.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

В статье [1] было построено дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом геометрической и физической нелинейностей и пластического поведения бетона для случая простого нагружения. В настоящей работе нагружение балки не предполагается простым и поэтому для описания напряженно-деформированного состояния в бетоне вместо деформационной теории пластичности используется теория пластического течения.

Рассматривается изгиб статически определимой железобетонной консольной балки прямоугольного поперечного сечения, находящейся под действием нагрузки, приложенной к концам балки (рис.1). Как принято в теории пластического течения, приращения деформаций могут быть представлены в виде суммы упругих и пластических составляющих:

$$d[\varepsilon] = d[\varepsilon]_e + d[\varepsilon]_p \quad (1)$$

Здесь $d[\varepsilon] = [d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{12}]$ (ε_{ij} – элементы тензора деформаций, предполагается, что балка находится в состоянии плоской деформации). В соответствии с ассоциированным законом течения приращение пластической деформации может быть представлено в следующем виде:

$$d[\varepsilon]_p = \vartheta \frac{\partial F([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]} \quad (2)$$

где F – функция нагружения, χ – параметр упрочнения [2], $[\sigma] = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]$, σ_{ij} – элементы тензора деформаций, ϑ – коэффициент пропорциональности. В соответствии с законом Гука можно записать

$$d[\sigma] = [D]_e d[\varepsilon]_e \quad (3)$$

($[D]_e$ – начальная матрица упругости). Заметим, что матрица $[D]_e$ для линейно упругого изотропного материала в случае плоской деформации имеет следующий вид:

$$[D]_e = \frac{2G_0}{1-\mu_0} \begin{bmatrix} 1 & \mu_0 & 0 \\ \mu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mu_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Здесь G_0 – модуль сдвига, $\mu_0 = \nu_0 / (1 - \nu_0)$, ν_0 – начальный коэффициент Пуассона.

Подставляя (2) и (3) в (1), будем иметь

$$d[\varepsilon] = [D]_e^{-1} d[\sigma] + \vartheta \frac{\partial F([\sigma], \chi)}{\partial [\sigma]} \quad (5)$$

Принимая что,

$$d\chi = [\sigma]^T d[\varepsilon]_p \quad (6)$$

и следуя далее [3] или [4], получаем

$$d[\sigma] = [D]_{ep} d[\varepsilon], \quad (7)$$

где

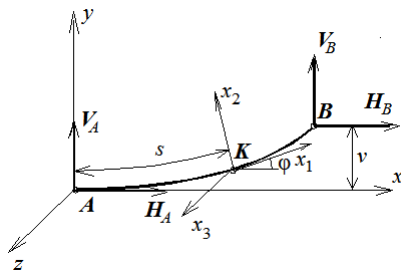
$$[D]_{ep} = [D]_e - \frac{[D]_e \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \left[\frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]_e}{\left[\frac{\partial F}{\partial [\sigma]} \right]^T [D]_e \frac{\partial F}{\partial [\sigma]} - \frac{\partial F}{\partial \chi} [\sigma]^T \frac{\partial F}{\partial [\sigma]}} \quad (8)$$

Будем строить функцию нагружения в следующем виде:

$$F([\sigma], \chi) = F_l([\sigma]) + h(\chi) \quad (9)$$

($F_l([\sigma])$ – функция, определяющая предельную поверхность и условие прочности $F_l([\sigma]) = 0$ в пространстве напряжений, $h(\chi)$ – функция упрочнения). Используем условие прочности для плоского деформированного состояния бетона, приведенное в [5]:

$$F_l([\sigma]) = 0, \quad (10)$$



$$F_I([\sigma]) = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(R_c - R_p)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + 4\sigma_{12}^2 - \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2. \quad (10a)$$

Примем

$$h(\chi) = -\tilde{F}_I(\tilde{\sigma}_{11}), \quad (11)$$

где через $\tilde{F}_I(\tilde{\sigma}_{11})$ обозначена $F_I([\sigma])$ при одноосном растяжении (сжатии) в условиях плоской деформации, т.е.

$$\tilde{F}_I(\tilde{\sigma}_{11}) = \tilde{\sigma}_{11}^2 + 2(R_c - R_p)\tilde{\sigma}_{11} - \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2. \quad (12)$$

