

О ДОСТОВЕРНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЁТОВ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Оробей В.Ф.¹, Ковров А.В.², Чайковский Р.Э.², Чайковский А.Э.²

¹ Одесский национальный политехнический университет, г.Одесса

² Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г.Одесса

Актуальность исследований – неразрезные балки являются системами с бесконечным числом степеней свободы. Как правило, в большинстве расчетных схем динамический расчет таких конструкции сводится к статическому расчету с последующим применением коэффициента динамичности.

Цель работы – исследовать спектр частот собственных колебаний и распределение изгибающих моментов в неразрезных балках при вынужденных гармонических колебаниях.

Определим значения первых восьми частот собственных колебаний для четырёхпролетной железобетонной балки, расчетная схема которой приведена на рис. 1.

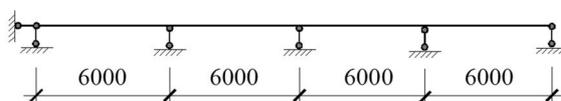


Рис. 1. Расчетная схема балки

Балка выполнена из бетона класса В20, армирована симметричными каркасами с рабочей арматурой диаметром 28 мм из стали класса АIII. Погонная масса балки $m=2,5\text{кН/м}$, жесткость железобетонной балки $B=79615,11\text{кНм}^2$.

Частоты собственных колебаний определялись при помощи программных комплексов SCAD, ЛИРА, ANSYS, а также при помощи разработанной программы [1, 2], основанной на применении ЧА МГЭ.

При динамическом расчете неразрезной балки с использованием ПК ANSYS, её пролеты разбивались на 5, 10, 25, 50 и 200 конечных элементов.

В таблице 1 приведено сравнение полученных результатов расчетов.

Таблица 1

№ собств. частот	Частоты собственных колебаний, 1/с							
	Методика, программный комплекс							
	ЧА МГЭ	ПК SCAD	ПК ЛИРА	ПК ANSYS				
				5 КЭ	10 КЭ	25 КЭ	50 КЭ	100 КЭ
1	48,92	48,80	48,80	49,05	49,05	49,05	49,05	49,05
2	57,08	56,93	56,93	57,22	57,21	57,21	57,21	57,21
	-	-	-	68,48	68,47	68,47	68,47	68,47
3	76,43	76,22	76,22	76,59	76,57	76,57	76,57	76,57
4	98,75	98,47	98,47	98,94	98,90	98,90	98,90	98,90
5	195,70	194,99	194,99	194,20	193,90	193,88	193,88	193,88
	-	-	-	205,87	205,51	205,41	205,40	205,40
6	212,37	211,54	211,53	210,76	210,38	210,35	210,35	210,35
7	247,68	246,49	246,49	245,69	245,08	245,04	245,04	245,04
8	285,69	283,96	283,95	283,31	282,39	282,33	282,33	282,33

Как видно из сравнения, частоты собственных колебаний полученные при помощи программных комплексов SCAD, ЛИРА, а также ЧА МГЭ практически совпадают (разница составляет от 0,2% до 1,2%).

Наибольшая точность результатов при использовании ПК ANSYS получается при разбиении пролётов балки на сетку 200 КЭ. Из таблицы 1 следует, что значения частот после разбиения пролётов на сетку более 25 КЭ практически не уточняются. Таким образом, для определения частот собственных колебаний неразрезной балки при помощи ПК ANSYS достаточно разбиение её пролетов на 25 КЭ.

Анализируя результаты расчетов, можно сделать вывод о том, что в спектре частот, полученных при помощи ПК ANSYS, в отличие от других программных комплексов появляются мнимые частоты, что согласуется с результатами, приведёнными в работе [3].

Мнимая частота собственных колебаний $\omega=68,47$ 1/с возникает между второй ω_2 и третьей ω_3 частотами собственных колебаний, а мнимая частота $\omega=205,51$ 1/с между пятой ω_5 и шестой ω_6 частотами собственных

колебаний.

На рис. 2 построен график определителя $|A^*(\omega)|$ частотного уравнения ЧА МГЭ. Полученный график не имеет точек разрыва второго рода и пересекает ось абсцисс в ряде точек, которые являются корнями частотного уравнения – частотами собственных колебаний.

