

## МЕТОД АППРОКСИМИРОВАНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОТ КРУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ С НОРМАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Парамонов Д.Ю., аспирант

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

### Постановка задачи и анализ исследований

Развитие теории расчета железобетонных конструкций идет по пути совершенствования расчетного аппарата, уходу от ряда условностей [10]. Поэтому, переход от традиционных методов проектирования к учету пространственной работы элементов каркаса здания, дает возможность наиболее точно отразить их напряженно-деформированное состояние, а значит эффективно выполнять расчеты конструкций [1,8,12].

Для изгибаемых несущих элементов в составе перекрытия, часто вторичным силовым фактором является крутящее усилие, которое возникает при учете совместной работы конструкций. При этом образование нормальных трещин от изгиба влияет в меньшей мере на изменение изгибной жесткости по сравнению с крутильной [1,14].

Учет трещинообразования и, связанных с ним, изменение жесткостей позволяют учесть перераспределение усилий в элементах при проектировании конструкций с учетом фактической их пространственной модели работы.

К сожалению, методика расчета крутильных жесткостей таких элементов на стадии трещинообразования ранее не изучалась. Хорошо известные работы в определении крутильных жесткостей относятся к элементам с пространственными наклонными трещинами [11, 13]. Методика расчета крутильных жесткостей с нормальными трещинами находится в начальной стадии разработки [1, 2, 3, 4, 6, 14, 15].

Основной их особенностью является использование метода конечных элементов для расчета перемещений от кручения. Использование в последующем этой характеристики, позволяет оценить изменение крутильной жесткости целого элемента при образовании трещин.

Общим для методики определения крутильной жесткости с нормальными трещинами является использование метода конечных элементов или же сложного приближенного решения [1, 2, 3, 4, 6, 14, 15]. Такой подход очень трудоемкий для практического применения в проектной деятельности.

Предложения Азизова Т.Н. [3] по упрощению в определении перемещений от кручения, относятся к аппроксимированию функциями, факторов влияющих на деформации. Такое решение может дать значительные преимущества для практических расчетов крутильной жесткости с нормальными трещинами. Однако до настоящего времени данное предложение реализовано не было.

**Цель статьи** - установить аппроксимационные зависимости для перемещений в нормальной трещине от кручения.

### Изложение основного материала

Балка, испытывающая, как вторичный силовой фактор, крутильное воздействие  $M_t$  на фоне изгибающего усилия  $M$  и связанного с ним образованием нормальных трещин имеет расчетную схему, приведенную на рис. 1.

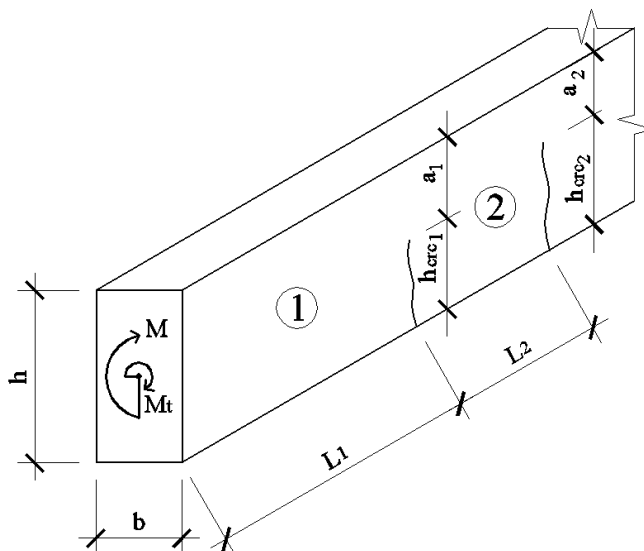


Рис.1. Фрагмент схемы балки, испытывающей изгибно-крутильное воздействие

Здесь изображены основные факторы, влияющие на ее деформирование при кручении: 1) величина крутящего момента  $Mt$ ; 2) геометрические характеристики сечения ( $b$  и  $h$ ); 3) высота сжатой зоны  $a$ ; 4) расстояние между трещинами  $L$ . Рассматривая балку (рис. 1), можно отметить расчетные блоки, на которых крутильная жесткость будет изменяться ввиду перемены параметров влияющих на ее значение. Данные блоки будут определяться расстоянием между трещинами  $L$ .

