

УДК 624.012.45

**РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК  
С НОРМАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРИ КРУЧЕНИИ**

**Азизов Т.Н.**, д.т.н., профессор,  
**Майстренко О.Ф.**, к.т.н., доцент,  
**Чесноков М.В.**,  
**Меркулов Д.С.**

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*  
taljat@mail.ru

**Аннотация.** Приведена методика определения перемещений и прочности железобетонных балок с нормальными трещинами при кручении. Усовершенствована методика расчета прочности железобетонных элементов с нормальными трещинами при кручении, которая учитывает наличие тавровой части сечения. Показано преимущество предложенного подхода по сравнению с использованием программных комплексов.

**Ключевые слова:** крутильная жесткость, прочность, нормальные трещины, крутящий момент, угол поворота.

**РОЗРАХУНОК ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛОК  
З НОРМАЛЬНИМИ ТРІЩИНАМИ ПРИ КРУЧЕННІ**

**Азізов Т.Н.**, д.т.н., професор,  
**Майстренко О.Ф.**, к.т.н., доцент,  
**Чесноков М.В.**,  
**Меркулов Д.С.**

*Одеська державна академія будівництва та архітектури*  
taljat@mail.ru

**Анотація.** Наведено методику визначення переміщень і міцності залізобетонних балок з нормальними тріщинами при крученні. Удосконалено методику розрахунку міцності залізобетонних елементів з нормальними тріщинами при крученні, яка враховує наявність таврової частини перерізу. Показано перевагу запропонованого підходу в порівнянні з використанням програмних комплексів.

**Ключові слова:** крутильна жорсткість, міцність, нормальні тріщини, крутний момент, кут повороту.

**CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE BEAMS  
WITH NORMAL CRACKS AT ROTATING**

**Azizov T.N.**, Doctor of Engineering, Professor,  
**Maystrenko O.F.**, PhD., Assistant Professor,  
**Chesnokov M.V.**,  
**Merkulov D.S.**

*Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*  
taljat@mail.ru

**Abstract.** There were proposed a method of determining the movement and strength of

209

reinforced concrete elements with normal cracks under the action of torque. It was determined the torsional rigidity of reinforced concrete elements with normal cracks on the basis of this method.

The importance of torsional rigidity is explained by the fact that in the reinforced concrete plate-finned systems (prefabricated, monolithic and precast-monolithic concrete, bridges) the redistribution of efforts between the individual elements depends on the torsional and flexural rigidity in equal measure. However, the question of torsional stiffness is investigated a little bit, even though the bending stiffness is studied quite extensively.

There was developed by the authors the technique of determining the torsional rigidity. There were added the new parameters to be considered when calculating the stiffness and strength of elements of T-section. It was shown that calculations on the proposed method of equivalent stiffness was in good coincidence with test data calculations by finite element method with the use of proven software systems.

There were investigated the three possible options of the destruction of the element with normal crack. It was taken into account the resistance of the longitudinal reinforcement torque effect have been practically ignored in the calculation by the traditional methods.

There were shown the prospects of the proposed technique. There were shown that the development of a database for the proposed method of calculation would be allowed to determine the torsional stiffness of the element easily almost in any cross-section.

**Keywords:** torsional stiffness, strength, normal cracks, torque, angle of rotation.

**Введение.** Известно, что в железобетонных плитно-ребристых системах (мосты, ребристые монолитные и сборные перекрытия) на изгибную и крутильную жесткости оказывают влияние различные трещины [1-4]. Кроме того, в этих работах показано, что перераспределение локальной нагрузки зависит практически одинаковым образом как от изгибной, так и от крутильной жесткостей отдельных балок плитно-ребристых систем. Однако, исследования изгибных жесткостей при трещинообразовании значительно опережают аналогичные исследования крутильных жесткостей. А исследования крутильных жесткостей при наличии только нормальных трещин находится только на начальной стадии [1-3].

В связи с вышесказанным **целью настоящей статьи** является дальнейшее совершенствование методики определения крутильных жесткостей и прочности железобетонных элементов с нормальными трещинами.

**Изложение основного материала.** В работах [1-3] показано, что для определения крутильной жесткости железобетонного элемента с нормальной трещиной сначала требуется вычислить нагельную силу в продольной арматуре, которая определяется из условия равенства горизонтальных перемещений точек  $C$  и  $C'$  в месте мысленного рассечения арматуры (рис. 1).

В виду симметрии схемы, показанной на рис. 1, общее взаимное перемещение берегов трещины будет складываться из перемещений как блока  $A$ , так и блока  $B$ .

