УДК 624.04(075.8)

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Крутий Ю.С. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

У статті вивчаються поздовжні коливання неоднорідного прямого стержня змінного поперечного перерізу. Побудоване точне розв′язання відповідного диференційного рівняння поздовжніх коливань для випадку, коли коефіцієнт пружності та погонна маса стержня являють собою довільні безперервні функції. Визначена головна форма вільних коливань стержня. Виписані частотні рівняння для трьох різних випадків, які визначаються характером граничних умов на кінцях стержня.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим неоднородный прямой стержень переменного поперечного сечения длины l. Направим ось x вдоль оси стержня и будем считать, что его концы находятся в точках $x = 0$ и $x = l$. Уравнение продольных колебаний стержня, испытывающего деформации растяжения-сжатия, вызванные осевым продольным воздействием, имеет вид [1], [2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q(x,t) \quad (1)$$

Здесь:

1) $k(x) = E(x)S(x)$ – коэффициент упругости, где $E(x), S(x)$ – соответственно модуль упругости материала стержня и площадь поперечного сечения стержня в точке x;
2) $m(x) = \rho(x)S(x)$ – погонная масса стержня, где $\rho(x)$ – плотность материала стержня в точке x;
3) интенсивность продольной динамической нагрузки, направленной по оси стержня;
4) $u(x,t)$ неизвестная функция, представляющая собою продольное перемещение сечения стержня с координатой x в момент времени t.

Функции $k(x) > 0$ и $m(x) > 0$ будем считать непрерывными на отрезке $[0, l]$. Уравнение (1) не учитывает сил инерции, возникающих вследствие поперечных деформаций.

Ставится задача: построить точное решение для дифференциального уравнения продольных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения (1); определить главную форму свободных продольных колебаний стержня; выписать частотные уравнения для разных случаев колебаний, в зависимости от граничных условий на концах стержня.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Согласно методу разделения переменных Фурье [3], представим решение уравнения (1) и нагрузку в виде:

$$u(x,t) = v(x)T(t); \; q(x,t) = q(x)T(t),$$

где $v(x)$ и $q(x)$ – амплитудные значения перемещения и нагрузки соответственно, зависящие только от переменной x, $T(t)$ – неизвестная функция времени t. Функция $q(x)$ также предполагается непрерывной на отрезке $[0, l]$. Подставляя в уравнение (1) вместо функций $u(x,t)$ и $q(x,t)$ их представления, после очевидных преобразований получим

$$\frac{1}{m(x)v(x)}\left(\left(k(x)v'(x)\right)' + q(x)\right) = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}.$$

Левая часть последнего равенства зависит только от переменной x, а правая – только от переменной t. Следовательно, обе эти части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $-\omega^2$. В итоге получим два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0; \quad (2)$$

$$\left(k(x)v'(x)\right)' + \omega^2 m(x)v(x) = -q(x). \quad (3)$$

Будем далее полагать, что нам заданы начальные параметры. К ним относятся параметры начальных условий движения $T(0), \dot{T}(0)$ и граничные параметры $v(0)$, $v'(0)$. В дальнейшем решения уравнений (2), (3), будем выражать через начальные параметры, то есть фактически будем решать задачу Коши для соответствующего уравнения.

Так как коэффициенты однородного уравнения (2) постоянные, выписать для него решение задачи Коши не составляет труда. Это решение будет иметь вид

$$T(t) = \left(T(0)\cos\omega t + \frac{\dot{T}(0)}{\omega}\sin\omega t\right) = A\sin(\omega t + t_0),$$

где $A=\sqrt{T^2(0)+\left(\frac{\dot T(0)}{\omega}\right)^2}$, $t_0=arctg\left(\frac{T(0)}{\dot T(0)}\omega\right)$. Оно говорит о том, что колебания во времени совершаются по гармоническому закону с круговой частотой ω. Главная форма колебаний определяется как решение дифференциального уравнения (3).