Так как текущие значения напряжений (т.е. компоненты вектора $[\sigma]$) должны лежать на поверхности нагружения, т.е. должны удовлетворять уравнению

$$F([\sigma], \chi) = 0, \quad (13)$$

то $\tilde{F}_I(\tilde{\sigma}_{11}) = F_I([\sigma])$ и (12) представляет собой квадратное уравнение относительно $\tilde{\sigma}_{11}$, решая которое находим

$$\tilde{\sigma}_{11} = -(R_c - R_p) + \sqrt{(R_c - R_p)^2 + \frac{1}{3}(R_c + R_p)^2 + F_I([\sigma])}. \quad (14)$$

Знак плюс перед корнем выбран потому, что при деформациях, близких к одноосному растяжению (сжатию) должно выполняться следующее соотношение $\tilde{\sigma}_{11} \approx \sigma_{11}$.

Рассмотрим теперь железобетонный стержень, подвергнутый одноосному растяжению или сжатию при плоской деформации. В соответствии с деформационной теорией пластичности бетона Г.А.Гениева [5] можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 3K(\varepsilon_0, \gamma_0)\varepsilon_0, \tau_0 = G(\gamma_0)\gamma_0, \\ K(\varepsilon_0, \gamma_0) &= K_0 f(\gamma_0) g(\varepsilon_0, \gamma_0), G(\gamma_0) = G_0 f(\gamma_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь σ_0, γ_0 – октаэдрические напряжения,

$$f(\gamma_0) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\Gamma_c \kappa(\lambda, \delta)} \gamma_0, g(\varepsilon_0, \gamma_0) = 1 + \frac{g_0}{2\varepsilon_0} \gamma_0^2. \quad (16)$$

g_0 – модуль дилатации, K_0 и G_0 – начальные модули объемного сжатия и сдвига, Γ_c – предельная интенсивность деформаций сдвига при чистом сдвиге, а $\kappa(\lambda, \delta)$ определяется по формуле

$$\kappa(\lambda, \delta) = \frac{\lambda(1+\delta)}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2(1+\delta)^2}{4} + 1 + \delta}. \quad (17)$$

В формуле (17):

$$\lambda = -f_0 \sigma_0 / T, \delta = -e_0 (S/T)^3, S = \sqrt{3}(D_3/2)^{1/3}, \quad (18)$$

D_3 – третий инвариант девиатора напряжений, $T = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_0$ – интенсивность касательных напряжений, f_0 и e_0 – безразмерные коэффициенты:

$$f_0 = \frac{3T_c(R_c - R_p)}{R_c R_p}, e_0 = \frac{R_c R_p}{3T_c^2} - 1, \quad (19)$$

T_c – предельное значение T при чистом сдвиге. Заметим, что при рассматриваемом напряженно-деформированном состоянии стержня

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{(1+\nu)\tilde{\sigma}_{11}}{3}, \tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} |\tilde{\sigma}_{11}| \sqrt{1-\nu+\nu^2}, \\ \varepsilon_0 &= \frac{\mu\tilde{\varepsilon}_{11}}{3}, \gamma_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} |\tilde{\varepsilon}_{11}| \sqrt{1+\mu+\mu^2} \end{aligned} \quad (20)$$

($\tilde{\sigma}_{11}$ – нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной оси стержня, $\tilde{\varepsilon}_{11}$ – продольная деформация, $\mu = \nu/(1-\nu)$, ν – коэффициент Пуассона). Тогда учитывая, что

$$D_3 = (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0), \quad (21)$$

формулы (18) и (15) можно представить так:

$$\lambda = -\frac{f_0}{\sqrt{3}} \frac{1+\nu}{\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11}), \delta = -\frac{e_0}{2} \frac{(2-\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu+\nu^2)^{3/2}} \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11}), \quad (22)$$

так как $\operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}_{11}) = \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_{11})$.

Из (16) и (20) находим

$$f(\gamma_0) = 1 - \frac{\sqrt{3(1+\mu+\mu^2)}}{3\Gamma_c \kappa(\lambda, \delta)} |\tilde{\varepsilon}_{11}|, g(\varepsilon_0, \gamma_0) = 1 + \frac{4g_0(1+\mu^2+\mu^4)}{1-\mu} \tilde{\varepsilon}_{11}. \quad (23)$$

Используя (15), известную формулу $\nu = [3K(\varepsilon_0, \gamma_0) - 2G(\gamma_0)] / \{2[G(\gamma_0) + 3K(\varepsilon_0, \gamma_0)]\}$ можно представить

