

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ  
ПРИ РАСЧЕТЕ ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ  
С ИСТОЧНИКАМИ В КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ**

**Загинайло И.В.**, к.ф.-м.н., доцент

**Максименюк Я.А.**, к.т.н., доцент

**Писаренко А.Н.**, к.ф.-м.н., доцент

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*  
sivzag@gmail.com

**Аннотация.** Разработаны программные средства для расчета квазидвумерных температурных полей с распределенными источниками тепла в областях произвольной формы. Показано, что для расчетов температурных полей в прямоугольных областях с достаточной точностью могут быть применены аналитические решения для цилиндрически симметричных случаев с применением коэффициентов формы. Для повышения точности расчетов предложен метод включения эффективных распределенных источников тепла.

**Ключевые слова:** температурное поле, коэффициент формы, метод эквивалентности, распределенный источник, эффективный источник.

**ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ  
ПРИ РОЗРАХУНКУ ДВОВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ  
ПОЛІВ З ДЖЕРЕЛАМИ У КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛАХ**

**Загинайло І.В.**, к.ф.-м.н., доцент

**Максименюк Я.О.**, к.т.н., доцент

**Писаренко О.М.**, к.ф.-м.н., доцент

*Одеська державна академія будівництва і архітектури*  
sivzag@gmail.com

**Анотація.** Розроблено програмні засоби для розрахунку квазідвовимірних температурних полів з розподіленими джерелами тепла в областях довільної форми. Показано, що для розрахунків температурних полів в прямокутних областях з достатньою точністю можуть бути застосовані аналітичні рішення для циліндрично симетричних випадків із застосуванням коефіцієнтів форми. Для підвищення точності розрахунків запропоновано метод включення ефективних розподілених джерел тепла.

**Ключові слова:** температурне поле, коефіцієнт форми, метод еквівалентності, розподілене джерело, ефективне джерело.

**APPLICATION OF EQUIVALENCE IN CALCULATING TWO-DIMENSIONAL  
UNSTEADY TEMPERATURE FIELDS WITH SOURCES IN COMPOSITE MATERIALS**

**Zaginaylo I.**, PhD., Assistant Professor

**Maximenouk Y.**, PhD., Assistant Professor

**Pisarenko A.**, PhD., Assistant Professor

*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*  
sivzag@gmail.com

**Abstract.** It was found that analytical solutions can be applied for calculation of temperature

fields in the areas of the rectangular form. These solutions are obtained for the cylindrically symmetric problems, provided an effective size of the area is applied instead of real size. The form coefficients binding the effective and real sizes are calculated using computer modeling. To increase the accuracy of calculations the method of efficient distributed heat sources inclusion in the area has been proposed. These sources influence on the temperature distribution is the same as inflow and outflow of heat. Simultaneous form coefficients and effective sources using allows calculate accurately and quickly temperature fields applying analytical formulas for a number of practically important cases, instead of the numerical simulation application.

**Keywords:** temperature field, form coefficient, inclusion method, cylindrical sources, effective sources.

**Вступлення.** Экономия топливно-энергетических ресурсов в строительной индустрии требует проведения энергосберегающих мероприятий, в числе которых следует упомянуть создание и использование строительных композиционных материалов, обеспечивающих минимальные тепловые потери в сооружении. При этом важной задачей при оценке качества строительных материалов и изменений их характеристик в процессе эксплуатации является контроль их теплозащитных свойств неразрушающими методами, основанными на измерениях температур на поверхностях изделия без нарушения его целостности [1]. Температурное поле, определяемое из решения краевых задач теплопроводности для соответствующих тепловых воздействий и условий проведения теплофизического эксперимента, содержит наиболее полную информацию о теплофизических свойствах (ТФС) исследуемых материалов и изделий. Однако решение обратной задачи – восстановление ТФС по температурному полю – представляет собой серьезную проблему ввиду сложности математических моделей тепловых процессов даже в двухкомпонентных композиционных материалах [2].

**Постановка проблемы и анализ исследований.** Для разработки неразрушающих методов теплофизической диагностики, основанных на решении обратной задачи теплопереноса, необходимо проведение предварительного анализа, в частности численных экспериментов.