Как известно, напряженно-деформируемое состояние стержня, испытывающего деформации растяжения–сжатия, характеризуется двумя компонентами – перемещением $v(x)$ и продольной силой $N(x)$. Эти две компоненты связаны между собой формулой $N(x)=k(x)v'(x)$. Поэтому, с учетом уравнения (3), для двух неизвестных функций $v(x)$ и $N(x)$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v'(x)=\dfrac{1}{k(x)}N(x), \\ N'(x)=-\omega^2 m(x)v(x)-q(x). \end{cases}$$

В векторно-матричном виде наша система запишется следующим образом

$$\frac{dV}{dx}=P(x)V+f(x), \tag{4}$$

где $V=\begin{pmatrix} v(x) \\ N(x)\end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ -q(x)\end{pmatrix}$, $P(x)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k(x)} \\ -\omega^2 m(x) & 0\end{pmatrix}$ – соответственно вектор неизвестных, вектор правой части и матрица коэффициентов системы.

По заданным функциям $k(x), m(x)$ определим две бесконечных системы функций такими рекуррентными соотношениями:

$$\alpha_0(x)=1,\ \ \alpha_i(x)=\int_0^x\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\,\alpha_{i-1}(x)\,dxdx;\ \ \beta_0(x)=\int_0^x\frac{1}{k(x)}dx,\ \ \beta_i(x)=\int_0^x\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\,\beta_{i-1}(x)dxdx, \tag{5}$$

где $i=1,2,3,\ldots$. Кроме того, будем рассматривать еще две бесконечных системы функций из производных:

$$\alpha_0'(x)=0,\ \ \alpha_i'(x)=\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\alpha_{i-1}(x)\,dx,\ \ \beta_0'(x)=\frac{1}{k(x)},\ \beta_i'(x)=\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\beta_{i-1}(x)\,dx\ (i=1,2,3,\ldots) \tag{6}$$

Заметим при этом, что введенные функции обладают следующими свойствами, которые легко проверяются:

$$\left(k(x)\alpha_i'(x)\right)'=m(x)\,\alpha_{i-1}(x);\ \ \left(k(x)\beta_i'(x)\right)'=m(x)\,\beta_{i-1}(x); \tag{7}$$

$$\alpha_i(0)=\alpha_i'(0)=\beta_i(0)=\beta_i'(0)=0. \tag{8}$$

Введем теперь в рассмотрение четыре функциональных ряда:

$$\Omega_1(x)=\alpha_0(x)-\omega^2\alpha_1(x)+\omega^4\alpha_2(x)-\omega^6\alpha_3(x)+\cdots; \tag{9}$$

$$\Omega_2(x)=\beta_0(x)-\omega^2\beta_1(x)+\omega^4\beta_2(x)-\omega^6\beta_3(x)+\cdots; \tag{10}$$

$$\Omega_1'(x)=-\omega^2\alpha_1'(x)+\omega^4\alpha_2'(x)-\omega^6\alpha_3'(x)+; \tag{11}$$

$$\Omega_2'(x)=\frac{1}{k(x)}-\omega^2\beta_1'(x)+\omega^4\beta_2'(x)-\omega^6\beta_3'(x)+\cdots. \tag{12}$$

Суммы рядов (11), (12) обозначены $\Omega_1'(x)$ и $\Omega_2'(x)$ пока только формально. Покажем теперь, что все четыре ряда сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $[0,l]$. Для этого построим соответствующие мажорантные ряды.

Определим две неотрицательные постоянные g и h равенствами $g=\max_{x\in[0,l]}m(x)$, $h=\max_{x\in[0,l]}\frac{1}{k(x)}$. Тогда для функций $\alpha_i(x)$, $\alpha_i'(x)$ $(i=1,2,3,\ldots)$ будут справедливы оценки:

$$|\alpha_1(x)|=\left|\int_0^x\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\,dxdx\right|\le gh\int_0^x\int_0^x dxdx=gh\frac{x^2}{2!},$$

$$|\alpha_2(x)|=\left|\int_0^x\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\,\alpha_1(x)dxdx\right|\le gh\int_0^x\int_0^x|\alpha_1(x)|dxdx\le (gh)^2\int_0^x\int_0^x\frac{x^2}{2!}dxdx=(gh)^2\frac{x^4}{4!}$$

$$|\alpha_1'(x)|=\left|\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\,dx\right|\le gh\int_0^x dx=ghx,$$

$$|\alpha_2'(x)|=\left|\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\,\alpha_1(x)dx\right|\le gh\int_0^x|\alpha_1(x)|dx\le (gh)^2\int_0^x\frac{x^2}{2!}dx=(gh)^2\frac{x^3}{3!}$$

