

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ
СТАТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ СТАТИЧЕСКИ
НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК И РАМ С
УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕДЕНИЯ И ПЛАСТИЧНОСТИ
БЕТОНА**

Фомин В.М., к.т.н., доцент

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса*

В статье [1] был предложен алгоритм решения статических задач для статически определимых железобетонных балок и плоских рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона методом граничных элементов. При этом предполагалось, что все опорные реакции были определены до применения МГЭ. В настоящей работе предлагается обобщение этого алгоритма на случай статически неопределимых балок и рам.

В [2] было выведено дифференциальное уравнение для определения приращений углов поворота поперечных сечений железобетонной балки при пошаговом методе решения:

$$d\phi' + Z_1(s)d\phi' + Z_2(s)d\phi = -Z_3(s)d\xi - Z_4(s)d\eta \quad (1)$$

Здесь штрих означает производную по s , $Z_j(s)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – непрерывные функции s , $d\xi = -dN(0)l^2/H$, $d\eta = dQ(0)l^2/H$ ($dN(0)$ и $dQ(0)$ – приращение продольной и поперечной сил в начале рассматриваемого участка, l – его длина, H – приведенная жесткость поперечного сечения).

Представим уравнение (1) в следующем виде

$$y'''' + Z_1(s)y'' + Z_2(s)y' = Z_3(s)\frac{dN(0)}{H_0} - Z_4(s)\frac{dQ(0)}{H_0}. \quad (2)$$

Здесь через y обозначено dv – приращение прогиба балки, $H_0 = H / l^2$. В [1] предлагалось аппроксимировать функции $Z_k(s)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) полиномами переменной s . В настоящей работе поступим по другому: действуя аналогично [3], заменим эти функции кусочно-постоянными функциями, т.е. фактически заменим рассматриваемый участок балки рядом более мелких участков (будем называть их сегментами), каждому из которых соответствует дифференциальное уравнение (2) с посто-

янными коэффициентами. Так на i -ом сегменте будем иметь следующее уравнение:

$$y''' + z_{1,i}y'' + z_{2,i}y' = z_{3,i} \frac{dN(0)}{H_0} - z_{4,i} \frac{dQ(0)}{H_0}. \quad (3)$$

Здесь $z_{k,i}$ – значение функции $Z_k(s)$ в начале i -го сегмента ($k = 1, 2, 3, 4$).

Далее несколько отклонимся от предлагаемой в [3] методики. Будем строить фундаментальные функции задачи Коши для однородного дифференциального уравнения, соответствующего (2), следующим образом: на первом сегменте j -я функция удовлетворяет начальным условиям

$$y_j^{(j-1)} = 1, \quad y_j^{(m)} = 0 \quad \text{при } m \neq j-1 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

А далее эта функция продолжается на следующий сегмент непрерывно вместе с ее первой и второй производными.

Характеристическое уравнение для однородного уравнения, соответствующего (3), на i -м сегменте выглядит так:

$$\lambda^3 + z_{1,i}\lambda^2 + z_{2,i}\lambda = 0. \quad (5)$$

Его корни таковы:

$$\lambda_{i,1} = -\frac{z_{1,i}}{2} + \sqrt{D_i}, \quad \lambda_{i,2} = -\frac{z_{1,i}}{2} - \sqrt{D_i} \quad (D_i = \frac{z_{1,i}^2}{4} - z_{2,i}), \quad (6)$$

$$\lambda_{i,3} = 0.$$

Если $D_i > 0$, то общее решение уравнения (3) имеет следующий вид:

$$y = c_{i,1}e^{\lambda_{i,1}x} + c_{i,2}e^{\lambda_{i,2}x} + c_{i,3}. \quad (7)$$

Легко убедиться в том, что постоянные интегрирования $c_{i,j}$ (i – номер сегмента, $j = 1, 2, 3$) выражаются через значения функции $y(x)$ и ее производных в начале сегмента следующим образом:

$$c_{i,1} = \frac{\lambda_{i,2}y'(0) - y''(0)}{\lambda_{i,1}(\lambda_{i,2} - \lambda_{i,1})}, \quad c_{i,2} = -\frac{\lambda_{i,1}y'(0) - y''(0)}{\lambda_{i,2}(\lambda_{i,2} - \lambda_{i,1})}, \quad (7a)$$

$$c_{i,3} = \frac{\lambda_{i,1}\lambda_{i,2}y(0) - (\lambda_{i,1} + \lambda_{i,2})y'(0) + y''(0)}{\lambda_{i,1}\lambda_{i,2}}.$$