так

$$v = [3K_0g(\varepsilon_0, \gamma_0) - 2G_0] / \{2[G_0 + 3K_0g(\varepsilon_0, \gamma_0)]\}. \quad (24)$$

Из (17), (18) и (23) следует, что при заданном $\tilde{\varepsilon}_{11}$ равенство (24) представляет собой уравнение относительно v . Его можно решить, например, методом последовательных приближений. Задавая начальное значение $v = v_0$ (v_0 – коэффициент Пуассона бетона в линейно-упругой стадии) и подставляя его в правую часть (24), после нескольких шагов находим значение v . После этого определяем $f(\gamma_0)$ и $g(\varepsilon_0, \gamma_0)$ из (23) и по формуле

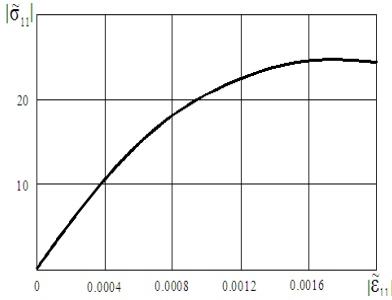
$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{E}\tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{E} = 3K_0f(\gamma_0)g(\varepsilon_0, \gamma_0)(1 - 2v)/(1 - v^2), \quad (25)$$

являющейся следствием (15) и (20) находим $\tilde{\sigma}_{11}$. Таким образом может быть построена функциональная зависимость $\tilde{\sigma}_{11}$ от $\tilde{\varepsilon}_{11}$, график которой для бетона с $R_c = 19,6 \text{ МПа}$, $R_p = 1,96 \text{ МПа}$ и $T_c = 3,4 \text{ МПа}$ для случая сжатия представлен на рис.2. Аппроксимируя восходящую ветвь кубической параболой, получаем

$$\tilde{\sigma}_{11} = A_c\tilde{\varepsilon}_{11} + B_c\tilde{\varepsilon}_{11}^2 + C_c\tilde{\varepsilon}_{11}^3 \quad (26)$$

(в случае растяжения A_c, B_c, C_c заменяются коэффициентами A_p, B_p, C_p).

В рассматриваемом случае



($\tilde{\varepsilon}_{11p}$ – пластическая деформация стержня). Тогда

$$d\chi = \tilde{\sigma}_{11}d\tilde{\varepsilon}_{11p} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \chi} = \frac{1}{\tilde{\sigma}_{11}} \tilde{E}_{\tau p}, \tilde{E}_{\tau p} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{11p}}. \quad (28)$$

Здесь $\tilde{E}_{\tau p}$ – пластический модуль упругости для плоской деформации.

Рис.2

Представим его так

$$\tilde{E}_{\tau p} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{11} - \partial \tilde{\varepsilon}_{11e}} = \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{11}} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{11}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{11e}} \right)^{-1} = \frac{\tilde{E}_{\tau} \tilde{E}_0}{\tilde{E}_0 - \tilde{E}_{\tau}}, \quad (29)$$

где \tilde{E}_{τ} может быть получено дифференцированием выражения (26), а $\tilde{E}_0 = 3K_0 \frac{1 - 2v_0}{1 - v_0^2}$ в соответствии с (25).

Из (9), (11), (12) и (28) находим

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = -\frac{\partial h}{\partial \chi} = -2[\tilde{\sigma}_{11} - (R_c - R_p)] \frac{\tilde{E}_{\tau p}}{\tilde{\sigma}_{11}}. \quad (30)$$

Остальные величины, входящие в (8), легко определяются из (10а):

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}} = 2[\sigma_{11} - \sigma_{22} - (R_c - R_p)], \quad (31)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}} = -2[\sigma_{11} - \sigma_{22} + R_c - R_p], \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}} = 8\sigma_{12}.$$

Переходим теперь к определению приращений деформаций $d[\varepsilon]$. В работе [6] были выведены следующие соотношения:

$$\varepsilon_{11}(s, x_2) = \varepsilon_s(s) - B(s, x_2)\phi'(s),$$

$$\varepsilon_{22}(s, x_2) = 0.5[A_2^2(s, x_2) + B_2^2(s, x_2) - 1], \quad (32)$$

$$\varepsilon_{12}(s, x_2) = 0.5A_2^2(s, x_2).$$

Здесь

$$A(s, x_2) = a_1(s)x_2 + a_2(s)x_2^2 + a_3(s)x_2^3, B(s, x_2) = b_1(s)x_2 + b_2(s)x_2^2, \quad (33)$$

$$A_2(s, x_2) = a_1(s) + 2a_2(s)x_2 + 3a_3(s)x_2^2, B_2(s, x_2) = b_1(s) + 2b_2(s)x_2,$$

ε_s – удлинение оси балки, s – абсцисса, а x_2 – ордината рассматриваемой материальной частицы в недеформированном состоянии балки, ϕ – угол поворота поперечного сечения. Здесь и ниже штрих означает дифференцирование по s .