Аналогично, для функций $\beta_0(x)$, $\beta_i(x)$, $\beta_i'(x)$ $(i=1,2,3,\ldots)$ имеем:

$$|\beta_0(x)|=\left|\int_0^x\frac{1}{k(x)}dx\right|\le h\int_0^x dx=hx,$$

$$|\beta_1(x)| = \left|\int_0^x \frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\,\beta_0(x)\,dxdx\right| \le gh\int_0^x\int_0^x |\beta_0(x)|dxdx$$
$$\le gh^2\int_0^x\int_0^x xdxdx = gh^2\frac{x^3}{3!},$$
$$|\beta_2(x)| = \left|\int_0^x \frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\,\beta_1(x)\,dxdx\right| \le gh\int_0^x\int_0^x |\beta_1(x)|dxdx \le g^2h^3\int_0^x\int_0^x \frac{x^3}{3!}dxdx = g^2h^3\frac{x^5}{5!},$$

$$|\beta_1'(x)| = \left|\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\beta_0(x)\,dx\right| \le gh\int_0^x |\beta_0(x)|dx \le gh^2\int_0^x x\,dx = gh^2\frac{x^2}{2!},$$
$$|\beta_2'(x)| = \left|\frac{1}{k(x)}\int_0^x m(x)\beta_1(x)\,dx\right| \le gh\int_0^x |\beta_1(x)|dx \le g^2h^3\int_0^x \frac{x^3}{3!}dx = g^2h^3\frac{x^4}{4!}.$$

Следовательно, для рядов, составленных из модулей, получаем:

$$|\alpha_0(x)| + |\omega^2\alpha_1(x)| + |\omega^4\alpha_2(x)| + \cdots \le 1 + gh\omega^2\frac{x^2}{2!} + (gh)^2\omega^4\frac{x^4}{4!} + \cdots = ch\sqrt{gh}\omega x,$$
$$|\beta_0(x)| + |\omega^2\beta_1(x)| + |\omega^4\beta_2(x)| + + \cdots \le hx + gh^2\omega^2\frac{x^3}{3!} + g^2h^3\omega^4\frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{h}{g}}\,sh\sqrt{gh}\omega x,$$
$$|\omega^2\alpha_1'(x)| + |\omega^4\alpha_2'(x)| + \cdots \le gh\omega^2 x + (gh)^2\omega^4\frac{x^3}{3!} + \cdots = \omega\sqrt{gh}\,sh\sqrt{gh}\omega x$$
$$\frac{1}{k(x)} + |\omega^2\beta_1'(x)| + |\omega^4\beta_2'(x)| + \cdots \le h + gh^2\omega^2\frac{x^2}{2!} + g^2h^3\omega^4\frac{x^4}{4!} + \cdots = h\,ch\sqrt{gh}\omega x$$

Очевидно, мажорантами здесь выступают элементарные функции $ch\sqrt{gh}\omega x$, $\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{h}{g}}\,sh\sqrt{gh}\omega x$, $\omega\sqrt{gh}\,sh\sqrt{gh}\omega x$ и $h\,ch\sqrt{gh}\omega x$, а значит, ряды из модулей сходятся, причем сходятся равномерно на всей числовой оси. Тем самым доказано, что ряды (9), (10), (11), (12) сходятся абсолютно и равномерно на $[0,l]$. Из этого факта следует, что ряды (9), (10) можно почленно дифференцировать и обозначения $\Omega_1'(x)$и $\Omega_2'(x)$ для рядов (11), (12) законны. Заметим, что все приведенные выше оценки, очевидно, остаются справедливыми и в точке $x = l$. Это означает, что и числовые ряды $\Omega_1(l), \Omega_2(l), \Omega_1'(l), \Omega_2'(l)$ абсолютно сходятся.