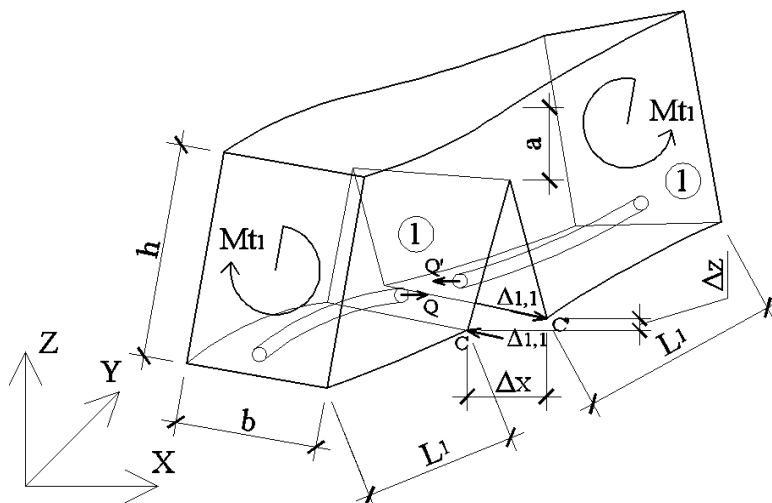


Рис. 2. Расчетная схема блока балки с нормальной трещиной с усилиями и перемещениями, возникающими при кручении, где:  $Mt_1$  - действующий в блоке крутящий момент;  $Q$  - нагельное усилие в арматуре;  $\Delta_{1,1}$  - перемещение от кручения в трещине  $I$ , со стороны блока  $I$

Основной нашей задачей является поиск перемещения в трещине. Для этого выберем схему, состоящую из расчетного блока с нормальной трещиной и зеркально дополняющий его такого же блока. При этом прикладываем в их торцах разнонаправленные крутящие моменты, действующие в расчетном элементе. Такая схема соответствует принятой в работах [2, 4, 6, 14] и позволяет находить перемещение в трещине без влияния перемещения от кручения не треснувшей части блоков (рис. 2).

Для того, чтобы определить формульные выражения значений перемещений в трещине от всех влияющих на его параметров, (указаны выше по тексту) воспользуемся аппроксимационным подходом. Для установления зависимостей примем балку размерами  $100 \times 100$  мм. С целью уменьшения переменных аппроксимирования примем относительные значения: 1) высоты сжатой зоны к высоте сечения  $a/h$ ; 2) расстояние между блоками (между нормальными трещинами) к высоте сечения  $L/h$ .

Для определения перемещения в трещине необходимо найти его разнонаправленные составляющие, отдельно: 1) от действия крутящего момента  $\Delta_{Mt}$  (при условии отсутствия арматуры); 2) от единичной нагельной силы сопротивления повороту в трещине  $\Delta_{Qed}$ , приложенной в центре тяжести арматуры и действующей в противоположном направлении [15]. Это те деформации, которые ранее находились по МКЭ. Остальные вычисления перемещений ведутся по формулам методики, изложенной в [15]. Выполняем расчет блока балки (рис. 2) в программном комплексе «Лира 9.6 R5» на все возможные в реальной работе конструкций диапазоны значений переменных, влияющих на перемещение в трещине от кручения. Принимаем диапазоны: 1) для высоты сжатой зоны  $0.1 \leq a/h \leq 1$ ; 2) для расстояний между трещинами  $0.2 \leq L/h \leq 4$ .