Математическая модель, описывающая стационарное распределение температурных полей  $T(x, y, z)$  с источниками и стоками в изотропной среде с постоянной теплопроводностью  $\lambda$ , содержит граничное условие первого рода для уравнения Пуассона

$$\Delta T(x, y, z) = -\frac{w(x, y, z)}{\lambda}, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $w$  – объемная плотность тепловыделения, которое для источников берется со знаком «+», а для стоков – со знаком «-». Переход к квазидвумерной задаче осуществляется в предположении отсутствия изменений температуры и тепловыделения вдоль оси  $z$ :  $\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ .

Аналитические решения уравнения (1) находятся лишь для ограниченного количества частных случаев. При этом для задач такого рода хорошо развиты численные методы решения [3, 4]. Однако применение численных методов при практических расчетах менее удобно, чем использование аналитических формул, особенно, если требуется получить решение не прямой, а обратной задачи теплопереноса. Одним из методов, позволяющих находить аналитические решения для более широкого круга частных случаев, является метод эквивалентности. Суть его состоит в том, что в задачу вводятся эффективные источники и дополнительные области, не меняющие искомого распределение температур и тепловых потоков, но делающие возможным аналитически разрешить уравнение (1), после чего окончательное решение для реальной области получается с использованием принципа суперпозиции.

Возможен и другой подход: получить серию численных решений для практически важных случаев конфигурации источников в областях актуальной геометрии и найти

аппроксимирующие формулы, позволяющие вычислять эти решения с достаточной точностью. При этом вид и режим теплового воздействия, и условия численного эксперимента выбирают такими, чтобы описать физику процесса можно было бы с помощью несложных математических зависимостей.

**Цель данной работы** – найти аппроксимирующие функции для численных решений в прямоугольных областях с источниками. При этом, выбирая аппроксимирующую функцию, мы планируем опираться на метод эквивалентности.

**Объекты и методы исследования.** Нами создана программа для расчета температурных полей плоских областей произвольной формы, вписанных в прямоугольник  $N_x \times M_y$ , с использованием метода верхней последовательной релаксации (ВПР).

В нашей программе предусмотрена возможность задания внутри изучаемой области подобластей с положительным и отрицательным тепловыделением двумя способами.

Первый способ состоит в том, что подобласти присваивается некоторая постоянная температура. В этом случае граница данной подобласти тепловыделения с остальной областью фактически несет дополнительные краевые условия первого рода. Поэтому такие подобласти мы условимся называть источниками первого рода. Физической реализацией такого источника может быть трубопровод с протекающим теплоносителем или хладагентом, имеющим высокую теплоемкость и поэтому сохраняющим постоянную температуру на границе трубопровода с изучаемой средой.

Второй способ состоит в задании постоянной тепловой мощности, выделяемой в данной подобласти. Физической реализацией такого источника может быть кабель, в котором в результате прохождения электрического тока выделяется постоянное количество тепла в единицу времени. Такие источники условимся называть источниками второго рода.

При этом, учитывая квазидвумерность задачи, мы полагаем, что протяженность изучаемой области по координате  $z$  равна шагу сетки  $h$  по координатам  $x$  и  $y$ , и тепловой поток от каждого элементарного объема  $h^3$  распространяется только вдоль двух координатных осей через 4 площадки размером  $h^2$  каждая.

Рассмотрим тепловой поток от элементарного объема с объемной плотностью тепловыделения  $w_{ij}$ , который расположен в удалении от других источников тепловыделения. Такой источник будем называть локализованным. Плотности тепловых потоков через четыре площадки  $h^2$  к соседним элементарным объемам будут приблизительно равны между собой и

составят  $q = \frac{h^3 w}{4h^2} = \lambda \frac{\delta T}{h}$ , откуда можно определить среднеинтегральный температурный напор между локализованным источником и соседними элементарными объемами:

$$\delta T = \frac{h^2 w}{4\lambda}. \quad (2)$$

Расчетная формула для итерационных вычислений имеет вид:

$$T_{i,j}^n = T_{i,j}^{n-1} + \tau \cdot \left( \frac{T_{i-1,j}^n + T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^{n-1} + T_{i+1,j}^{n-1}}{4} + \delta T_{i,j} - T_{i,j}^{n-1} \right), \quad (3)$$

где  $\delta T_{i,j}$  – среднеинтегральный температурный напор от локализованного источника в узле с номером  $i,j$ . В случае отсутствия тепловыделения в узле с номером  $i,j$  напор  $\delta T_{i,j}$  принимается равным 0.

