

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ МЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА НА
УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМ
КЛИМАТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

Жданов А.А., к.т.н., доц.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
Украина*

Цилиндрические вертикальные хранилища, заполненные сыпучим материалом (зерном, например) испытывают температурные климатические воздействия, описанные в [1]. Исследуется напряженно-деформированное состояние цилиндрической металлической тонкостенной оболочки кусочно-постоянной (по высоте) толщины, покоящейся изнутри на упругом винклеровском основании, вызванное снижением температуры освещенной солнцем оболочки – неравномерный нагрев в окружном направлении до состояния одинаковой температуры для всех её точек. Величина коэффициента постели винклеровского основания прямо пропорциональна горизонтальному давлению сыпучего материала на стенку хранилища, которое изменяется нелинейно по высоте хранилища [2], и может быть аппроксимирована кусочно-постоянной (рис.1а) или кусочно-линейной функцией (рис.1б).

Выпишем основные уравнения безмоментной теории тонких цилиндрических оболочек [3,4]:

Геометрические уравнения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \alpha_t t, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) + \alpha_t t, \quad (1)$$

где u , v , w – компоненты перемещений точек срединной поверхности оболочки (положительные направления показаны на рис.2а); $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – деформации срединной поверхности в осевом и в окружном направлениях, соответственно; α , β – безразмерные координаты точек срединной поверхности:

$$\alpha = \frac{x}{R}, \quad \beta - \text{угловая координата};$$

t – температура стенки – заданная функция координат α и β ; R – радиус срединной поверхности оболочки; h – толщина оболочки; E, ν, α_t – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного температурного расширения материала оболочки.

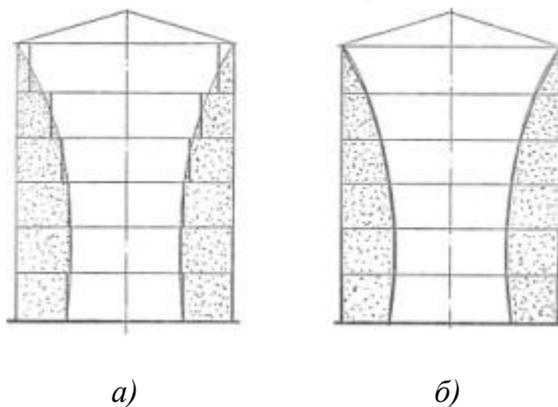


Рис. 1- Варианты аппроксимации коэффициента постели:
 а-кусочно-постоянной функцией; б – кусочно-линейной функцией

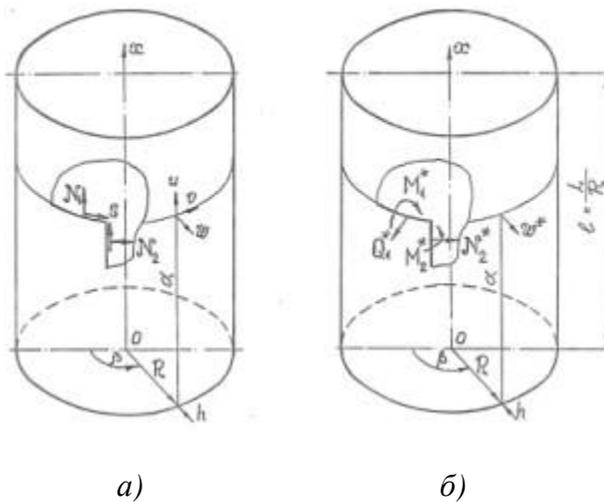


Рис. 2- Положительные направления усилий и перемещений:
 а-безмоментное напряженно-деформированное состояние;
 б-состояние краевого эффекта

Физические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + w \right) - (1+\nu) \alpha_t R t \right], \\ N_2 &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left[\frac{\partial v}{\partial \beta} + w + \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} - (1+\nu) \alpha_t R t \right], \\ S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= (1+\nu) \alpha_t R \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} &= (1+\nu) \alpha_t R \frac{\partial t}{\partial \beta}, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + w &= (1+\nu) \alpha_t R t - \frac{R^2(1-\nu^2)}{Eh} k(\alpha)w. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Внешним воздействием является плоское температурное поле оболочки вида

$$t(\beta) = \sum_{n=0}^{n=10} (t_{nC} \cos n\beta + t_{nS} \sin n\beta). \quad (4)$$

Амплитуды гармоник в (4) можно рассчитать по рекомендациям [1].