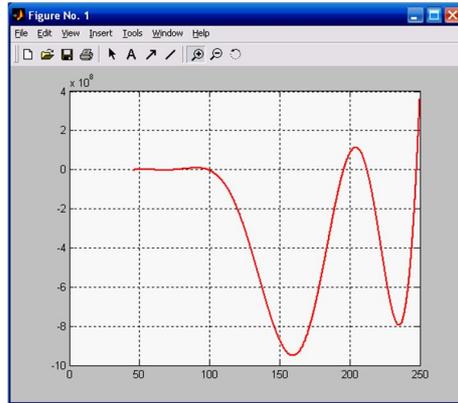


Рис. 2. График определителя собственных частот $|A^*(\omega)|$

Для более детального анализа графика определителя были исследованы зоны, в которых появляются мнимые частоты собственных колебаний, полученные при расчёте в ПК ANSYS.

На рис. 3а приведен график определителя на интервале между ω_2 и ω_3 , а на рис. 3б интервал между ω_5 и ω_6 .

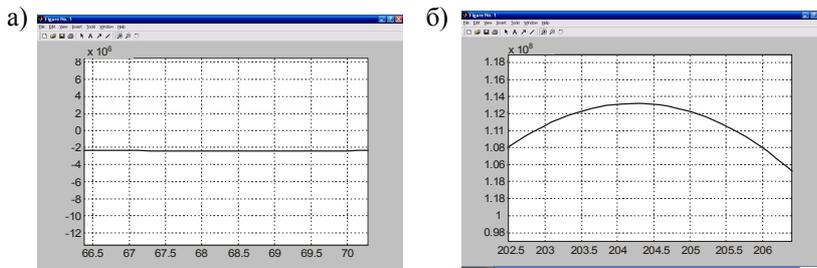


Рис. 3. Фрагменты графика определителя $|A^*(\omega)|$
а) на интервале ω_2, ω_3 ; б) на интервале ω_5, ω_6

Как видно из рис.3, график определителя не пересекает и не касается оси абсцисс в заданных интервалах.

Формы упругой линии определены при помощи ПК ANSYS при частотах $\omega=68,47$ 1/с, $\omega=205,51$ 1/с и приведены на рис. 4.

Как видно из рис. 4 упругие линии представляют собой линии, совпадающие с нейтральной осью балки.

На рис. 5 представлены виды упругой линии балки, построенные в системе компьютерной математике MATLAB, при частотах колебаний $\omega=68,47$ 1/с, $\omega=205,51$ 1/с.

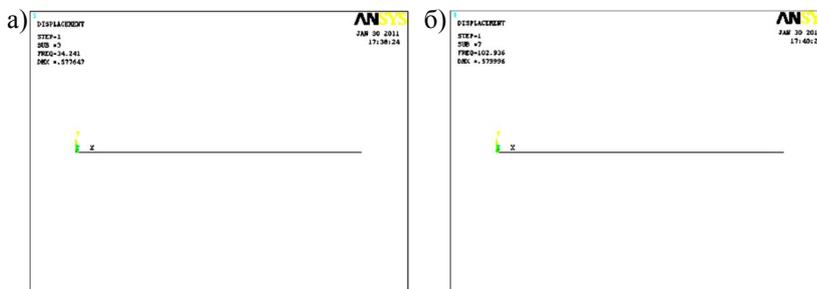


Рис. 4. Вид упругой линии балки,
построенной при помощи ПК ANSYS
а) при частоте $\omega=68,47$ 1/с; б) при частоте $\omega=205,51$ 1/с

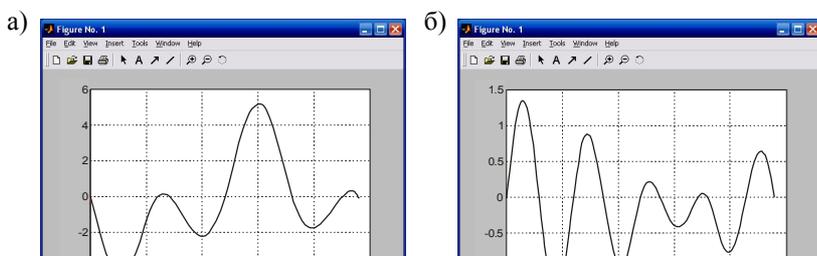


Рис. 5. Вид упругой линии балки,
построенной при помощи ЧА МГЭ
а) при частоте $\omega=68,47$ 1/с; б) при частоте $\omega=205,51$ 1/с

Определим значения изгибающих моментов при действии динамически приложенной нагрузки при помощи разработанной программы [1, 2], основанной на применении ЧА МГЭ, а также при помощи программного комплекса ANSYS.