Далее умножим каждое $k(x)$ из равенств (11), (12) на и результат почленно продифференцируем. Тогда, с учетом формул (7), получим:

$$\left(k(x)\Omega_1'(x)\right)' = -\omega^2\left(k(x)\alpha_1'(x)\right)' + \omega^4\left(k(x)\alpha_2'(x)\right)' - \omega^6\left(k(x)\alpha_3'(x)\right)' + \cdots =$$
$$= -\omega^2 m(x) + \omega^4 m(x)\alpha_1(x) - \omega^6 m(x)\alpha_2(x) + \cdots = -\omega^2 m(x)\Omega_1(x)$$
$$\left(k(x)\Omega_2'(x)\right)' = -\omega^2\left(k(x)\beta_1'(x)\right)' + \omega^4\left(k(x)\beta_2'(x)\right)' - \omega^6\left(k(x)\beta_3'(x)\right)' + \cdots =$$
$$= -\omega^2 m(x)\beta_0(x) + \omega^4 m(x)\beta_1(x) - \omega^6 m(x)\beta_2(x) + \cdots = -\omega^2 m(x)\Omega_2(x)$$

Следовательно, функции $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$ - решения однородного уравнения (3). Заметим при этом, что ряды $\left(k(x)\Omega_1'(x)\right)'$,$\left(k(x)\Omega_2'(x)\right)'$ являются равномерно сходящимися, поскольку отличаются соответственно от рядов $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$только множителем $-\omega^2 m(x)$.

Рассмотрим теперь матрицу

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) \\ k(x)\Omega_1'(x) & k(x)\Omega_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой легко убедится, что матрица $\Omega(x)$ удовлетворяет однородной системе (4), то есть

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) \\ k(x)\Omega_1'(x) & k(x)\Omega_2'(x) \end{pmatrix}$$

Кроме того, на основании свойств (8) заключаем, что

$$\Omega(0) = \begin{pmatrix} \Omega_1(0) & \Omega_2(0) \\ k(0)\Omega_1'(0) & k(0)\Omega_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

а значит, $\Omega(x)$ является нормированным решением однородной системы (4). Такое решение системы дифференциальных уравнений принято называть матрицантом [4]. Определитель матрицанта найдем по формуле Якоби [4]

$$|\Omega(x)| = |\Omega(0)| e^{\int_0^x Sp\, P(x)\, dx} = 1,$$

где $Sp\, P(x) -$ след матрицы $P(x)$. Заметим, что из неравенства нулю $|\Omega(x)|$ вытекает линейная независимость функций $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, а значит, эти функции образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения (3).

Знание матрицанта позволяет найти общее решение неоднородной системы (4) по известной формуле [4]

$$V(x) = \Omega(x)C + \Omega(x)\int_0^x \Omega^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} -$ произвольный постоянный вектор. Запишем эту формулу в явном виде

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1(x) & \Omega_2(x) \\ k(x)\Omega_1'(x) & k(x)\Omega_2'(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} - \int_0^x \begin{pmatrix} \Omega_1(\tau)\Omega_2(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1(x) \\ k(x)\left(\Omega_1(\tau)\Omega_2'(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1'(x)\right) \end{pmatrix} q(\tau)\, d\tau \qquad (14)$$

и выразим здесь постоянные интегрирования C_1, C_2 через начальные параметры. Полагая в формуле (14) переменную x равной нулю и учитывая (13), легко находим $C_1 = v(0)$, $C_2 = N(0) = k(0)v'(0)$.

В итоге, из формулы (14) имеем следующее решение уравнения (3), выраженное через начальные параметры

$$v(x) = v(0)\Omega_1(x) + N(0)\Omega_2(x) - \int_0^x \left(\Omega_1(\tau)\Omega_2(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1(x)\right) q(\tau)\, d\tau \qquad (15)$$

Этим равенством в общем случае определяется амплитудное значение продольного перемещения точки оси стержня с координатой x. В случае свободных колебаний стержня в уравнении (1) внешняя нагрузка отсутствует $q(x,t) \equiv 0$. Следовательно, главная форма свободных продольных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения определяется равенством

$$v(x) = v(0)\Omega_1(x) + N(0)\Omega_2(x). \qquad (16)$$

Помимо определения формы колебаний, важной задачей является также отыскание частот собственных колебаний стержня. Последние находятся из так называемых частотных уравнений [1], [6]. Выведем частотные уравнения для нескольких случаев, определяемых характером граничных условий на концах стержня.