После вычисления неизвестной величины  $Q$  можно определить реальное перемещение в трещине  $a_{tot}$ , которое будет равно удвоенной сумме перемещений от смятия бетона и сдвига арматуры:

$$a_{tot} = 2(\Delta_{ob} + \Delta_{sh}), \quad (1)$$

где  $\Delta_{ob}; \Delta_{sh}$ - соответственно перемещения продольной арматуры от смятия и сдвига в результате действия нагельной силы  $Q$ . Здесь перемещения умножаются на 2, т.к. смятие арматуры происходит как в блоке слева, так и в блоке справа от трещины. При разных длинах блоков принцип определения нагельной силы и перемещений в трещине не изменяется.

Для определения крутильной жесткости элемента с нормальной трещиной следует определить угол поворота условно сплошного (без трещин) элемента:

$$\varphi_{ekv} = \frac{a_{tot}}{h/2}. \quad (2)$$

Отношение угла поворота сплошного элемента без трещин к эквивалентному, определяемому по (2), дает отношение жесткости сплошного элемента к жесткости элемента с нормальной трещиной.

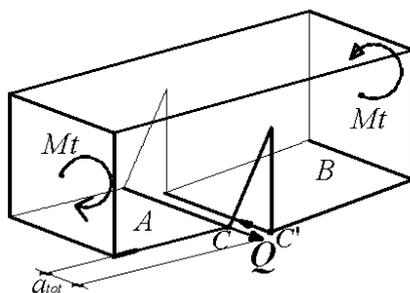


Рис. 1. Схема для определения нагельной силы в арматуре при взаимном повороте двух блоков, отделенных трещиной

Составляющие перемещений, входящие в выражения (1) и (2), определяются из условия поворота верхней части каждого блока (сжатая от изгиба зона) относительно его нижней части. Передача крутящего момента от блока *A* к блоку *B* на рис. 1 происходит через сжатую зону бетона. При этом приложение крутящего момента к блоку *B* происходит на части сечения, чем усложняется решение задачи с точки зрения теории упругости.

Как показано в [1] задача определения поворота верхней части относительно нижней может быть решена несколькими способами, суть одного из которых заключается в том, что на основе большого количества расчетов по МКЭ с использованием объемных конечных элементов в стандартных программных комплексах для балок с различным соотношением высоты сжатой (от изгиба) зоны, длины блока между трещинами, высоты сечения блока и его ширины получают зависимости перемещений (поворотов) в рассматриваемых блоках. Затем, используя схему стержня с переменной высотой сечения (рис. 2), следует подобрать функцию изменения его высоты по длине блока вдоль продольной оси стержня  $h_y=f(y)$  от начальной высоты, равной высоте сжатой (от изгиба) зоны *X*, до полной высоты *h* в конце блока длиной *L*.

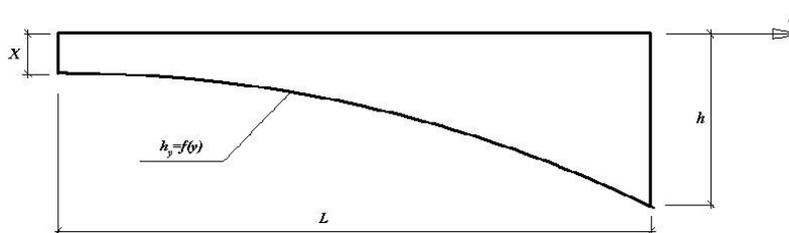


Рис. 2. Схема стержня с переменной высотой поперечного сечения

К левому концу такого эквивалентного стержня прикладывается крутящий момент, правый конец считается жестко зашпеленным. Задача решается методами сопротивления материалов для закрученного стержня с переменной высотой сечения. Функцию изменения высоты  $h_y=f(y)$  следует подбирать таким образом, чтобы поворот левого конца эквивалентного стержня (рис. 2) был равен повороту верхней части объемного блока, к части поперечного сечения которого приложен крутящий момент и который рассчитан с использованием объемных конечных элементов с использованием стандартных программ, в которых реализован МКЭ.

В [2] рассмотрен прямоугольный элемент, к части поперечного сечения которого приложен крутящий момент. Высота части сечения, к которой приложен крутящий момент равна *X*, а полная высота сечения *h*. В [2] функция изменения высоты эквивалентного стержня с переменной высотой сечения представлена в виде:

$$h_y = x + (h - x) \left[ 1 - \frac{1}{L^n} (L - e)^n \right] \quad (3)$$

Для подбора функции (3) по рис. 2 следует рассчитать различные варианты с различными соотношениями геометрических размеров:

$$x/h, b/h, h/L \quad (4)$$

При этом по компьютерной программе (например, Mathcad) следует подобрать показатель степени  $n$  формулы (3) так, чтобы поворот конца фиктивной балки высотой  $X$  (см. рис. 2) был равен повороту реальной балки сечением  $b$ ,  $h$  и длиной  $L$ , который можно определить с помощью программы «Лира» с использованием объемных конечных элементов. В [2] в качестве примера рассмотрено 5 вариантов расчетов прямоугольного сечения с отношениями:  $x/h=0.25$ ;  $b/h=0.5$ ;  $h/L=1$ . В таблице 1 приведены данные расчета. При этом показатель степени  $n = 3.39$  был определен для варианта 1. В остальных вариантах перемещения эквивалентного стержня определялись при том же значении показателя степени.