Если $D_i = 0$, то общее решение уравнения (3) таково

$$y = (c_{i,1} + c_{i,2}x)e^{\lambda_{i,1}x} + c_{i,3}. \quad (8)$$

Постоянные интегрирования записываются через $y(0)$, $y'(0)$ и $y''(0)$ так

$$c_{i,1} = 2y'(0) - \frac{1}{\lambda_{i,1}} y''(0), \quad c_{i,2} = -y'(0) - \frac{1}{\lambda_{i,1}} y''(0), \quad (8a)$$

$$c_{i,3} = y(0) - 2y'(0) + \frac{1}{\lambda_{i,1}} y''(0).$$

Если же $D_i < 0$, то общее решение указанного выше уравнения выглядит так:

$$y = (c_{i,1} \sin b_i x + c_{i,2} \cos b_i x) e^{a_i x} + c_{i,3}, \quad a_i = -\frac{z_{1,i}}{2}, \quad b_i = \sqrt{-D_i}, \quad (9)$$

а выражения для постоянных интегрирования так:

$$c_{i,1} = -\frac{(a_i^2 - b_i^2)y'(0) - a_i y''(0)}{b_i(a_i^2 + b_i^2)}, \quad c_{i,2} = \frac{2a_i y'(0) - y''(0)}{a_i^2 + b_i^2}, \quad (9a)$$

$$c_{i,3} = \frac{(a_i^2 + b_i^2)y(0) - 2a_i y'(0) + y''(0)}{a_i^2 + b_i^2}.$$

На первом сегменте подставляем в (7а) (или (8а), или (9а) в зависимости от значения D_1) вместо $y(0), y'(0), y''(0)$ начальные значения (4), а на i -ом сегменте ($i > 1$) – $y_j(l_{i-1}), y_j'(l_{i-1}), y_j''(l_{i-1})$ (j – номер фундаментальной функции, l_{i-1} – длина $i-1$ -го сегмента).

Аналогично поступаем и с построением частного решения уравнений

$$y'''' + z_{1,i} y''' + z_{2,i} y'' = \frac{z_{3,i}}{H_0}, \quad (10)$$

$$y'''' + z_{1,i} y''' + z_{2,i} y'' = -\frac{z_{4,i}}{H_0}, \quad (11)$$

при нулевых начальных условиях.

Общее решение уравнения (10) будем искать в таком виде:

$$y_N(s) = y(s) + \frac{z_{3,i}}{H_0 z_{2,i}} s, \quad (12)$$

а уравнения (11) – в таком:

$$y_Q(s) = y(s) - \frac{z_{4,i}}{H_0 z_{2,i}} s \quad (13)$$

(y – общее решение однородного уравнения). Из формул (12) и (13) следует, что значения постоянных интегрирования в этих формулах можно вычислить по формулам (7а), (8а) и (9а) с заменой $y(0)$ на $y_N(0)$, $y'(0)$ на $y_N'(0) + z_{3,i}/H_0 z_{2,i}$ и $y''(0)$ на $y_N''(0)$ для формулы (12), и с заменой $y(0)$ на $y_Q(0)$, $y'(0)$ на $y_Q'(0) - z_{4,i}/H_0 z_{2,i}$ и $y''(0)$ на $y_Q''(0)$ для фор-

мулы (13), причем в первом случае на первом сегменте $y_N(0) = y_N'(0) = y_N''(0) = 0$, а во втором – $y_Q(0) = y_Q'(0) = y_Q''(0) = 0$.

Далее строим матрицу $A(x)$ и вектора $B_Q(x)$ и $B_N(x)$:

$$A(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{bmatrix}, B_Q(x) = \begin{bmatrix} y_Q(x) \\ y_Q'(x) \\ y_Q''(x) \end{bmatrix}, B_N(x) = \begin{bmatrix} y_N(x) \\ y_N'(x) \\ y_N''(x) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Дальнейшие построения будут продемонстрированы на приведенном ниже примере.