Итерационный процесс предваряется заданием начальных (затравочных) температур внутри области и координатной зависимости температуры на ее границах.

Корректность расчетной программы была проверена на двух задачах вычисления температурных полей, для которых известны [5, 6] аналитические решения, а именно: в однородной цилиндрической стенке без источников и в однородном круглом стержне с равномерным тепловыделением по всему объему (распределенный источник). Вычисления проводились на различных сетках с общим числом узлов от  $4 \times 10^4$  до  $1,25 \times 10^6$  с эмпирически подобранными параметрами релаксации  $\tau$ .

Рис. 1 показывает пример сравнения аналитического и численного расчета

распределения температуры  $T(r')$  вдоль радиуса цилиндрической стенки. Здесь мы ввели безразмерное расстояние  $r' = \frac{r}{h}$ , где  $h$  – шаг сетки, на которой проводятся итерационные вычисления.

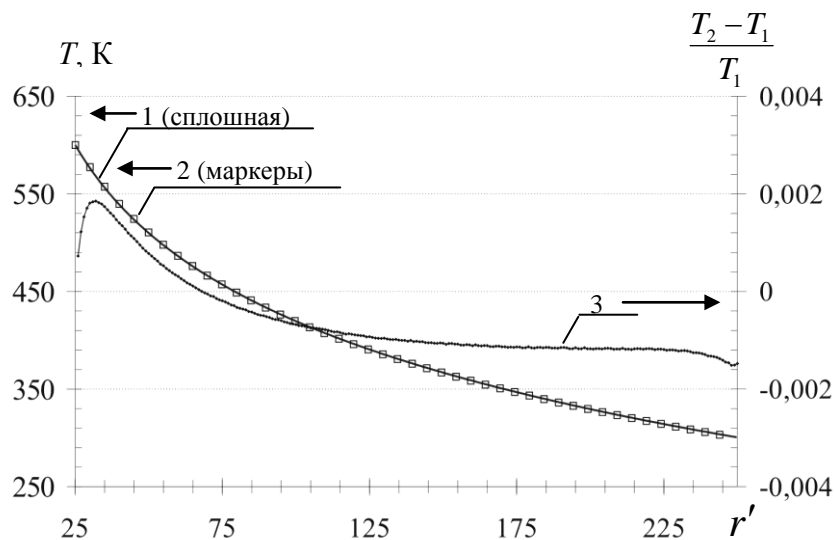


Рис.1 Температурное поле  $T(r')$  внутри цилиндрической стенки:  
 1 – аналитический расчет согласно (6); 2 – численный расчет методом ВПР;  
 3 – относительное отклонение двух расчетов

Ось цилиндра совпадает с началом координат и размещена в центре сетки  $500 \times 500$  шагов  $h$ . Тогда внутренняя граница очерчена радиусом  $r'_{in} = 25$ , а внешняя – радиусом  $r'_{ex} = 500$ . Температура внутренней поверхности цилиндрической стенки  $T_{in} = 600$  К, и в нашей терминологии внутренняя стенка является источником первого рода. Температура внешней границы принималась равной  $T_{ex} = 300$  К. Аналитический расчет выполнялся согласно [5] по формуле

$$T(r) = T_{in} - \frac{T_{in} - T_{ex}}{\ln \frac{r_{ex}}{r_{in}}} \cdot \ln \frac{r}{r_{in}} \quad (4)$$

Результат аналитического расчета показан сплошной линией 1. Линией 2 (квадратные маркеры) показан результат численного расчета после 1500 итераций. Кривая 3 показывает распределение относительного отклонения двух расчетов по толщине стенки. Отличия в результатах аналитического и численного расчетов не превышают 0,2%.

Согласно [6], в случае равномерного тепловыделения в круглом стержне радиусом  $r_{ex}$ , распределение температуры внутри стержня (начало оси координат совпадает с осью стержня) описывается параболой вида

$$T(r) = T_0 - T_1 \left( \frac{r}{r_{ex}} \right)^2, \quad (5)$$

где  $T_0$  и  $T_1$  – некоторые константы. При этом температура в центре стержня (с переходом к безразмерным расстояниям) выражается соотношением

$$T_c = T_{ex} + \delta T \cdot r'_{ex}{}^2, \quad (6)$$

где  $T_{ex}$  – температура на наружной поверхности стержня, а  $\delta T$  – температурный напор на одном шаге сетки.