1. Оба конца стержня жестко закреплены. Очевидно, граничные условия здесь имеют вид [6]

$$v(0) = v(l) = 0.$$

Удовлетворяя первому из этих условий, из формулы (16) будем иметь

$$v(x) = N(0)\Omega_2(x).$$

Второе граничное условие приводит к равенству $N(0)\Omega_2(l) = 0$. Поскольку ищется нетривиальное решение, то неизбежно приходим к условию $\Omega_2(l) = 0$. Записывая его в явном виде, получаем частотное уравнение в случае свободных продольных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с жестко закрепленными концами

$$\beta_0(l) - \beta_1(l)\omega^2 + \beta_2(l)\omega^4 - \beta_3(l)\omega^6 + \cdots = 0, \qquad (17)$$

где

$$\beta_0(l) = \int_0^l \frac{1}{k(x)}\, dx, \quad \beta_i(l) = \int_0^l \frac{1}{k(x)} \int_0^x m(x)\, \beta_{i-1}(x)\, dx dx, \quad (i = 1,2,3,\dots).$$

1. Конец $x = 0$ стержня закреплен, а конец $x = l$ свободен. Граничные условия запишутся так [6]

$$v(0) = N(l) = 0.$$

Согласно (14), формула для продольной силы в случае свободных колебаний имеет вид

$$N(x) = v(0)k(x)\Omega_1'(x) + N(0)k(x)\Omega_2'(x), \qquad (18)$$

что в нашем случае приводит к равенству

$$N(x) = N(0)k(x)\Omega_2'(x).$$

Отсюда, реализуя второе из граничных условий, получаем $k(l)\Omega_2'(l) = 0$. Учитывая формулы (6), (12), выпишем в явном виде частотное уравнение для случая свободных продольных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения, когда конец $x = 0$ жестко закреплен, а конец $x = l$ свободен

$$1 - \beta_1^*(l)\,\omega^2 + \beta_2^*(l)\,\omega^4 - \beta_3^*(l)\,\omega^6 + \cdots = 0, \qquad (19)$$

где

$$\beta_i^*(l) = \int_0^l m(x)\beta_{i-1}(x)\,dx \; (i = 1,2,3,\dots).$$

2. Концы стержня не закреплены. Это значит, что продольная сила должна равняться нулю на каждом конце [6]. Следовательно, граничные условия запишутся в форме

$$N(0) = N(l) = 0.$$

Реализуя первое из граничных условий, согласно формуле (18), имеем

$$N(x) = v(0)k(x)\Omega_1'(x).$$

Реализация второго граничного условия приводит к равенству $k(l)\Omega_1'(l) = 0$. Далее, с учетом формул (6), (11), частотное уравнение для случая свободных продольных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения со свободными концами запишется в виде

$$\alpha_1^*(l) - \alpha_2^*(l)\,\omega^2 + \alpha_3^*(l)\omega^4 - \alpha_4^*(l)\,\omega^6 + \cdots = 0, \qquad (20)$$

где

$$\alpha_i^*(l) = \int_0^l m(x)\alpha_{i-1}(x)\,dx \; (i = 1,2,3,\dots).$$

Таким образом, левые части всех частотных уравнений представляют собою абсолютно сходящиеся числовые ряды, а именно $\Omega_2(l)$, $k(l)\Omega_2'(l)$, $k(l)\Omega_1'(l)$. Это означает, что какова бы ни была изначально задана точность вычислений, ее всегда можно достичь, удерживая конечное число $n+1$ первых членов ряда и пренебрегая остальными. В результате такой процедуры, для определения частот собственных колебаний получим алгебраическое уравнение степени n относительно неизвестной ω^2.