Таблица 1 – Данные расчета

№ варианта	Размеры сечения, длины и высоты приложения момента (мм)				Отношения размеров			Перемещение по горизонтали, (мм·10 <sup>3</sup> )		$\frac{\Delta_{ekv}}{\Delta_{мкэ}}$
	$X$	$h$	$b$	$L$	$X/h$	$b/h$	$h/L$	$\Delta_{мкэ}$	$\Delta_{ekv}$ (при $n=3.39$ )	
1	50	200	100	200	0.25	0.5	1	7.734	7.734	1
2	60	240	120	240				4.705	4.476	1.05
3	70	280	140	280				2.937	2.818	1.045
4	30	120	60	120				33.175	35.81	1.079
5	150	600	300	600				0.314	0.286	1.097

Как можно видеть из таблицы использование показателя степени  $n=3.39$  вполне приемлемо для всех рассмотренных примеров.

В случае таврового элемента в отличие от подхода [1, 2] будем считать, что высота сжатой от изгиба зоны совпадает с толщиной полки. Тогда к варьируемым параметрам (4) следует добавить еще соотношение  $b/b_f^I$ , где  $b_f^I$  – ширина полки таврового сечения. В этом случае показатель степени  $n$  в выражении (3) будет отличаться от показателя, приведенного в таблице 1, подобранного для прямоугольного сечения.

Следовательно, если составить таблицы (или компьютерную программу) для показателей степени формулы (3) для всех возможных соотношений  $x/h$ ,  $b/h$ ,  $h/L$  и  $b/b_f^I$ , то решать практические задачи будет достаточно просто.

Рассмотрим теперь прочность элемента с нормальной трещиной при кручении. При этом используем методику [3]

В работах авторов [1-3] показано, что в железобетонных элементах прямоугольного сечения момент образования наклонной трещины отрыва, идущей из конца нормальной трещины, является разрушающим, т.к. при этом разрушается бетонный прямоугольник с высотой, равной высоте сжатой от изгиба зоны, и шириной, равной ширине балки. Если элемент имеет тавровое сечение, то образование трещины отрыва между полкой и ребром еще не может быть фактором разрушения, т.к. полка (даже не армированная) еще является сплошной. После отрыва ребра от полки разрушение последней произойдет тогда, когда крутящий момент, приходящийся на нее, достигнет величины разрушающего крутящего момента для элемента прямоугольного сечения, имеющего размеры, совпадающие с размерами полки.

Рассмотрим схему усилий, действующих в нормальном сечении элемента с трещиной при действии крутящего момента по аналогии с [3] (рис. 3).

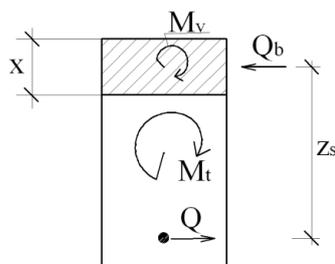


Рис.3. Схема усилий, действующих в нормальном сечении с трещиной при кручении

На рис. 3 заштрихованная часть – сжатая от изгиба зона. Внешний крутящий момент  $M_t$  воспринимается частично крутящим моментом  $M_v$ , действующим непосредственно в сжатой от изгиба зоне и моментом  $M_Q$ , воспринимаемым парой сил  $Q$  и  $Q_b$  от нагельной силы в арматуре, определяемой по методике [1-2]. Из условия равновесия на горизонтальную ось (в направлении  $Q$ ) вытекает очевидная зависимость  $Q_b = Q$

Момент этой пары сил (рис. 3) равен:  $M_Q = Q \cdot Z_s$

Условие равновесия (кручения вокруг продольной оси элемента) записывается в виде:

$$M_t - M_Q = M_v \quad (5)$$

Т.е. момент  $M_v$  - это часть внешнего крутящего момента, воспринимаемого бетоном сжатой от изгиба зоны.

Величина  $M_Q$  определяется после вычисления нагельной силы  $Q$ .

Схема разрушения бетонной части может быть в двух вариантах [3]:

1 вариант – разрушение от среза сжатой зоны бетона в результате действия силы  $Q_b$  (рис. 3);

2 вариант – разрушение сжатой от изгиба зоны в результате действия крутящего момента  $M_v$ , воспринимаемого этим участком.