На рис. 2 показан результат расчета температурного поля для круглого стержня радиусом  $r'_{ex} = 250$  с температурным напором = 0,00075 К в каждом узле (источники второго

рода в нашей терминологии) и температурой наружной поверхности  $T_{ex} = 300$  К.

Полученное распределение температуры в стержне является, как и требует (6), параболическим:  $T(r) = 347.01 - 0.00075044 \cdot r^2$ , при этом квадрат коэффициента корреляции составляет 0,9999984. Относительное отклонение температурного напора  $\delta T$ , определенного из параметров параболы, от заложенного в расчет составляет  $6 \cdot 10^{-4}$ , а отклонение температуры в центре стержня от теоретически ожидаемой  $T_C = 346,875$  К составило  $4 \cdot 10^{-4}$ .

Таким образом, проделанные вычисления подтвердили корректность работы нашей программы.

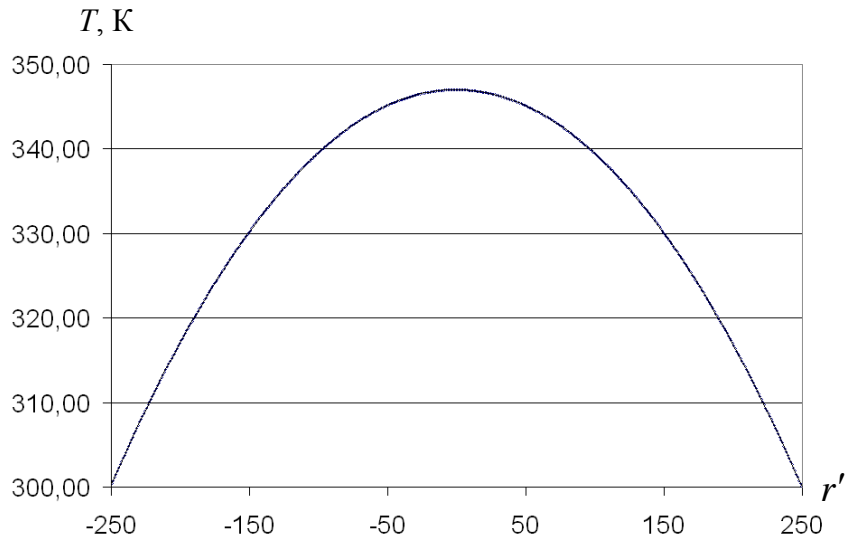


Рис.2 Температурное поле  $T(r')$  внутри цилиндрического стержня с однородным тепловыделением в его объеме; график представляет собой совокупность близко расположенных точек, полученных в результате расчета

**Результаты исследований.** Следующим этапом численных экспериментов стало изучение температурных профилей в областях квадратной формы с цилиндрическим источником первого рода в центре. Расчеты показали, что переход от цилиндрической к квадратной форме на внешней границе области мало сказывается на распределении температуры вдоль координатных осей – см. рис. 3.