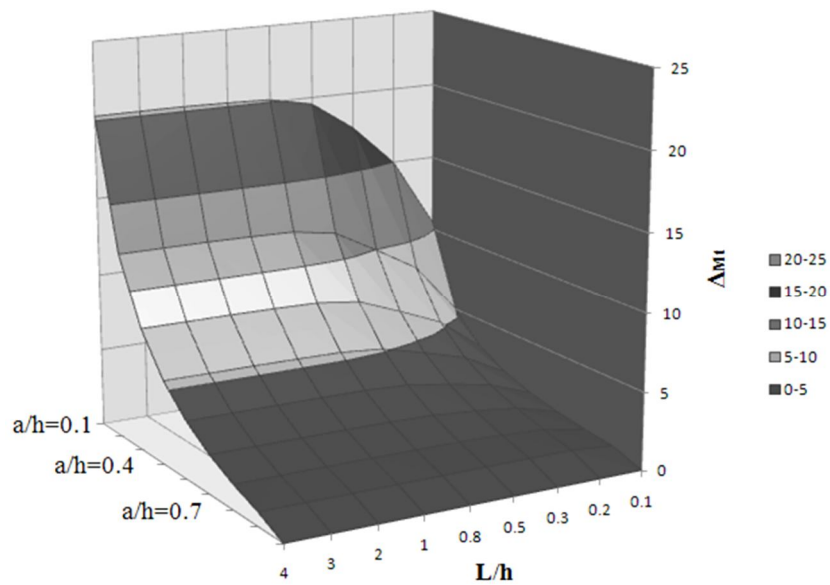


Рис. 3. Объемный график зависимости  $f(\Delta, L/h, a/h)$  от действия крутящего момента  $Mt$ .

Полученные расчетные данные перемещений в нормальной трещине от крутящего момента (при условии отсутствия арматуры) изображены в виде объемного графика на рис.3.  
Для перемещений от действия единичной нагельной силы на рисунке 4.

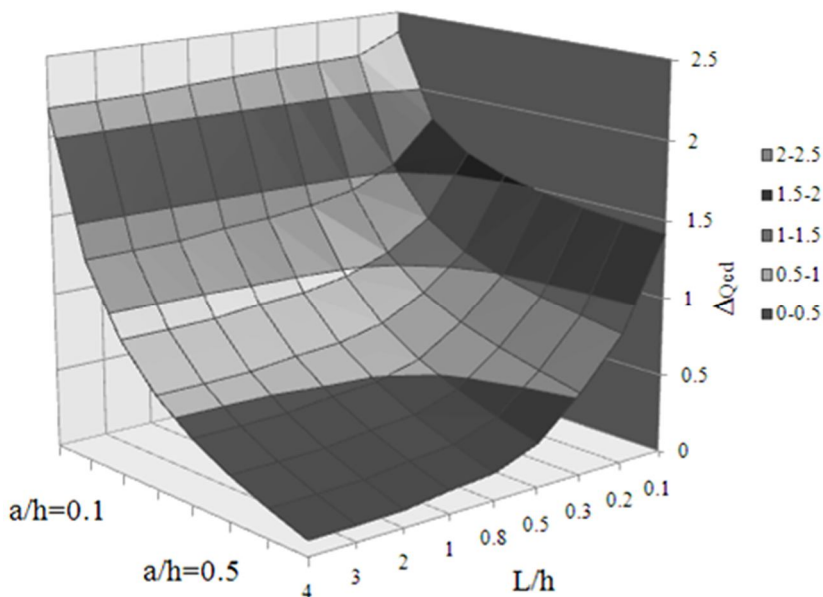


Рис. 4. Объемный график зависимости  $f(\Delta Q_{ed}, L/h, a/h)$  от действия единичной нагельной силы  $\bar{Q}$ .

Как видно из этих графиков (рис. 3, 4), на перемещения в трещине оказывает влияние, как высота сжатой зоны  $a$ , так и величина расстояния между трещинами  $L$  :  
 - с уменьшением высоты сжатой зоны  $a$ , перемещения в трещине увеличиваются. С увеличением расстояния между трещинами (до  $L/h = 1$ ) эта зависимость приобретает более равномерный характер;  
 - с уменьшением расстояний между трещинами (при  $L/h < 1$ ) перемещения увеличиваются, а при значении  $L/h > 1$  становятся мало зависимыми от этого параметра.

Кроме того, графики перемещений от крутящего момента (рис.3) и от нагельной силы (рис. 4) взаимно противоположны. То есть изменение параметров деформирования при воздействии крутящего момента (рис. 3) и нагельной силы (рис. 4) вызывает противоположное влияние на перемещения.

В связи с сложностью аппроксимирования полученных поверхностей одним формульным выражением, для

достижения необходимой точности в каждом случае силового воздействия, разбиваем графики на четыре диапазона:

- 1)  $0.1 \leq a/h < 0.5$ ,  $0.2 \leq L/h \leq 1$
- 2)  $0.5 \leq a/h \leq 1$ ,  $0.2 \leq L/h \leq 1$
- 3)  $0.1 \leq a/h \leq 0.5$ ,  $1 \leq L/h \leq 4$
- 4)  $0.5 \leq a/h \leq 1$ ,  $1 \leq L/h \leq 4$

