

**НЕЛИНЕЙНЫЕ КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОЭТАЖНЫХ МНОГОПРОЛЕТНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ РАМ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА**

Фомин В.М., к.т.н., доц.

*Одесская государственная академия строительства и архитектуры*

Приступим к исследованию движения плоской многоэтажной многопролетной железобетонной рамы в своей плоскости, вызванного системой горизонтальных и вертикальных сил, приложенных к узлам рамы (рис. 1). Предполагается, что изменение сил, действующих на раму, с течением времени достаточно медленное для того, чтобы можно было пренебречь возникающими при этом инерционными эффектами.

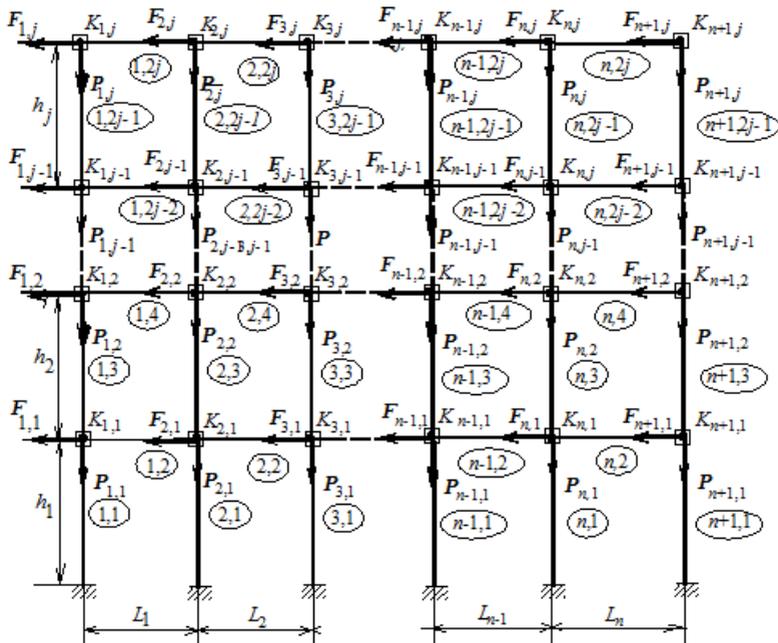


Рис. 1. Схематический чертеж рамы

Будем полагать, что масса рамы сосредоточена в системе материальных точек, расположенных в узлах рамы. Для узлов рамы вводится номер, состоящий из двух чисел – первое соответствует номеру пролета, а второе номеру этажа. Поэтому у горизонтальных  $F$

и вертикальных сил  $P$  имеется двойной индекс:  $M_{k,i}$ ,  $F_{k,i}$ ,  $P_{k,i}$  ( $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, j$ ) ( $n$  – число пролетов рамы,  $j$  – число этажей).

Решение задачи предполагается вести пошаговым методом. На каждом шаге нагрузка на раму получает приращения  $\Delta F^{(k,i)}$  и  $\Delta P^{(k,i)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n + 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, j$ ).