Для сшивки поясов и на опорных краях оболочки воспользуемся теорией простого краевого эффекта, основные зависимости которой представлены ниже [4]:

Разрешающее уравнение

$$\frac{d^4 w^*}{d\alpha^4} + 4g^4 w^* = 0, \quad (5)$$

$$\text{здесь } g^4 = 3(1-\nu^2) \frac{R^2}{h^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_1^* = 0, \quad \varepsilon_2^* = \frac{w^*}{R}, \quad \gamma^* = \frac{1}{R} \frac{dw^*}{d\alpha}. \quad (6)$$

Физические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} N_1^* = 0, N_2^* = \frac{Eh}{R} w^*, M_1^* = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2 w^*}{d\alpha^2}, \\ M_2^* = \nu M_1^*, Q_1^* = \frac{D}{R^3} \frac{d^3 w^*}{d\alpha^3}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Положительные направления усилий, изгибающих моментов и перемещений краевого эффекта показаны на рис. 2б.

С учетом вида температурного поля (4), варианта кусочно-постоянной аппроксимации коэффициента постели упругого основания, уравнения равновесия (3) для каждого пояса оболочки принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} = (1+\nu) \alpha_t R \frac{\partial t}{\partial \beta}, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + w = (1+\nu) \alpha_t R t - \frac{k R^2}{Eh} (1-\nu^2) w. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В выражениях (8) опущен индекс пояса, для которого записана система уравнений.

Получим безмоментное решение для температурного поля (4).

Осесимметричное охлаждение ($n = 0$)

В этом случае $\nu = 0$, все производные по β равны нулю и система уравнений (8) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_0}{d\alpha^2} + \nu \frac{d w_0}{d\alpha} = 0, \\ \nu \frac{d u_0}{d\alpha} + w_0 = (1+\nu) \alpha_t R t_0 - \frac{k R^2}{Eh} (1-\nu^2) w_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Интегрируя первое уравнение в (9) и подставляя во второе, найдем:

$$\frac{d u_0}{d\alpha} = \nu w_0 + C_1, \quad (10)$$

$$w_0 = -\nu \frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{k R^2}{Eh}} - \frac{\nu}{(1-\nu^2)} \frac{C_1}{1 + \frac{k R^2}{Eh}}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) и выполняя интегрирование, получим

$$u_0(\alpha) = -\nu \frac{\alpha_t R t_0}{(1-\nu)} \frac{1}{1 + \frac{k R^2}{E h}} \alpha + C_1 \left(1 + \frac{\nu^2}{(1-\nu^2)} \frac{1}{1 + \frac{k R^2}{E h}} \right) \alpha + C_2. \quad (12)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 , входящие в (11) и (12) должны быть определены из тангенциальных граничных условий:

$$u_{10}(0) = 0, \quad N_{1m}(l) = N_1^H - \mathcal{G} u_m(l) \quad (13)$$

и тангенциальных условий стыковки поясов оболочки:

$$\left. \begin{aligned} u_i(l) &= u_{i+1}(0), \\ N_{li}(l) &= N_{li+1}(0), \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, m-1) \quad (14)$$

где m – число поясов, нумерация поясов от закрепленного края; N_1^H – предварительное натяжение оболочки в осевом направлении; \mathcal{G} – коэффициент жесткости упругого закрепления оболочки в осевом направлении на крае $\alpha = l$.

Выпишем в явном виде условия (13) и (14):

$$\left. \begin{aligned} C_{21} &= 0, \\ C_{1i} \left(l + \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \frac{l}{1 + \frac{k_i R^2}{E h_i}} \right) + C_{2i} + C_{1,i+1}^0 - C_{2,i+1} &= \nu \frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{l}{1 + \frac{k_i R^2}{E h_i}}, \\ C_{1i} h_i + C_{2i}^0 - C_{1,i+1} h_{i+1} + C_{2,i+1}^0 &= (1+\nu) \alpha_t R t_0 (h_i - h_{i+1}), \\ (i=1, 2, \dots, m-1), \\ C_{1m} \left[\frac{E h_m}{(1-\nu^2) R} - \mathcal{G} \left(l + \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \frac{l}{1 + \frac{k_m R^2}{E h_m}} \right) \right] - C_{2m} \mathcal{G} &= N_1^H + \\ + \mathcal{G} \frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{\nu l}{1 + \frac{k_m R^2}{E h_m}} + \frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{E h_m}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Решив алгебраическую систему (15), найдем произвольные постоянные $C_{ki}(k=1, 2; i=1, 2, \dots, m)$.