Пример.

Исследуем процесс плоского изгиба статически неопределимой железобетонной колонны, на которой расположены два груза массой 5Т и на которую действуют гармонически изменяющиеся горизонтальные силы $F_i(t) = A_i \sin(2\pi t / T_i)$ ($i = 1, 2$) (рис. 1), причем периоды изменения этих сил таковы, что можно считать деформации изгиба квазистатическими $T_1 = 30$ с, $T_2 = 10$ с. Остальные параметры: $A_1 = 2$ кН, $A_2 = 8$ кН, $l_1 = 2$ м, $l_2 = l_3 = 4$ м. Размеры поперечного сечения, марка бетона и армирование такие же как и в примере в статье [1].

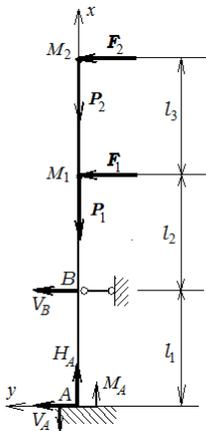


Рис.1

Колонну будем считать балочной системой, состоящей из трех балочных элементов (участков), пограничные сечения которых проходят через точки A, B, M_1 и M_2 .

Как и в [1] предполагается, что нагружение колонны происходит в два этапа. На предварительном этапе происходит постепенное увеличение массы грузов (т.е. постепенное увеличение сил тяжести) от нуля до заданного значения. Это приводит к появлению сжимающих напряжений и перемещений, которые легко определяются при помощи деформационной теории пластичности.

Затем при $t = 0$ начинается основной этап: включаются силы F_1 и F_2 . Продольные силы остаются неизменными.

Используя алгоритм метода граничных элементов [3,4], можно записать следующие соотношения:

$$X_k(l_k) = A_k(l_k) X_k(0) + B_{N,k} dN_k(0) + B_{Q,k} dQ_k(0). \quad (15)$$

Здесь

$$\mathbf{X}_k(x) = \begin{bmatrix} dv_k(x) \\ dv_k'(x) \\ dv_k''(x) \end{bmatrix}$$

(введен индекс k , обозначающий номер элемента, $k = 1, 2, 3$).

Из равенства $\mathbf{X}_2(0) = \mathbf{X}_1(l_1)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2(l_2) = & \mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{A}_1(l_1)\mathbf{X}_1(l_1) + \mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{Q,1}dQ_1(0) + \mathbf{B}_{Q,2}dQ_2(0) + \\ & + \mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{N,1}dN_1(0) + \mathbf{B}_{N,2}dN_2(0). \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что $\mathbf{X}_3(0) = \mathbf{X}_2(l_2)$, с учетом (16) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3(l_3) = & \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{A}_1(l_1)\mathbf{X}_1(l_1) + \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{Q,1}dQ_1(0) + \\ & + \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{B}_{Q,2}dQ_2(0) + \mathbf{B}_{Q,3}dQ_3(0) + \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{N,1}dN_1(0) + \\ & + \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{B}_{N,2}dN_2(0) + \mathbf{B}_{N,3}dN_3(0). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что в связи сказанным выше о продольных силах

$$dN_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Кроме того, очевидно (см. рис.1), что

$$dQ_3(0) = -dF_2, \quad dQ_2(0) = -dF_1 - dF_2.$$

Тогда (17) запишется так

$$\mathbf{X}_3(l_3) = \mathbf{A}_p\mathbf{X}_1(0) + \mathbf{U}_1dQ_1(0) + \mathbf{U}_2, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p = & \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{A}_1(l_1), \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{A}_2(l_2)\mathbf{B}_{Q,1}, \\ \mathbf{U}_2 = & -\mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{B}_{Q,2}dF_2 - (\mathbf{A}_3(l_3)\mathbf{B}_{Q,2} + \mathbf{B}_{Q,3})dF_3. \end{aligned} \quad (18a)$$