До настоящего времени наиболее полно изучены продольные колебания стержня для случая, когда коэффициент упругости и масса постоянны. Соответственно, решение дифференциального уравнения продольных колебаний бруса в амплитудном состоянии с постоянными коэффициентами общеизвестно [1], [5]. Покажем, что это решение получается из приведенных выше формул, как частный случай.

Действительно, полагая $k = ES = const$, $m = \rho S = const$ и обозначая $c = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, по формулам (5), (9), (10) будем иметь:

$\alpha_0(x) = 1$, $\alpha_1(x) = \frac{1}{c^2}\int_0^x\int_0^x dxdx = \frac{1}{c^2}\frac{x^2}{2!}$, $\alpha_2(x) = \frac{1}{c^4}\int_0^x\int_0^x \frac{x^2}{2!}dxdx = \frac{1}{c^4}\frac{x^4}{4!}$, …;

$\beta_0(x) = \frac{1}{k}\int_0^x dx = \frac{1}{k}x$, $\beta_1(x) = \frac{1}{kc^2}\int_0^x\int_0^x x\,dxdx = \frac{1}{kc^2}\frac{x^3}{3!}$,

$$\beta_2(x) = \frac{1}{kc^4}\int_0^x\int_0^x \frac{x^3}{3!}\,dxdx = \frac{1}{kc^4}\frac{x^5}{5!}, \dots;$$

$$\Omega_1(x) = 1 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^4\frac{x^4}{4!} - \cdots = \cos\frac{\omega}{c}x;$$

$$\Omega_2(x) = \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{k}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\frac{x^5}{5!} - \cdots = \frac{c}{k\omega}\sin\frac{\omega}{c}x;$$

$$\Omega_1(\tau)\Omega_2(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1(x) = \frac{c}{k\omega}\left(\cos\frac{\omega}{c}\tau\sin\frac{\omega}{c}x - \sin\frac{\omega}{c}\tau\cos\frac{\omega}{c}x\right) = \frac{c}{k\omega}\sin\frac{\omega}{c}(x-\tau).$$

Из формулы (15) теперь получаем известное решение дифференциального уравнения (3), когда коэффициент упругости и масса постоянны

$$v(x) = v(0)\cos\frac{\omega}{c}x + N(0)\frac{c}{k\omega}\sin\frac{\omega}{c}x - \frac{c}{k\omega}\int_0^x \sin\frac{\omega}{c}(x-\tau)\,q(\tau)\,d\tau.$$

Наконец заметим, что выведенные здесь частотные уравнения также принимают общеизвестный вид [5] в случае, когда коэффициент упругости и масса постоянны, а именно из уравнений (17) и (20) получаем $\sin\frac{\omega}{c}l = 0$, а из уравнения (19) получаем $\cos\frac{\omega}{c}l = 0$.

Выводы

В работе впервые построено решение дифференциального уравнения продольных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения для случая, когда коэффициент упругости и погонная масса стержня представляют собою произвольные непрерывные функции. Продольная динамическая нагрузка при этом имеет вид $q(x,t) = q(x)A\sin(\omega t + t_0)$, где $q(x)$ — произвольная непрерывная функция. Окончательно, вынужденные продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения в общем случае описываются формулой

$$y(x,t) = \left(v(0)\Omega_1(x) + N(0)\Omega_2(x) - \int_0^x \left(\Omega_1(\tau)\Omega_2(x) - \Omega_2(\tau)\Omega_1(x)\right) q(\tau)d\tau\right) A\sin(\omega t + t_0)$$

Определена главная форма свободных продольных колебаний стержня. Выписаны частотные уравнения для трех случаев краевых условий на концах стержня. Показано, что ранее известные формулы, которыми описываются колебания стержня при постоянном коэффициенте упругости и постоянное массе, вытекают из найденных здесь формул, как частный случай.

Summary

The longitudinal vibrations of the non-homogeneous straight bar with variable section are studied in the article. The solution of the corresponding differential equation is given.

Литература

1. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1971. – 512 с.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 767 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. Оробей В.Ф., Дащенко А.Ф., Андриенко Н.Н. Метод граничных интегральных уравнений в расчетах линейных систем. – К.: Наукова думка, 1995. – 390 с.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.