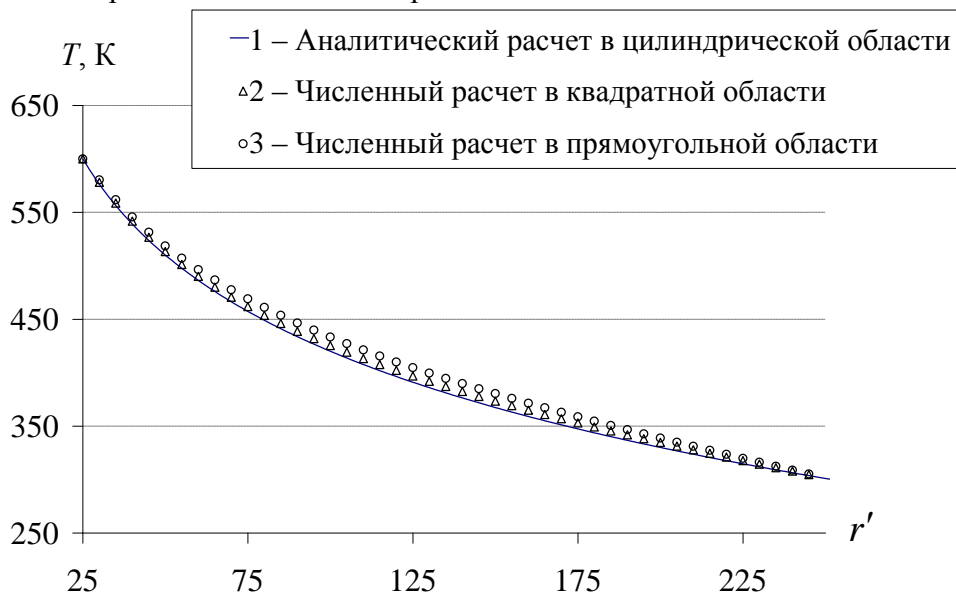


Рис.3. Температурное поле  $T(r)$  внутри цилиндрической стенки (1), вдоль координатной оси внутри квадратной (2) и прямоугольной (3) стенки

На рис.3 линия 1 показывает распределение температуры вдоль координатных осей в области цилиндрической формы диаметром 500 узлов сетки, а линия маркеров 2 – распределение температуры в области квадратной формы размером 500×500 узлов. Максимальное отличие температур от случая цилиндрической области составляет всего 2%. Таким образом, в квадратной области с цилиндрическим источником в центре можно продолжать использовать формулу (4) для расчета температуры вдоль координатных осей.

Для повышения точности расчета по формуле (4) в случае квадратной области можно воспользоваться следующим методом. Предположим, что распределение температуры вдоль координатных осей в реальной квадратной области полушириной  $r_{ex}$  и с внутренней цилиндрической стенкой радиусом  $r_{in}$  эквивалентно распределению температуры внутри некоторой воображаемой цилиндрической стенки с эффективными размерами  $r_{in}^{(eff)}$  и  $r_{ex}^{(eff)}$ .

Введем коэффициенты эквивалентного преобразования формы (кратко – коэффициенты формы):  $k_{ex} = \frac{r_{ex}^{(eff)}}{r_{ex}}$  и  $k_{in} = \frac{r_{in}^{(eff)}}{r_{in}}$ . С учетом введенных коэффициентов формы формула (6) предстанет в виде:

$$T(r) = T_{in} - \frac{T_{in} - T_{ex}}{\ln \frac{k_{ex} r_{ex}}{k_{in} r_{in}}} \cdot \ln \frac{r}{k_{in} r_{in}} \quad (7)$$

Численные расчеты в областях размерами от 200×200 до 1250×1250 узлов сетки показали, что для наилучшего совпадения результатов с формулой (7) следует принять  $k_{ex} \approx 1.043$  независимо от внешних и внутренних размеров области, а  $k_{in}$  рассчитывать по следующей формуле:

формуле:  $k_{in} \approx 1,031 - \frac{1,029}{r_{in}} - \frac{1,275}{r_{ex}} + \frac{5,847}{r_{in} \sqrt{r_{ex}}}$ , где  $r_{in}$  и  $r_{ex}$  задаются числом шагов сетки. При этом коэффициенты формы с точностью  $10^{-5}$  не зависят от температуры внутренней стенки.

Использование формулы (7) с коэффициентами формы увеличивает точность аналитического расчета зависимости  $T(r)$  вдоль координатных осей в квадратной области с 2% до 0,3 – 0,4%.

При переходе от квадратных областей к прямоугольным (при этом мы увеличивали размер области по оси  $Y$ , а размер по оси  $X$  оставляли фиксированным) ход зависимости  $T(r)$  вдоль оси  $X$  несколько изменяется. Линией 3 на рис.3 показан расчет температуры вдоль оси  $X$  в прямоугольной области 500×1500 узлов ( $M_Y : N_X = 3:1$ ) с той же внутренней цилиндрической границей. Важно отметить, что при дальнейшем росте отношения  $M_Y : N_X$  изменения температурного распределения в расчетах не появляются. Так, температуры  $T(r)$  вдоль оси  $X$  в области 500×2400 узлов отличаются от температур в области 500×1500 узлов не более, чем на  $6 \cdot 10^{-5}$ .

Таким образом, наши расчеты показали, что область с  $M_Y : N_X > 3:1$  можно рассматривать как бесконечную вдоль оси  $Y$  при расчете температуры вдоль оси  $X$ .

Однако в случае прямоугольной (бесконечной вдоль оси  $Y$ ) области погрешность аппроксимации (7) ухудшается и на внешней границе достигает 3–4 %. Причиной роста погрешности является ухудшение теплоотвода по направлению оси  $Y$  по сравнению с цилиндрически-симметричным случаем.