На рис. 6 приведена схема динамического нагружения балки.

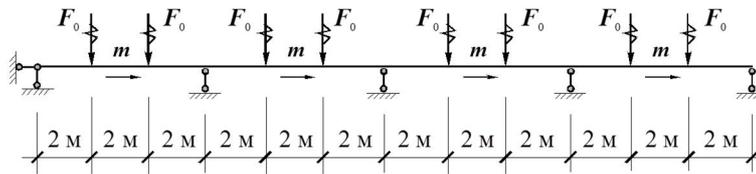


Рис. 6. Схема динамического нагружения балки

Вынуждающая динамическая нагрузка принимается заданной по гармоническому закону $F(t) = F_0 \sin \theta t$.

Инерционная сила, возникающая при работе оборудования, $F_0 = 20$ кН.

Частота вынужденных колебаний задавалась:

- на отрезке $0 < \theta \leq \omega_1$, с шагом равным $\Delta = 0,1 \omega_1$;
- на отрезке $\omega_1 < \theta \leq \omega_2$ с шагом равным $\Delta = 0,1(\omega_2 - \omega_1)$;
- на отрезке $\omega_2 < \theta \leq \omega_3$ с шагом равным $\Delta = 0,1(\omega_3 - \omega_2)$ и т.д. до шестой частоты ω_6 включительно.

Проведена статистическая обработка полученных значений отношений изгибающих моментов в характерных сечениях половины балки. Определены такие характеристики, как выборочное среднее M_x , выборочная дисперсия S_x , выборочный коэффициент вариации v_x , а также доверительный интервал ($P=0,95$).

Результаты статистической обработки приведены в таблице 2.

Статистический анализ показывает, что значения изгибающих моментов, полученных при помощи ПК ANSYS, и значения, полученные при помощи численно-аналитического МГЭ, практически совпадают в спектре всех изученных значений частот вынужденных колебаний.

Расхождение значений между программным комплексом ANSYS и ЧА МГЭ в области вынужденных частот $\theta < \omega_5 + 0,8(\omega_6 - \omega_5)$ находится

в пределах 5%, а в области $\omega_5 + 0,8(\omega_6 - \omega_5) < \theta < \omega_6 - 10\%$.

При частоте вынужденных колебаний $\theta = \omega_5 + 0,8(\omega_6 - \omega_5)$ наиболее заметна разница между значениями динамических изгибающих моментов полученных, при помощи ЧА МГЭ и программным комплексом ANSYS.

В связи с вышеизложенным, для этой частоты вынужденных колебаний на рис. 7 приведены эпюры изгибающих моментов, возникающих в характерных сечениях половины балки.

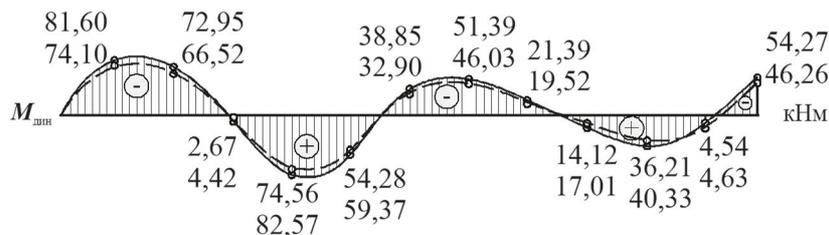


Рис. 7. Эпюры изгибающих моментов $M_{дин}$
при частоте вынужденных колебаний $\theta = \omega_5 + 0,8(\omega_6 - \omega_5)$

— ЧА МГЭ
- - - ПК ANSYS

Выводы

1. Для рассмотренного примера значения частот собственных колебаний, полученных при помощи ЧА МГЭ, а также программных комплексов SCAD, ЛИРА и ANSYS, практически совпадают (разница составляет от 0,2% до 1,2%).

2. В спектре частот, собственных колебаний, полученных при помощи ПК ANSYS в отличие от программных комплексов SCAD, ЛИРА, появляются мнимые частоты. Формы колебаний балок при этих частотах в ПК ANSYS, представляются прямыми линиями, совпадающими с упругой линией балки.

