УДК 624.154.3

# УСТОЙЧИВОСТЬ П-ОБРАЗНОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ РАМЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВОЗДЕЙСТВИЮ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

**Фомина И.П.**

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса*

Верхний край зоны коррозии перемещается вверх на каждой из колонн с постоянной скоростью $v_0$. Глубина поврежденной зоны определяется по формуле [1]

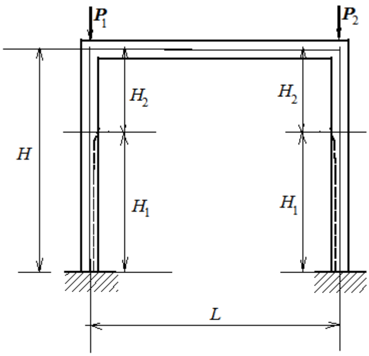

Рис. 1

$$h(t_1) = h_0 e^{-\beta/t_1}. \tag{1}$$

Здесь $t_1$ – время, отсчитываемое от момента $t_0$ начала процесса коррозии в данном поперечном сечении стержня.

Очевидно

$$t_0 = x/v_0 \tag{2}$$

($x$ - абсцисса сечения). Тогда (1) запишется так:

$$h(x,t) = h_0 e^{-\beta/(t-x/v_0)}. \tag{3}$$

Здесь $t$ – время, отсчитываемое с момента начала процесса коррозии в колонне. Так как длина $H_1$ первого (корродированного) участка колонны равна

$$H_1(t) = v_0 t,$$

то формула (3) может быть записана так:

$$h(x,t) = h_0 e^{-\beta v_0/[l_1(t)-x]}. \tag{4}$$

Для определения критического сочетания нагрузок $P_1$ и $P_2$ (т.е. такого, при котором рама теряет устойчивость [2, 3]) будем использовать метод граничных элементов (см. например, [4]). Введем на каждом из стержней рамы локальную систему координат (рис. 2, на нем приведен схематический чертеж рамы, номера стержней проставлены в кружках, номера узлов - в квадратах). В такой системе координат для каждого стержня при отсутствии поперечной нагрузки по длине стержня записывается следующее равенство:

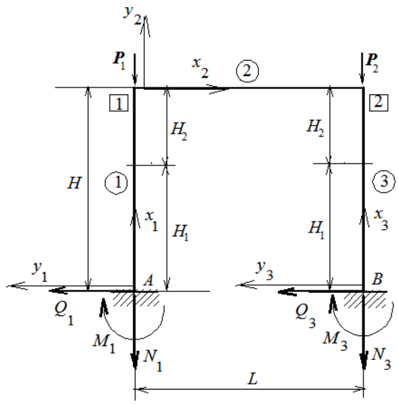


Рис. 2

$$\boldsymbol{Y}^{(i)} = \boldsymbol{A}^{(i)}(l_i)\boldsymbol{X}^{(i)} \tag{5}$$

Здесь

$$\boldsymbol{X}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_i(0)y_i(0) \\ B_i(0)y_i'(0) \\ M_i(0) \\ Q_i \\ N_i \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y}^{(i)} = \begin{bmatrix} B_i(l_i)y_i(l_i) \\ B_i(l_i)y_i'(l_i) \\ M_i(l_i) \\ Q_i \\ N_i \end{bmatrix},$$

(6)

$$\boldsymbol{A}^{(i)}(k_i, x_i) = \begin{bmatrix} 1 & a_{1,2}(k_i,x_i) & a_{1,3}(k_i,x_i) & a_{1,4}(k_i,x_i) & 0 \\ 0 & a_{2,2}(k_i,x_i) & a_{1,2}(k_i,x_i) & a_{1,3}(k_i,x_i) & 0 \\ 0 & a_{3,2}(k_i,x_i) & a_{2,2}(k_i,x_i) & a_{1,2}(k_i,x_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