Коэффициент постели k и толщина оболочки для каждого пояса различны, поэтому в стыках поясов появляется разрыв непрерывности радиальных перемещений и углов поворота. Для удовлетворения нетангенциальным граничным условиям и условиям непрерывности

радиальных перемещений и углов поворота в стыках воспользуемся теорией простого краевого эффекта. Уравнение (5) с учетом отпора упругого основания для каждого пояса принимает вид:

$$\frac{d^4 w^*}{d\alpha^4} + 4g^* w^* = 0, \quad (16)$$

здесь
$$4g^* = 12R^4 \frac{(1-\nu^2)}{R^2 h^2} + \frac{kR^4}{D}$$

Решение (16) имеет вид [3]:

$$w^*(\alpha) = e^{g^* (\alpha-l)} \left[C_1^* \cos g^* (\alpha-l) + C_2^* \sin g^* (\alpha-l) \right] + e^{-g^* \alpha} \left(C_3^* \cos g^* \alpha + C_4^* \sin g^* \alpha \right). \quad (17)$$

Произвольные постоянные, входящие в (17), определяются из нетангенциальных граничных условий и условий стыковки поясов.

Для пояса, содержащего опорный край, имеем:

$$w_{01} = \frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{C_{11}}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}}, \quad (18)$$

$$w_1^*(\alpha) = e^{g_1^* (\alpha-l)} \left[C_{11}^* \cos g_1^* (\alpha-l) + C_{21}^* \sin g_1^* (\alpha-l) \right] + e^{-g_1^* \alpha} \left(C_{31}^* \cos g_1^* \alpha + C_{41}^* \sin g_1^* \alpha \right), \quad (19)$$

$$w_1(\alpha) = w_{01} + w_1^*(\alpha). \quad (20)$$

Для шарнирно опертого края нетангенциальные граничные условия имеют вид:

$$w_1(0) = 0, \quad \frac{d^2 w_1^*(0)}{d\alpha^2} = 0 \quad (21)$$

Для жестко защемленного края:

$$w_1(0) = 0, \quad \frac{d w_1^*(0)}{d\alpha} = 0. \quad (22)$$

Из (20) следует, что для обоих случаев опирания

$$C_{31}^* = -\frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{C_{11}}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}}. \quad (23)$$

Постоянную C_{41}^* определим, подставив (19) в (21) или в (22).

Для шарнирно опертого края $C_{41}^* = 0$, для жестко защемленного края

$$C_{41}^* = C_{31}^* = -\frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}} + \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{C_{11}}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}}. \quad (24)$$

И окончательно, для шарнирно опертого края (20) принимает вид:

$$w_1(\alpha) = \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{C_{11}}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}} - \frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}} \right) \times \\ \times \left(1 - e^{-g_1^* \alpha} \cos g_1^* \alpha \right). \quad (25)$$

для жестко защемленного края получаем следующее выражение:

$$w_1(\alpha) = \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{C_{11}}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}} - \frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{k_1 R^2}{E h_1}} \right) \times \\ \times \left[1 - e^{-g_1^* \alpha} \left(\cos g_1^* \alpha + \sin g_1^* \alpha \right) \right]. \quad (26)$$

Выпишем нетангенциальные условия стыковки i -го и $i+1$ -го поясов:

$$\left. \begin{aligned} w_{0i} + w_i^*(l) &= w_{0i+1} + w_{i+1}^*(0), \\ \frac{d w_i^*(l)}{d \alpha} &= \frac{d w_{i+1}^*(0)}{d \alpha}, \\ \frac{D_i}{R^2} \frac{d^2 w_i^*(l)}{d \alpha^2} &= \frac{D_{i+1}}{R^2} \frac{d^2 w_{i+1}^*(0)}{d \alpha^2}, \\ \frac{D_i}{R^3} \frac{d^3 w_i^*(l)}{d \alpha^3} &= \frac{D_{i+1}}{R^3} \frac{d^3 w_{i+1}^*(0)}{d \alpha^3}. \end{aligned} \right\}, \quad (27)$$