Из условий закрепления на концах колонны следует

$$\mathbf{X}_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dv_1''(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3(l_3) = \begin{bmatrix} dv_3(l_3) \\ dv_3'(l_3) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Образует матрицу $\mathbf{A}_p^{(0)}$, которая получается из \mathbf{A}_p обнулением первых двух столбцов и вектор \mathbf{X}_1^* , состоящий из заданных элементов векторов $\mathbf{X}_1(0)$ и $\mathbf{X}_1(l_3)$:

$$\mathbf{X}_1^* = \begin{bmatrix} dv_3(l_3) \\ dv_3'(l_3) \\ dv_1''(0) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$A_p^{(0)} X_1^* = A_p X_1(0). \quad (21)$$

Кроме того, также нетрудно выяснить, что

$$C X_1^* = X_3(l_3), \quad (22)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При помощи (21) и (22) равенство (18) записывается так

$$(A_p^{(0)} - C) X_1^* = -U_1 dQ_1(0) - U_2,$$

откуда находим

$$X_1^* = -(A_p^{(0)} - C)^{-1} U_1 dQ_1(0) - (A_p^{(0)} - C)^{-1} U_2. \quad (23)$$

Из равенства (15) при $k = 1$ имеем

$$X_1(l_1) = A_1^{(0)}(l_1) X_1^* + B_{Q,1} dQ_1(0). \quad (24)$$

Здесь учтено, что

$$A_1(l_1) X_1(0) = A_1^{(0)}(l_1) X_1^* \quad (25)$$

($A_1^{(0)}(l_1)$ - матрица, полученная из $A_1(l_1)$ обнулением первых двух столбцов).

Принимая во внимание (23), равенство (24) можно записать так

$$X_1(l_1) = U_3 dQ_1(0) + U_4. \quad (26)$$

Здесь

$$U_3 = -A_1^{(0)}(l_1)(A_p^{(0)} - C)^{-1} U_1 + B_{Q,1}, \quad U_4 = -A_1^{(0)}(l_1)(A_p^{(0)} - C)^{-1} U_2.$$

Учтем теперь, что $dv_1(l_1) = 0$, т.е.

$$X_{1,1}(l_1) = 0 \quad (27)$$

($X_{1,1}(l_1)$ - первый элемент вектора $X_1(l_1)$). Тогда из (26) будем иметь

$$dQ_1(0) = -\frac{U_{4,1}}{U_{3,1}}.$$

Таким образом, неизвестная величина $dQ_1(0)$ найдена. А из (23) находим остальные неизвестные величины.

На рис.2 приведены графики движения точек M_1 (график 1) и M_2 (график 2) под действием указанных выше сил F_1 и F_2 . Заметно накопление остаточных деформаций.

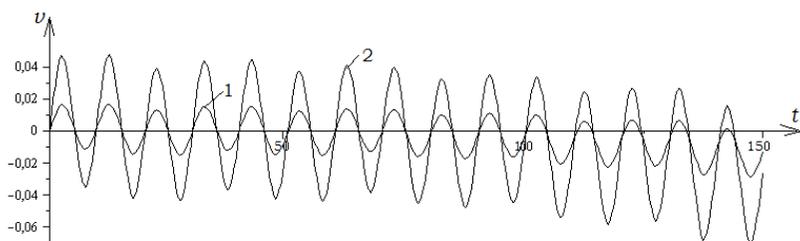


Рис.2

Вывод

Изложенная методика позволяет применить метод граничных элементов при расчете статически неопределимых железобетонных балок и рам с учетом физической и геометрической нелинейностей и пластичности бетона.

Summary

The procedure stated here enables one to apply boundary elements method in statically indeterminate RC beam and frame design with taking into account physical and geometrical nonlinearity and concrete plasticity.

Литература

1. Фомин В.М. Применение метода граничных элементов при исследовании статике и динамики железобетонных балок и рам с учетом нелинейного поведения и пластичности бетона // Вісник ОДАБА. Вып., – Одесса, 2012. – с..
2. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – с.345–353.
3. Баженов В.А., Дашенко А.Ф., Оробей В.Ф. и др. Численные методы в механике – Одесса, 2004 – 564 с.
4. Оробей В. Ф., Ковров А.В.. Решение задач статике, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов – Одесса, 2004 – 123 с.