($i$ - номер стержня, $B_i$ ($x_i$) - его изгибная жесткость, $M_i$ ($x_i$), $Q_i$, $N_i$ - изгибающий момент, поперечная и продольная силы). Если поперечное сечение стержня и арматуры остаются неизменными по его длине, то функции $a_{j,k}$ ($x_i$) ($j$ = 1,2,3; $k$ = 2,3,4) имеют следующий вид:

$$a_{1,2}(k_i,x_i)=\frac{\sin k_i x_i}{k_i},\ a_{1,3}(k_i,x_i)=\frac{1-\cos k_i x_i}{k_i^2},\ a_{1,4}(k_i,x_i)=\frac{k_i x_i-\sin k_i x_i}{k_i^3},$$

$$a_{2,2}(k_i,x_i)=\cos k_i x_i,\ a_{3,2}(k_i,x_i)=-k_i\sin k_i x_i,\ k_i=\sqrt{N_i/B_i}. \qquad (7)$$

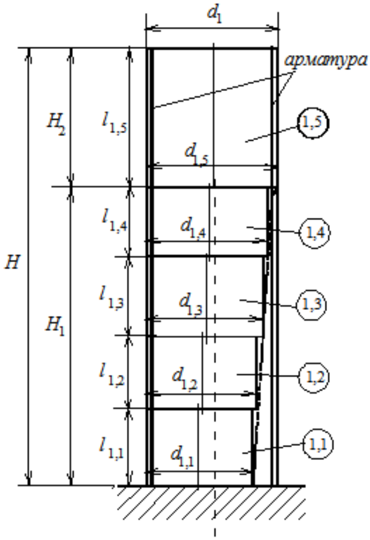


Рис. 3

Заметим, что на рис. 2 в точке $A$ показаны две составляющие опорной реакции и реактивный момент. Они представлены в виде продольной и поперечной сил и изгибающего момента в нижнем сечении стержня 1 (на чертеже показаны их положительные направления). Аналогично представлены составляющие опорной реакции и реактивный момент в точке $B$.

Разобьем стержень 1 на несколько участков, в пределах каждого из которых поперечное сечение будем считать постоянным (рис. 3). Как видно из чертежа, каждый из участков, а также его длина и ширина получили двойную нумерацию. Первый из номеров - это номер стержня, а второй - номер участка.

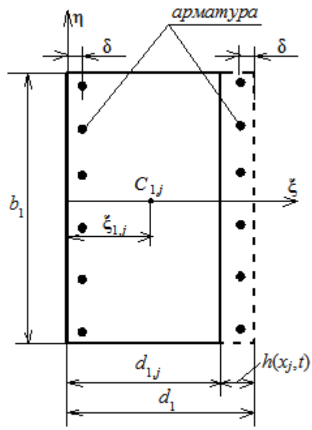


Рис. 4

Определим центр тяжести поперечного сечения участка $1,j$ стержня 1 (рис. 4). Приведенная площадь поперечного сечения участка определяется по формуле

$$S_{np}=d_{1,j}b_1+2\frac{E_a}{E_b}S_a. \qquad (8)$$

Здесь $E_a$ и $E_b$ - модули упругости арматуры и бетона соответственно, $d_{1,j}=d_1-h(x_j,t)$ ($x_j$ - абсцисса нижнего сечения участка), $S_a=2n_a\pi r_a^2$ ($r_a$ - радиус стержня арматуры, $n_a$ - число стержней в одном ряду). Определяя аналогичным образом приведенный статический момент сечения относительно оси η, находим координату ξ центра $C_{1,j}$ тяжести сечения:

$$\xi_{1,j} = \frac{d_j^2 b_1 + 2d_1 S_a E_a / E_b}{2S_{np}} . \tag{9}$$

Будем полагать, что опорные реакции в точке $A$, показанные на рис. 2, приложены в центре тяжести $C_{1,1}$ поперечного сечения участка 1,1.