3. Значения динамических изгибающих моментов, определенных при помощи программного комплекса ANSYS, практически совпадают со значениями, полученными при помощи численно-аналитического МГЭ в спектре всех изученных значений частот вынужденных колебаний. В области вынужденных частот $\theta < \omega_5 + 0,8(\omega_6 - \omega_5)$ расхождения значений находится в пределах 5%, а в области $\omega_5 + 0,8(\omega_6 - \omega_5) < \theta < \omega_6$ до 10%.

4. Рассмотрение вопроса о спектре частот собственных колебаний и распределении изгибающих моментов в неразрезных балках при вынужденных колебаниях требует дальнейших исследований.

Таблица 2 (начало)

Статистическая оценка распределения	Отношения значений изгибающих моментов M_i , кНм, возникающих при действии динамически приложенной нагрузки с частотой вынужденных колебаний											
	$\theta=0,3\omega$		$\theta=0,5\omega$		$\theta=0,8\omega$		$\theta=\omega+0,3(\omega_2-\omega_1)$		$\theta=\omega+0,5(\omega_2-\omega_1)$		$\theta=\omega+0,8(\omega_2-\omega_1)$	
	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS
Выборочное среднее M_x	0,9997	0,9996	0,9983	1,0152	0,9863	0,9447	0,9943	0,9792	1,0102			
Выборочное дисперсия S_x	0,0006	0,0011	0,0027	0,1832	0,0196	0,0253	0,0198	0,0409	0,1170			
Выборочный коэффициент вариации v_x	0,0006	0,0011	0,0027	0,1804	0,0196	0,0268	0,0200	0,0418	0,1158			
Доверительный интервал ($P=0,95$)	0,9995 1,0000	0,9991 1,0000	0,9972 0,9994	0,9420 1,0885	0,9785 0,9941	0,9346 0,9548	0,9864 1,0022	0,9629 0,9956	0,9634 1,0570			

Таблица 2 (продолжение)

Статистическая оценка распределения	Отношения значений изгибающих моментов M_i , кНм, возникающих при действии динамически приложенной нагрузки с частотой вынужденных колебаний											
	$\theta=\omega+0,3(\omega_2-\omega_1)$		$\theta=\omega+0,5(\omega_2-\omega_1)$		$\theta=\omega+0,8(\omega_2-\omega_1)$		$\theta=\omega_4+0,3(\omega_5-\omega_4)$		$\theta=\omega_4+0,5(\omega_5-\omega_4)$		$\theta=\omega_4+0,8(\omega_5-\omega_4)$	
	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS	ЧА МГЭ/ ПК ANSYS
Выборочное среднее M_x	1,0031	0,9942	1,0471	0,9510	0,9664	0,9478	1,0052	1,0085	1,1229			
Выборочное дисперсия S_x	0,0352	0,0676	0,0578	0,0574	0,2231	0,1252	0,0935	0,0658	0,1366			
Выборочный коэффициент вариации v_x	0,0351	0,0680	0,0552	0,0603	0,2308	0,1321	0,0930	0,0652	0,1217			
Доверительный интервал ($P=0,95$)	0,9890 1,0172	0,9672 1,0212	1,0239 1,0702	0,9281 0,9740	0,8772 1,0557	0,8977 0,9979	0,9678 1,0425	0,9822 1,0348	1,0682 1,1776			

SUMMARY

The results of determination of natural frequencies of a continuous four-span reinforced concrete beams, as well as the congruence of values of bending moments with the help of ANSYS software and the technique based on the use of NA MSE.

Литература

1. Ковров А.В. Распределение внутренних усилий и перемещений в неразрезных балках при вынужденных колебаниях / А.В.Ковров, Р.Э.Чайковский, А.Э.Чайковский // Сборник научных трудов. Современные строительные конструкции из металла и древесины – Одесса, 2010. – № 14. – Часть 1. – С. 119-124.
2. Ковров А.В. Исследование возможности применения динамического коэффициента при динамическом расчете неразрезных балок / А.В.Ковров, Р.Э.Чайковский, А.Э.Чайковский // Вісник ОДАБА. – Одесса, 2010. – № 37. – С. 197-202.
3. Оробей В.Ф. Моделирование задач динамики стержневых систем методами граничных и конечных элементов / В.Ф.Оробей, Н.Г.Сурьянинов, А.М.Лимаренко // [Вестник механиков Украины](#). – Одесса, 2007. – Вып. 1.