Из (32) и (33) получаем

$$d\varepsilon_{11} = d\varepsilon_s - dB\phi' - Bd\phi', d\varepsilon_{22} = A_2dA_2 + B_2dB_2, d\varepsilon_{12} = 0.5dA_2,$$

$$dA = da_1x_2 + da_2x_2^2 + da_3x_2^3, dB = db_1x_2 + db_2x_2^2, \quad (34)$$

$$dA_2 = da_1 + 2da_2x_2 + 3da_3x_2^2, dB_2 = db_1 + 2db_2x_2.$$

Используем теперь граничные условия на верхней и нижней гранях балки:

$$d\sigma_{22} = 0, d\sigma_{12} = 0 \text{ при } x_2 = \pm h/2. \quad (35)$$

Из (7) следует

$$\begin{aligned}
d\sigma_{11} &= D_{ep,1,1}d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,1,2}d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,1,3}d\varepsilon_{1,2}, \\
d\sigma_{22} &= D_{ep,2,1}d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,2,2}d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,2,3}d\varepsilon_{1,2}, \\
d\sigma_{12} &= D_{ep,3,1}d\varepsilon_{1,1} + D_{ep,3,2}d\varepsilon_{2,2} + D_{ep,3,3}d\varepsilon_{1,2}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Подставляя (34) в (36), а затем (36) в (35), получаем

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k}d_k = -U_{i,7}d_7 \quad (i=1,2,3,4), \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}
d_1 &= da_1, d_2 = da_2, d_3 = da_3, d_4 = db_1, d_5 = db_2, d_6 = d\varepsilon_s, d_7 = d\phi', \\
U_{i,1} &= D_{ep,j,2}A_2^\pm + \frac{1}{2}D_{ep,j,3}, U_{i,2} = \pm(D_{ep,j,2}A_2^\pm + \frac{1}{2}D_{ep,j,3})h, \\
U_{i,3} &= \frac{3}{4}(D_{ep,j,2}A_2^\pm + \frac{1}{2}D_{ep,j,3})h^2, U_{i,4} = -(\pm D_{ep,j,1}\phi' \frac{h}{2} - D_{ep,j,2}B_2^\pm), \\
U_{i,5} &= (-D_{ep,j,1}\phi' \frac{h}{4} \pm D_{ep,j,2}B_2^\pm)h, U_{i,6} = D_{ep,j,1}, U_{i,7} = D_{ep,j,1}B^\pm.
\end{aligned} \tag{37a}$$

Здесь $j = 2$ при $i = 1,2$ и $j = 3$ при $i = 3,4$; знак $+$ в двузначии \pm берется при $i = 1,3$ и знак $-$ при $i = 2,4$. Верхний индекс «плюс» означает, что значение соответствующей функции ($D_{ep,j,m}(s, x_2)$, $A_2(s, x_2)$ и т.д.) берется при $x_2 = h/2$, а верхний индекс «минус» – при $x_2 = -h/2$.

Из равновесия отрезка AK балки (рис.1) следует

$$d\mathbf{Q} + d\mathbf{V}_A + d\mathbf{H}_A = 0. \tag{38}$$

Здесь \mathbf{Q} – главных вектор внутренних сил, приложенных к поперечно-му сечению, содержащему рассматриваемую точку K . При этом

$$d\mathbf{Q} = d\mathbf{Q}_b + d\mathbf{Q}_{au} + d\mathbf{Q}_{ad} \tag{39}$$

(\mathbf{Q}_b – главный вектор внутренних сил в бетоне, \mathbf{Q}_{au} – в верхней арматуре, \mathbf{Q}_{ad} – в нижней).