Рассмотрим равновесие граничного элемента, расположенного между участками 1,$j$ и 1,$j$+1 стержня (рис. 5). Из уравнений равновесия получаем

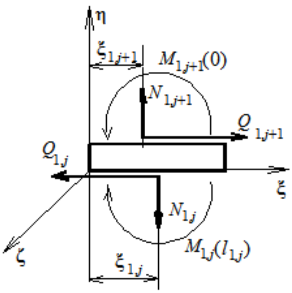


Рис. 5

$$\begin{aligned} &Q_{1,j+1} = Q_{1,j}, N_{1,j+1} = N_{1,j}, M_{1,j+1}(0) = \\ &= M_{1,j}(l_{1,j}) + N_{1,j}(\xi_{1,j} - \xi_{1,j+1}) \end{aligned} \tag{10}$$

Равенства (10) и условия непрерывности функций $y_1(x_1)$ и $y_1^{/}(x_1)$ на границах участков могут быть записаны следующим образом:

$$\boldsymbol{X}^{(1,j+1)} = \boldsymbol{C}^{(1,j)} \boldsymbol{Y}^{(1,j)} , \tag{11}$$

где

$$\boldsymbol{C}^{(1,j)} = \begin{bmatrix} B_{1,j+1}/B_{1,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{1,j+1}/B_{1,j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \xi_{1,j} - \xi_{1,j+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для первого участка имеем

$$\boldsymbol{Y}^{(1,1)} = \boldsymbol{A}^{(1,1)}(k_{1,1}, l_{1,1}) \boldsymbol{X}^{(1)},\ \boldsymbol{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \\ Q_1 \\ N_1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

для второго

$$\boldsymbol{X}^{(1,2)} = \boldsymbol{C}^{(1,1)}\boldsymbol{Y}^{(1,1)}, \boldsymbol{Y}^{(1,2)} = \boldsymbol{A}^{(1,2)}(k_{1,2}, l_{1,2})\boldsymbol{X}^{(1,2)}. \qquad (13)$$

Из (12) и (13) получаем

$$\boldsymbol{Y}^{(1,2)} = \boldsymbol{A}^{(1,2)}(k_{1,2}, l_{1,2})\boldsymbol{C}^{(1,1)}\boldsymbol{A}^{(1,1)}(k_{1,1}, l_{1,1})\boldsymbol{X}^{(1)}$$

.

Продолжая таким образом далее, получаем для последнего участка

$$\boldsymbol{Y}^{(1,n_{уч})} = \boldsymbol{A}^{(1,n_{уч})}(k_{1,n_{уч}}, l_{1,n_{уч}})\prod_{i=1}^{n_{уч}-1}\boldsymbol{C}^{(1,i)}\boldsymbol{A}^{(1,i)}(k_{1,i}, l_{1,i})X^{(1)} \qquad (14)$$

($n_{уч}$ - число участков). Учитывая, что $\boldsymbol{Y}^{(1,n_{уч})} = \boldsymbol{Y}^{(1)}$, находим, что

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}^{(1,n_{уч})}(k_{1,n_{уч}}, l_{1,n_{уч}})\prod_{i=1}^{n_{уч}-1}\boldsymbol{C}^{(1,i)}\boldsymbol{A}^{(1,i)}(k_{1,i}, l_{1,i}). \qquad (15)$$

Таким образом, построена матрица $\boldsymbol{A}^{(1)}$ для стержня 1. Аналогично строится матрица $\boldsymbol{A}^{(3)}$ для стержня 3.

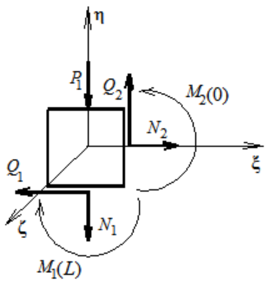

Рис. 6

Рассмотрим равновесие граничного элемента, находящегося между стержнями 1 и 2 (рис. 6). Из уравнений равновесия находим

$$N_2 = Q_1,\ Q_2 = N_1 + P_1,\ M_2(0) = M_1(l_1). \qquad (16)$$

Пренебрежем продольными деформациями стержней. Отсюда следует, что

$$y_2(0) = 0. \qquad (17)$$

Кроме того, очевидно, что

$$y_2'(0) = y_1'(l_1). \qquad (18)$$

Условия (14 - 16) можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{X}^{(2)} = \boldsymbol{D}^{(1)}\boldsymbol{Y}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{P}}_1,\ \boldsymbol{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2/B_1(l_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \hat{\boldsymbol{P}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