Первое условие запишется в виде:

$$Q_b = \frac{M_t}{Z_s} \leq f_{sh}, \quad (6)$$

где  $f_{sh}$  - расчетное сопротивление бетона срезу;  $M_t$  - внешний крутящий момент;

$Z_s$  - расстояние от центра тяжести арматуры до центра тяжести сжатой зоны бетона.

Второе условие прочности запишется в виде

$$M_v \leq [M_v], \quad (7)$$

где  $[M_v]$  - предельный крутящий момент, воспринимаемый бетоном сжатой от изгиба зоны, т.е. исключительно бетонного сечения с размерами  $b \times h = b_f^l \times h_f^l$ , т.е. ширина бетонного сечения равна ширине сечения балки, а его высота – высоте сжатой зоны бетона  $X$  (в случае таврового сечения - совпадающей с толщиной полки).

Величину  $[M_v]$  рекомендуется определять из условия ограничения максимальных растягивающих напряжений, определенных по известным формулам сопротивления материалов для прямоугольного сечения, например (8):

$$\sigma_{mt} = \frac{M_v}{\alpha \cdot a^2 \cdot b} \leq f_{ctk}, \quad (8)$$

где  $f_{ctk}$  - прочность бетона при растяжении;  $a$  и  $b$  - соответственно меньшая и бóльшая сторона прямоугольного сечения;  $\alpha$  - коэффициент, зависящий от соотношения сторон  $a/b$  (или  $b/a$ ) и определяемый по таблицам, приводимым во всех справочниках по сопротивлению материалов и теории упругости.

Таким образом, условия прочности железобетонного элемента прямоугольного сечения с нормальной трещиной на действие крутящего момента  $M_t$  запишется как меньшее из двух выражений:

$$M_t \leq f_{sh} Z_s \quad (9)$$

$$M_t - Q \cdot Z_s \leq f_{ctk} \cdot \alpha \cdot X^2 \cdot b \quad (10)$$

При этом  $Q$  определяется по методике [1,2] в упругой постановке;  $Z_s = h_0 - X/2$ ;  $X$  - толщина полки;  $b$  - ширина полки;  $\alpha$  - коэффициент, зависящий от отношения  $X/b$  (высоты сжатой зоны к ширине сечения балки).

Таким образом, условие прочности элемента с нормальными трещинами при кручении запишется как меньшее из выражений (6), (9) и (10).

Расчеты по приведенной выше методике показывают, что прочность элемента с нормальной трещиной при кручении существенно меньше прочности элемента без трещин.

**Выводы и перспективы исследований.** В статье предложена методика определения перемещений и прочности железобетонного элемента с нормальной трещиной при действии крутящего момента. Методика является продолжением методик [1-3] и их совершенствованием. В частности, добавлен дополнительный параметр  $b/b_f^I$  для варьирования и численного определения жесткости эквивалентного стержня переменного сечения для расчетов тавровых элементов.

Кроме того, усовершенствована методика расчета прочности железобетонных элементов с нормальными трещинами при кручении, которая учитывает наличие тавровой части сечения.

В перспективе предложенную методику предполагается развить на больший круг задач с различным отношением  $x/h$ ,  $b/h$ ,  $h/L$  и  $b/b_f^I$  для того, чтобы без использования пространственных конечных элементов решать задачи по определению жесткостей железобетонных элементов с нормальными трещинами при любых размерах поперечного сечения, глубины трещины и расстоянии между трещинами. Предполагается также создать базу данных на основе численных расчетов по МКЭ для возможности расчета тавровых железобетонных элементов с любым соотношением их геометрических размеров.

## Литература

1. Азизов Т.Н. Общий подход к определению крутильной жесткости железобетонных элементов с трещинами / Т.Н. Азизов // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Вип. 17., – Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2008. – С. 92-99.
2. Азизов Т.Н. НДС и прочность железобетонных балок с нормальными трещинами при кручении / Т.Н. Азизов, А.В. Мельник, Д.Ю. Парамонов // Зб. наук. праць. Серія «Галузеве машинобудування, будівництво», вип. 3 (25) – Том 3. Полтава: ПолтНТУ, 2009. – С. 9-13.
3. Азизов Т.Н. Разрушение железобетонных элементов с нормальными в результате действия крутящих моментов / Т.Н. Азизов, В.И. Стадник, Д.Ю. Парамонов // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КНУ, 2010. – Випуск 6 (65), частина 1. – С. 125-128
4. Улицкий Б.Е. Пространственные расчёты мостов / Б.Е. Улицкий, А.А. Потапкин, В.И. Руденко и др. – М.: Транспорт, 1967. – 404 с.