Проектируя равенство (38) на оси x_i ($i = 1,2$) с учетом (39) будем иметь

$$dQ_{b,i} + dQ_{au,i} + dQ_{ad,i} + dV_{A,i} + dH_{A,i} = 0 \quad (i = 1,2). \tag{40}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
dQ_{b,i} &= b \int_{-h/2}^{h/2} d\sigma_{1,i} dx_2, dQ_{au,1} = E_a d\varepsilon_{1,1}(h_1)S_1, dQ_{ad,1} = E_a d\varepsilon_{1,1}(-h_2)S_2, \\
dQ_{au,2} &= G_a d\varepsilon_{1,2}(h_1)S_1, dQ_{ad,2} = G_a d\varepsilon_{1,2}(-h_2)S_2.
\end{aligned} \tag{41}$$

Здесь E_a , G_a – модуль упругости и модуль сдвига арматуры, она полагается идеально упругой; h_1 – ордината центра тяжести верхней арматуры, $-h_2$ – нижней, S_1 и S_2 – площади их поперечных сечений.

Используя (34) и (36), приходим к следующим уравнениям:

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k}d_k = -U_{i,7}d_7 - U_{i,8}d_8 - U_{i,9}d_9 - U_{i,10}d_{10} \quad (i = 5,6), \tag{42}$$

где $d_1 \div d_7$ – те же, что и в (37a), $d_8 = d\phi$, $d_9 = d\xi$, $d_{10} = d\eta$,

$$\begin{aligned}
U_{i,1} &= [D_{j,2}A_2]^\# + 0.5\{[D_{j,3}]^\# + \delta_{i,6}G_a(S_1 + S_2)\}, U_{i,2} = 2[D_{j,2}A_2x_2]^\# + \\
&+ [D_{j,3}x_2]^\# + \delta_{i,6}G_a(S_1h_1 - S_2h_2), U_{i,3} = 3[D_{j,2}A_2x_2^2]^\# + 1.5\{[D_{j,3}x_2^2]^\# + \\
&+ \delta_{i,6}G_a(S_1h_1^2 + S_2h_2^2)\}, U_{i,4} = -[D_{j,1}x_2]^\# \phi' + [D_{j,2}B_2]^\# - \\
&- \delta_{i,5}E_a(S_1h_1 - S_2h_2)\phi', U_{i,5} = -[D_{j,1}x_2^2]^\# \phi' + 2[D_{j,2}B_2x_2^2]^\# - \\
&- \delta_{i,5}E_a(S_1h_1^2 - S_2h_2^2)\phi', U_{i,6} = [D_{j,1}]^\# + \delta_{i,5}E_a(S_1 + S_2), \\
U_{i,7} &= -[D_{j,1}B]^\# - \delta_{i,5}E_a\{S_1B(h_1) + S_2B(-h_2)\}, U_{5,8} = \\
&= -H_0(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi), U_{5,9} = -H_0 \sin \phi, U_{5,10} = H_0 \cos \phi, \\
U_{6,8} &= -H_0(\xi \cos \phi - \eta \sin \phi), U_{6,9} = H_0 \cos \phi, U_{6,10} = H_0 \sin \phi
\end{aligned} \tag{42a}$$

($j = 1$ при $i = 5$ и $j = 3$ при $i = 6$, $\delta_{i,k}$ – символ Кронекера).

Введены следующие обозначения:

$$[f(x_2)]^\# = b \int_{-h/2}^{h/2} f(x_2) dx_2, H_0 = \frac{H}{l^2}, H = \frac{E_b b h^3}{12(1 - \nu_0^2)} + E_a(S_1h_1^2 + S_2h_2^2), \tag{43}$$

($\xi = np_x H_A / H_0$, $\eta = np_x V_A / H_0$, E_b –

начальный модуль упругости бетона).

Запишем (37) и (42) в виде единой системы уравнений

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} d_k = -U_{i,7} d_7 - U_{i,8} d_8 - U_{i,9} d_9 - U_{i,10} d_{10} \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (44)$$

добавив значения коэффициентов $U_{i,j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, j = 8, 9, 10)$.

Обозначим через $[d^{(m)}]$ ($m = 1, 2, 3, 4$) решения линейных систем уравнений

$$\sum_{k=1}^6 U_{i,k} d_k = -U_{i,m+6} \quad (i = 1, 2, \dots, 6; m = 1, 2, 3, 4). \quad (45)$$

Очевидно, что решение системы (44) может быть представлено следующим образом:

$$d_i = d_i^{(1)} d\phi' + d_i^{(2)} d\phi + d_i^{(3)} d\xi + d_i^{(4)} d\eta, \quad (46)$$

причем $d_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3, 4$) не зависят от $d\phi', d\phi, d\xi$ и $d\eta$.