Используя (5) при $i$ = 1 и 2, а также (19), находим

$$\boldsymbol{Y}^{(2)} = \boldsymbol{A}^{(2)}(k_2, L)(\boldsymbol{D}^{(1)}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{X}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{P}}_1)\ . \qquad (20)$$

Равенство (5) при $i$ = 3 записывается так:

$$\boldsymbol{Y}^{(3)} = \boldsymbol{A}^{(3)}\boldsymbol{X}^{(3)},\ \boldsymbol{X}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_3 \\ Q_3 \\ N_3 \end{bmatrix}, \qquad (21)$$

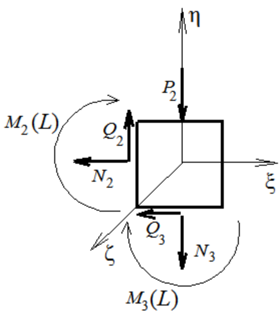

Рис. 7

где $Q_3$,$N_3$,$M_3$ - опорные реакции и реактивный момент в точке $B$(рис.2). Рассмотрим теперь равновесие граничного элемента, находящегося между стержнями 2 и 3 (рис. 7). Составим уравнения равновесия

$$N_2 + Q_3 = 0,$$
$$Q_2 - N_3 - P_2 = 0,$$
$$M_2(l_2) + M_3(l_3) = 0.$$

Их можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Y}_5^{(2)} + \boldsymbol{Y}_4^{(3)} = 0, \\ &\boldsymbol{Y}_4^{(2)} - \boldsymbol{Y}_5^{(3)} - P_2 = 0, \\ &\boldsymbol{Y}_3^{(2)} + \boldsymbol{Y}_3^{(3)} = 0. \end{aligned} \qquad (22)$$

Из формул (20) и (21) следует, что компоненты векторов $\boldsymbol{Y}^{(2)}$ и $\boldsymbol{Y}^{(3)}$ являются функциями шести неизвестных величин $M_1$, $Q_1$, $N_1$, $M_3$, $Q_3$, $N_3$.

**Замечание.** Следует отметить, что не только компоненты векторов $\boldsymbol{X}^{(1)}$ и $\boldsymbol{X}^{(3)}$ зависят от указанных неизвестных величин, но и элементы матриц $\boldsymbol{A}^{(1)}$, $\boldsymbol{A}^{(2)}$ и $\boldsymbol{A}^{(3)}$ также зависят от них, так как величины $k$, входящие в формулы (12 - 15) и (20), являются функциями этих величин.

Равенства (22) представляют собой три уравнения относительно указанных неизвестных. Для составления дополнительных уравнений воспользуемся во-первых равенством

$$y_2'(L) = y_3'(H), \tag{23}$$

а во-вторых допущением об отсутствии продольных смещений точек стержней, что позволяет записать следующие равенства:

$$y_2(L) = 0,\ \ y_3(H) = y_1(H). \tag{24}$$

Запишем равенства (23) и (24) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Y}_2^{(2)} - \boldsymbol{Y}_2^{(3)} = 0, \\ &\boldsymbol{Y}_1^{(2)} = 0, \\ &\boldsymbol{Y}_1^{(3)} - \boldsymbol{Y}_1^{(1)} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Из формул (20) и (21) вытекает, что равенства (22) и (25) представляют собой систему линейных уравнений относительно не равных нулю компонент векторов $\boldsymbol{X}^{(1)}$ и $\boldsymbol{X}^{(3)}$, которые совпадают с неизвестными $Q_1$, $N_1$, $M_1$, $Q_3$, $N_3$, $M_3$. Однако, как следует из приведенного выше замечания, коэффициенты этих уравнений также являются функциями этих величин. Запишем эту систему в следующем виде:

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})\ . \tag{26}$$

Здесь

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ N_1 \\ M_1 \\ Q_3 \\ N_3 \\ M_3 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}.$$

Для решения задач продольно-поперечного изгиба при заданных значениях $P_1$ и $P_2$ (а он таковым является из-за того, что эти силы оказываются внецентренно приложенными вследствие несимметричной коррозии колонн) предлагается метод последовательных приближений: на первом шаге полагаем $N_1 = -P_2$, $N_3 = -P_2$, $Q_1 = M_1 = Q_3 = M_3 = 0$, тем самым определяя вектор $\boldsymbol{u}$. Затем при помощи значений этих величин определяем элементы матрицы $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$

и вектора $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$ и решая систему (26), находим новые значения $Q_1$, $N_1$, $M_1$, $Q_3$, $N_3$, $M_3$, через них определяем новые значения элементов матрицы $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$ и вектора $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$ и т.д. Метод оказывается быстро сходящимся из-за малости значений функции $h(x,t)$ по сравнению с размерами поперечного сечения.