Используем для аппроксимирования данных программный пакет *XLSTAT*, предназначенный для анализа данных и статистики. Эта программа является надстройкой к *Excel*, тем самым расширяет ее аналитические возможности. Наилучшие результаты аппроксимирования (погрешность не превышает 15%) получены в мультипликативной форме и в форме полинома 4-й степени:

- для перемещений от крутящего момента (при отсутствии арматуры):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{C,B,Mt} &= 9.81 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{-0.4874} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^{0.1004} - 9.4067, & 0.1 \leq a/h < 0.5 \text{ \& } 0.2 \leq L/h \leq 1 \\ \Delta_{C,B,Mt} &= 3.7905 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{-0.9355} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^{0.05285} - 3.6046, & 0.5 \leq a/h \leq 1 \text{ \& } 0.2 \leq L/h \leq 1 \\ \Delta_{C,B,Mt} &= 17.9795 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{-0.3405} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^{0.00060131} - 19.1209, & 0.1 \leq a/h \leq 0.5 \text{ \& } 1 \leq L/h \leq 4 \\ \Delta_{C,B,Mt} &= 3.9207 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{-0.9635} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^{0.00030258} - 3.933, & 0.5 \leq a/h \leq 1 \text{ \& } 1 \leq L/h \leq 4 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

- для перемещений от единичной нагельной силы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{C,B,Qed} &= 3.962 - 16.511 \cdot \left(\frac{a}{h}\right) - 2.116 \cdot \left(\frac{L}{h}\right) + 37.456 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2 + 2.853 \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^2 - \\ &- 1.347 \cdot \left(\frac{a}{h}\right) \cdot \left(\frac{L}{h}\right) - 29.19 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^3 - 0.622 \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^3 - 0.622 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4 - 0.414 \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^4, \\ &\text{\& } \text{\& } 0.1 \leq a/h < 0.5 \text{ \& } 0.2 \leq L/h \leq 1 \\ \Delta_{C,B,Qed} &= 2.323 - 2.569 \cdot \left(\frac{a}{h}\right) - 3.536 \cdot \left(\frac{L}{h}\right) + 3.880 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2 + 2.821 \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^2 - \\ &- 0.614 \cdot \left(\frac{a}{h}\right) \cdot \left(\frac{L}{h}\right) - 3.849 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^3 + 1.723 \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^3 + 1.723 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4 - 1.873 \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^4, \\ &\text{\& } \text{\& } 0.5 \leq a/h \leq 1 \text{ \& } 0.2 \leq L/h \leq 1 \\ \Delta_{C,B,Qed} &= 1.657 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{-0.374} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^{-0.008} - 1.708, & \text{\& } \text{\& } 0.1 \leq a/h \leq 0.5 \text{ \& } 1 \leq L/h \leq 4 \\ \Delta_{C,B,Qed} &= 2.273 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{-0.263} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)^{-0.0013} - 2.271, & \text{\& } \text{\& } 0.5 \leq a/h \leq 1 \text{ \& } 1 \leq L/h \leq 4 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

- для перемещения от единичной нагельной силы (сила приложена в центре тяжести арматурного стержня):

Далее, чтобы перейти к перемещениям в трещине для балки с искомым сечением  $b_f \times h_f$ , с заданными размерами высоты сжатой зоны  $a$  и расстояния между трещинами  $L$ , необходимо воспользоваться формулами:

$$\Delta_{C,Mt} = 2 \cdot \Delta_{C,B,Mt} \cdot K_{Mt} \cdot m \quad (3)$$

где:  $\Delta_{C,B,Mt}$  - значение перемещения в трещине номер  $C$  от кручения блока  $\hat{A}$ , определяется по формулам (1).  $K_{Mt}$  - коэффициент, описывающий изменение крутящего момента  $Mt$  и крутильной жесткости сечения относительно базовых расчетных, принятых при выводе формулам (1);  $m$  - масштабный коэффициент, учитывающий изменение высоты сечения балки, относительно базовой расчетной  $h=100\text{мм}$ , принятой при выводе формулам (1)

$$K_{Mt} = \frac{G_{cm1} I_{t1} M_{t2} R_2}{G_{cm2} I_{t2} M_{t1} R_1} \quad (4)$$