Учетом (19) условия (27) в матричной форме принимают вид:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ g_i^* & g_i^* & g_{i+1}^* & -g_{i+1}^* \\ D_i g_i^{*3} & -D_i g_i^{*3} & D_{i+1} g_{i+1}^{*3} & D_{i+1} g_{i+1}^{*3} \\ 0 & D_i g_i^{*3} & 0 & D_{i+1} g_{i+1}^{*3} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c} C_{1i}^* \\ C_{2i}^* \\ C_{3i+1}^* \\ C_{4i+1}^* \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} w_{0i+1} - w_{0i+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (28)$$

Решение системы (28) имеет вид:

$$C_{li}^* = (w_{0i+1} - w_{0i}) \times \left(2 g_i^{*2} g_{i+1}^{*4} + \frac{D_{i+1}}{D_i} g_i^* g_{i+1}^{*5} + g_i^{*3} g_{i+1}^{*3} \right) : D, \quad (29)$$

$$C_{2i}^* = (w_{0i+1} - w_{0i}) \times \left(\frac{D_{i+1}}{D_i} g_i^* g_{i+1}^{*5} + g_i^{*3} g_{i+1}^{*3} \right) : D, \quad (30)$$

$$C_{3i+1}^* = (w_{0i+1} - w_{0i}) \times \left(2 g_i^{*3} g_{i+1}^{*3} + \frac{D_i}{D_{i+1}} g_i^* g_{i+1}^{*5} + g_i^{*4} g_{i+1}^{*2} \right) : D, \quad (31)$$

$$C_{4i+1}^* = (w_{0i+1} - w_{0i}) \times \left(g_i^{*3} g_{i+1}^{*3} - \frac{D_i}{D_{i+1}} g_i^* g_{i+1}^{*5} \right) : D, \quad (32)$$

где w_{0i}, w_{0i+1} - безмоментные решения, определяемые выражением(11); D - детерминант системы (28), определяемый по формуле

$$D = 2g_i^{*2} g_{i+1}^{*4} + \frac{D_{i+1}}{D_i} g_i^* g_{i+1}^{*5} + 2g_i^{*3} g_{i+1}^{*3} + \frac{D_i}{D_{i+1}} g_i^* g_{i+1}^{*5} + g_i^{*4} g_{i+1}^{*2}. \quad (33)$$

Рассмотрим нетангенциальные граничные условия самого верхнего края оболочки.

Свободный край – краевой эффект отсутствует и

$$w_m(\alpha) = w_{0m}(\alpha). \quad (34)$$

Жесткое защемление:

$$w_m^*(l) = 0, \quad \frac{d w_m^*(l)}{d\alpha} = 0. \quad (35)$$

Шарнирное опирание:

$$w_m^*(l) = 0, \quad \frac{d^2 w_m^*(l)}{d\alpha^2} = 0. \quad (36)$$

Для жестко жестко защемленного и шарнирно опертого края имеем, соответственно:

$$w_m(\alpha) = \left(\frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{k_m R^2}{E h_m}} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{C_{1m}}{1 + \frac{k_m R^2}{E h_m}} \right) \times \left\{ 1 - e^{g_m^* (\alpha - l)} \left[\cos g_m^* (\alpha - l) - \sin g_m^* (\alpha - l) \right] \right\}, \quad (37)$$

$$w_m(\alpha) = \left(\frac{\alpha_t R t_0}{1-\nu} \frac{1}{1 + \frac{k_m R^2}{E h_m}} - \frac{\nu}{1-\nu^2} \frac{C_{1m}}{1 + \frac{k_m R^2}{E h_m}} \right) \times \left[1 - e^{g_m^* (\alpha - l)} \cos g_m^* (\alpha - l) \right]. \quad (38)$$

Заклучение

Напряженное состояние оболочки определяется подстановкой компонент перемещений в физические уравнения безмоментного состояния (2) и краевого эффекта (7).

Summary

On the basis of the membrane theory of thin cylindrical shells and simple edge effect explicitly obtained the solution of the stress-strain state of the shell resting inside on the basis of elastic Winkler at temperature climatic impacts.

1. Жданов А.А. Влияние солнечной радиации на температурные поля вертикальных цилиндрических хранилищ сыпучих материалов. – ВІСНИК ОДАБА. Вип. 56. – Одеса: Зовнішрекламсервіс, 2014. – с. 249-255.
2. Janssen H.A. Versuche uber Getreiderucke in Silozellen. – Zritschrift des Veriens Deutscher Jngenieure, 1895, b. 39, № 35, s. 1045-1049.
3. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Гостехтеор-издат, 1953. – 544 с.
4. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949. – 784 с.