Найдем теперь главный момент приращения внутренних сил в поперечном сечении относительно оси x_3 , проходящей через центр сечения и перпендикулярной осям x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} dM_3 &= dM_{b,3} - h_1 dQ_{au,1} + h_2 dQ_{ad,1}, \\ dM_{b,3} &= -b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} x_2 dx_2. \end{aligned} \quad (47)$$

Используя (34), (36) и (41), получаем

$$dM_3 = \sum_{k=1}^6 U_{7,k} d_k + U_{7,7} d\phi', \quad (48)$$

$$\begin{aligned} U_{7,1} &= -[D_{1,2} A_2 x_2]^\# - 0.5 \{ [D_{1,3} x_2]^\# \}, U_{7,2} = -2 [D_{1,2} A_2 x_2^2]^\# - \\ &- [D_{1,3} x_2^2]^\#, U_{7,3} = -3 [D_{1,2} A_2 x_2^3]^\# - 1.5 \{ [D_{1,3} x_2^3]^\# \}, U_{7,4} = \\ &= [D_{1,1} x_2^2]^\# \phi' - [D_{1,2} B_2 x_2]^\# + E_a (S_1 h_1^2 + S_2 h_2^2) \phi', U_{7,5} = [D_{1,1} x_2^3]^\# \phi' - \\ &- 2 [D_{1,2} B_2 x_2^2]^\# + E_a (S_1 h_1^3 - S_2 h_2^3) \phi', U_{7,6} = -[D_{1,1} x_2]^\# - E_a (S_1 h_1 - \\ &- S_2 h_2), U_{7,7} = [D_{1,1} B x_2]^\# + E_a \{ S_1 B (h_1) h_1 - S_2 B (-h_2) h_2 \}. \end{aligned} \quad (48a)$$

Подставив (46) в (48), будем иметь

$$\begin{aligned} dM_3 &= y_1 d\phi' + y_2 d\phi + y_3 d\xi + y_4 d\eta, \\ y_j &= \sum_{k=1}^6 U_{7,k} d_k^{(j)} + \delta_{1,j} U_{7,7} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (49)$$

Заметим, что y_j – функции материальной абсциссы s . Проведя вычисления y_j в ряде поперечных сечений для $s = s_m$ ($m = 1, 2, \dots, N$), можно путем интерполяции построить функции $Y_j(s)$ ($0 \leq s \leq l$). Тогда (49) можно представить так

$$dM_3 = Y_1 d\phi' + Y_2 d\phi + Y_3 d\xi + Y_4 d\eta. \quad (50)$$

Используя (38) и (42), нетрудно убедиться в том, что

$$dQ_2 = R_1 d\phi + R_2 d\xi + R_3 d\eta, \quad (51)$$

$$R_1 = -H_0 (\xi \cos \phi + \eta \sin \phi), R_2 = -H_0 \sin \phi, R_3 = H_0 \cos \phi.$$

Воспользуемся соотношением [7]

$$dM_3' = -dQ_2.$$

Подставив сюда (50) и (51), приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$d\phi'' + Z_1 d\phi' + Z_2 d\phi + Z_3 d\xi + Z_4 d\eta = 0, \quad (52)$$

$$Z_1 = (Y_1' + Y_2) / Y_1, Z_2 = (Y_2' - R_1) / Y_1, Z_3 = (Y_3' - R_2) / Y_1, Z_4 = (Y_4' - R_3) / Y_1.$$

Вывод

Получено дифференциальное уравнение для приращений углов поворота поперечных сечений железобетонной балки при плоском изгибе с учетом пластичности бетона при сложном нагружении, что позволит решать как статические так и динамические задачи для железобетонных балок и рам.

SUMMARY

Differential equation for increments of angular deflections of RC beam cross-sections at plane bending with taking into account plastic behaviour of concrete under conditions of complex loading has been constructed. This will enable one to solve both static and dynamic problems for RC beams and frames.

Литература

1. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского продольно-поперечного изгиба железобетонной балки с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вісник ОДАБА. Вып.40, – Одесса, 2010. – с.347 – 352.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969.– 420 с.
- 3.Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544с.
4. Клованич С.Ф., Мироненко И.Н. Метод конечных элементов в механике железобетона. – Одесса, 2007. – 110 с.
5. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона – М.: Стройиздат, 1974 – 316 с.
6. Фомин В.М. Уравнения плоского изгиба стержней с учетом физической и геометрической нелинейностей // Вісник ОДАБА. Вып. 24, – Одесса, 2006. – с.273–287.
7. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.