При решении задач устойчивости для нахождения значения критических сил используем равенство

$$\det[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})] = 0 . \tag{27}$$

Решение этого уравнения определяет некоторую линию (назовем ее критической) в системе координат $P_1$, $P_2$. Зададимся начальными значениями $P_1$ и $P_2$, а далее используем метод последовательных приближений точно так же, как и при решении задач продольно-попереч- ного изгиба и находим значение определителя $\det[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})]$. Если он оказывается не равным нулю, то фиксируем значение $P_1$ и меняя значение $P_2$ находим такое его значение, при котором выполняется уравнение (27), при этом для каждого значения $P_2$ используя метод последовательных приближений. Затем задаемся новым значением $P_1$ и для него находим значение $P_2$, при котором выполняется (27) и т.д. Используя полиномиальную аппроксимацию, можно найти уравнение этой линии.

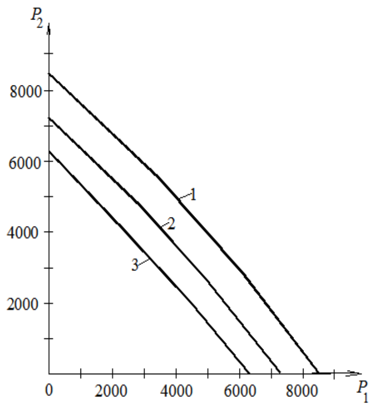

Рис. 8

**Пример.** Исследуем на устойчивость железобетонную раму при следующих значениях параметров: $H$ = 16 *м*, $L$ = 16 *м*, $E_b$ = $=27 \cdot 10^3$*мПа*, $E_a$ $=2 \cdot 10^5$*мПа*; параметры поперечных сечений стержней 1,2,3: $d_1$=$d_2$= $d_3$ = 0,4*м*,$b_1$ = $b_2$ = $b_3$ = 0,8 *м*, $\delta$ = 0,04*м*; параметры арматуры: $r_a$ = 0,01*м*, $n_a$ = 8; параметры зоны коррозии: $h_0$ = 0,08*м*, $\beta$ = 7,5 *лет*, $v_0$ = 0,1*м/год*.

На рис. 8 представлены графики линий критических сил для П-образной рамы, построенные при помощи изложенного выше алгоритма (значения $P_1$ и $P_2$ на графиках - в килоньютонах). Линия 1 соответствует $t$ = 0, т.е. раме, не подверженной коррозии. Каждая точка на этой линии соответствует критическому сочетанию величин сил $P_1$ и $P_2$ (т.е. при котором наблюдается потеря устойчивости рамы). Кривая 2 соответствует $t$ = 50 лет, а кривая 3 - $t$ =100 лет. Заметно значительное понижение значений критических сил с увеличением периода эксплуатации конструкции.

### *Вывод*

Предложен алгоритм исследования устойчивости железобетонных рам при агрессивном воздействии среды, что необходимо для своевременного их усиления для обеспечения надежности конструкции.

**Summary**

**An algorithm for investigation of stability of RC frames subjected to aggressive environmental impact is offered, what is necessary for their on-time strengthening to secure reliability of constructions.**

### *Литература*

1. Сетков В.Ю., Шибанова И.С., Рысева О.П. Действие углекислого газа на железобетонные балки и плиты промышленных зданий и сооружений // Строительство и архитектура, №12, 1984. - с. 1 - 4.
2. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс (динамика и устойчивость сооружений) - Москва: Стройиздат, 1980 - 616с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

Баженов В.А., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. и др. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов - Одесса: Астропринт, 2001 - 288с.