Для повышения точности аппроксимации можно предложить следующую модификацию расчетной формулы. По прежнему считаем, что распределение температуры вдоль координатных осей в прямоугольной области полушириной  $r_{ex}$  и с внутренней цилиндрической стенкой радиусом  $r_{in}$  эквивалентно распределению температуры внутри некоторой воображаемой цилиндрической стенки с эффективными размерами  $r_{in}^{(eff)}$  и  $r_{ex}^{(eff)}$ . Ухудшение теплоотвода в воображаемой области по направлениям, не совпадающим с осью  $X$ , представим как следствие некоторого однородного по всей области эффективного

тепловыделения  $w^{(eff)}$ . Общее решение уравнения (1) для цилиндрически-симметричной задачи в случае постоянного тепловыделения в объеме стенки известно [6]:

$$T(r) = -\frac{w}{4\lambda} r^2 + C_1 \cdot \ln(r) + C_2 \quad (8)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования, зависящие от граничных условий. Сравнение формул (8), (4) и (2) показывает, что в качестве аппроксимирующей зависимости можно предложить

$$T(r) = T_{in} - \frac{T_{in} - T_{ex}}{\ln \frac{r_{ex}^{(eff)}}{r_{in}^{(eff)}}} \cdot \ln \frac{r}{r_{in}^{(eff)}} - \frac{\delta T^{(eff)}}{r_0^2} \cdot r^2, \quad (9)$$

где  $\delta T^{(eff)}$  – интегральный температурный напор на расстоянии  $r_0$  от введенного нами эффективного тепловыделения  $w^{(eff)}$  в объеме воображаемой области с теплопроводностью  $\lambda$ . Учитывая, что на границе области  $r = r_{ex}$  температура  $T(r) = T(r_{ex}) = T_{ex}$ , можно выразить этот эффективный интегральный температурный напор из уравнения (11):

$$\frac{\delta T^{(eff)}}{r_0^2} = \frac{T_{in} - T_{ex}}{\ln \frac{r_{ex}^{(eff)}}{r_{in}^{(eff)}}} \cdot \frac{1}{r_{ex}^2} \cdot \ln \frac{r_{ex}^{(eff)}}{r_{ex}} \quad (10)$$

Или, с учетом определения введенных выше коэффициентов формы:

$$T(r) = T_{in} - \frac{T_{in} - T_{ex}}{\ln \frac{k_{ex} r_{ex}}{k_{in} r_{in}}} \cdot \left( \ln \frac{r}{k_{in} r_{in}} - \frac{r^2}{r_{ex}^2} \cdot \ln k_{ex} \right) \quad (11)$$

Формула (11) отличается от формулы (7) поправочным членом  $\frac{r^2}{r_{ex}^2} \cdot \ln k_{ex}$ , при этом никаких дополнительных подгоночных параметров (удельного объемного тепловыделения или температурного напора) в формуле не фигурирует.

**Выводы:** Для расчетов температурных полей в прямоугольных областях с произвольно расположенными распределенными источниками предложено использовать аналитические решения для цилиндрически симметричных случаев с вычисленными коэффициентами формы. Для повышения точности расчетов использован метод включения эффективных распределенных источников тепла в исследуемую область.

## Литература

1. Чернышов В.Н. Тепловые методы технической диагностики строительных материалов и изделий / В.Н. Чернышов, В.Г. Однолько, А.В. Чернышов, В.М. Фокин. – М.: Машиностроение, 2007. – 208 с.
2. Дульнев Г.Н. Теплопроводность смесей и композиционных материалов / Г.Н. Дульнев, Ю.П. Заричняк. – Л.: Энергия, 1974. – 264 с.
3. Кузнецов Г.В. Разностные методы решения задач теплопроводности / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
4. Лобанов А.И. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем / А.И. Лобанов, И.Б. Петров. – М.: МФТИ, 2004. – 168 с.
5. Фокин В.М. Основы технической теплофизики / В.М. Фокин, Г.П. Бойков, Ю.В. Видин. – М.: "Издательство Машиностроение-1", 2004. – 172 с.
6. Луканин В.Н. Теплотехника / В.Н. Луканин, М.Г. Шатров, Г.М. Камфер и др. – М.: Высш. шк., 2000. – 671 с.