где:  $G_{cm1}$  - секущий модуль упругости бетона базовой балки  $10215.25 \text{ МПа}$ ;  $M_{t1}$  - крутящий момент базовой балки  $1.02 \text{ кН}^* \text{ м}$ ;  $I_{t1}$  - крутящий момент инерции базовой балки, определенный по формулам сопромата;  $L_1$  - длина блока базовой балки без трещин;  $R_1$  - радиус вращения базовой балки;  $G_{cm2}$  - секущий модуль упругости бетона искомой балки;  $M_{t2}$  - крутящий момент искомой балки;  $I_{t2}$  - крутящий момент инерции искомой балки, определенный по формулам сопромата;  $L_2$  - длина искомой балки без трещин;  $R_2$  - радиус вращения искомой балки

Формулу масштабного фактора находим через отношение высот балок искомого сечения  $h_2$  к базовой расчетной  $h_1 = 100 \text{ см}$  :

$$m = \frac{h_2}{h_1} \quad (5)$$

По аналогии с формулой (3) перемещение в трещине от действия нагельной силы:

$$\Delta_{C,Qed} = 2 \cdot \Delta_{C,B,Qed} \cdot K_{Qed} \cdot m \quad (6)$$

где:

$$K_{Qed} = \frac{G_{cm1} I_{t1} R_2^2}{G_{cm2} I_{t2} R_1^2} \quad (7)$$

### Выводы и перспективы исследований

Получение формульных выражений перемещений при кручении с нормальными трещинами значительно упрощает (в отличие от ранее предлагаемых методик) определение крутильной жесткости.

Принятый подход в определении крутильной жесткости имеет свои перспективы для распространения его, на элементы, армированные пространственными каркасами, а также имеющие различные формы поперечных сечений.

### SUMMARY

**The article suggested the approximation relations for the determination of displacements in the normal fracture torsion of reinforced concrete elements. This characteristic determines the change in torsional stiffness at the beam crack.**

### Литература

1. Азизов Т.Н. Теория пространственной работы перекрытий/ Азизов Т.Н. – К.: Науковий світ, 2001. – 276 с.
2. Азизов Т.Н. Определение крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами//Дороги і мости. Збірник наукових праць. Вип. 7.Том 1. - Київ: ДерждорНДІ, 2007. - С. 3-8.
3. Азизов Т.Н. Использование аппроксимационных конечных элементов в расчетах конструкций./ Т.Н. Азизов // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 39 – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – С. 10-16.
4. Азизов, Т.Н. К расчету железобетонных элементов полого сечения с нормальными трещинами при кручении / Т.Н. Азизов, О.В. Мельник, О.С. Мельник// Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В.Лазаряна. – Вип. 33. – Д.: ДНУЗТ, 2010. – С. 10-14
5. Азизов Т.Н. Аппроксимационный метод определения жесткости железобетонных элементов с трещинами при кручении. / Т.Н. Азизов, Д.Ю. Парамонов// Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – О.: Зовнішрекламсервіс, 2010. – Вип.40. –С.3-9.
6. Азизов Т.Н., Стадник В.И. Крутильная жесткость тавровых железобетонных элементов с нормальными трещинами//Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. 33 – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2009. – С. 4-11.
7. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.

8. Байков В.Н. Исследование совместной работы сборных железобетонных элементов в системах плоских и пространственных конструкций: Дис ... докт. техн. наук. – М., 1967.
9. Горнов В.Н. Исследование прочности и жесткости индустриальных конструкций жилых домов. – М.: Госстройиздат, 1954. – 240 с.
10. Залесов А.С. Настоящее и будущее расчета железобетона. / А.С. Залесов, Т.А. Мухамедиев // Бетон и железобетон. – 2005., №4., - С. 3 – 6.
11. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
12. Улицкий Б.Е., Потапкин А.А., Руденко В.И., Сахарова И.Д., Егорушкин Ю.М. Пространственные расчёты мостов. – М.: Транспорт, 1967. – 404 с.
13. Марио Исидоро Андраде Ираола. Прочность железобетонных элементов прямоугольного сечения при поперечном изгибе с кручением: Дис. ... канд. техн. наук. – Киев, 1993. – 158 с.
14. Срібняк Н.М. Кругильна жорсткість залізобетонних елементів перекриттів з нормальними тріщинами// Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. Одеса, 2009. – 23.
15. Azizov T.N. Effect of torsional rigidity of concrete elements with normal cracks onto special work of bridges and floorings./ T.N. Azizov// International Science Ukrainian Edition. Volume 3. USA – December, 2010. – P.55-59.