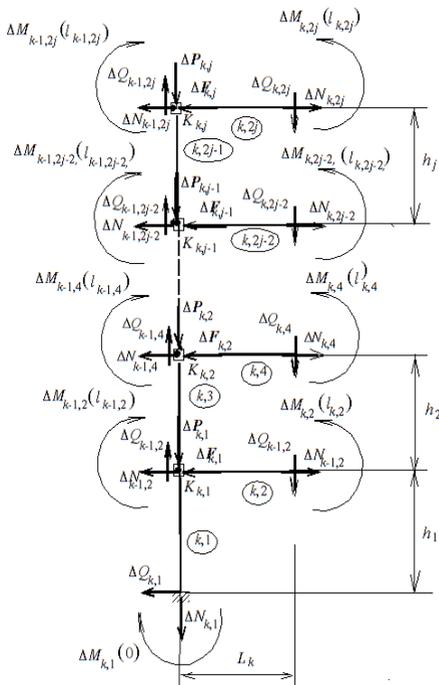


Рис. 3. Крайний суперэлемент

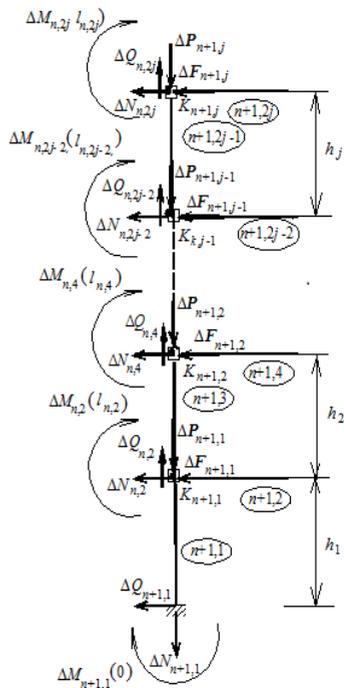


Рис. 2. Рядовой суперэлемент

Будем рассматривать раму как систему, состоящую из ряда более простых рам (их принято называть суперэлементами). Один из суперэлементов представлен на рис. 2. Количество таких суперэлементов равно числу пролетов, номер суперэлемента совпадает с номером пролета. Кроме того, есть еще один суперэлемент – крайняя правая колонна рамы. Его номер равен  $n + 1$ . Стержни рамы также получают двойной номер  $(k, m)$ ,  $k$  – номер суперэлемента ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) (рис. 2),  $m$  – порядковый номер стержня в пределах суперэлемента ( $m = 1, 2, \dots, 2j$ ). На рисунках номера стержней представлены в овалах.

Введем на каждом из стержней суперэлемента локальную систему координат, при этом ось  $x_{k,m}$  направим вдоль стержня ( $k, m$  – номер

стержня). Пользуясь методологией метода граничных элементов, для каждого из стержней можно записать следующее равенство [1]:

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(k,m)}(x_{k,m}) = \mathbf{S}^{(k,m)}(x_{k,m})\widehat{\mathbf{X}}^{(k,m)}(0) \quad (m = 1, 2, 3, \dots, 2j). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{S}^{(k,m)}(x_{k,m}) = \widehat{\mathbf{A}}^{(k,m)}(x_{k,m}) + \widehat{\mathbf{B}}_Q^{(k,m)}(x_{k,m}) + \widehat{\mathbf{B}}_N^{(k,m)}(x_{k,m})$  (подробнее о матрицах  $\widehat{\mathbf{A}}^{(k,m)}(x_{k,m})$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}_Q^{(k,m)}(x_{k,m})$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}_N^{(k,m)}(x_{k,m})$  см. [1]),

$$\widehat{\mathbf{X}}^{(k,m)}(x_{k,m}) = \begin{bmatrix} \Delta v_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v'_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v''_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta Q^{(k,m)} \\ \Delta N^{(k,m)} \end{bmatrix}$$

( $\Delta v_{k,m}$  - приращение прогиба стержня,  $\Delta Q^{(k,m)}$  и  $\Delta N^{(k,m)}$  - приращения поперечной и продольной сил, штрих означает производную по  $x_{k,m}$ ).

Видоизменим алгоритм, предложенный в [1]. Введем матрицу-столбец  $\mathbf{X}^{*(k,m)}(x_{k,m})$  с помощью формулы:

$$\mathbf{X}^{*(k,m)}(x_{k,m}) = \begin{bmatrix} \Delta v_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v'_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta M^{(k,m)}(x_{k,m}) \\ \Delta Q^{(k,m)} \\ \Delta N^{(k,m)} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\Delta M^{(k,m)}(x_{k,m})$  - приращение изгибающего момента в стержне с номером  $k$ ,  $m$ .

Из формулы (50) [2]

$$\begin{aligned} \Delta M^{(k,m)}(x_{k,m}) = & Y_1^{(k,m)}(x_{k,m})\Delta v_{k,m}'' + Y_2^{(k,m)}(x_{k,m})\Delta v'_{k,m} - \\ & - Y_3^{(k,m)}(x_{k,m})\Delta N^{(k,m)} / H_0^{(k,m)} + Y_4^{(k,m)}(x_{k,m})\Delta Q^{(k,m)} / H_0^{(k,m)} \end{aligned}$$

( $Y_i^{(k,m)}(x_{k,m})$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) - функции, определенные на предыдущем шаге алгоритма,  $H_0^{(k,m)}$  - начальная жесткость поперечного сечения стержня) следует, что  $\mathbf{X}^{*(k,m)}(x_{k,m})$  может быть представлен так:

$$\mathbf{X}^{*(k,m)}(x_{k,m}) = \mathbf{C}^{(k,m)}\widehat{\mathbf{X}}^{(k,m)}(x_{k,m}), \quad (2)$$

где

$$C^{(k,m)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{(k,m)}(l_{k,m}) & Y_1^{(k,m)}(l_{k,m}) & \frac{Y_4^{(k,m)}(l_{k,m})}{H_0^{(k,m)}} & -\frac{Y_3^{(k,m)}(l_{k,m})}{H_0^{(k,m)}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$X^{*(k,m)}(x_{k,m}) = S^{*(k,m)}(x_{k,m})X^{*(k,m)}(0). \quad (3)$$

Здесь  $S^{*(k,m)}(x_{k,m}) = C^{(k,m)}(x_{k,m})S^{(k,m)}(x_{k,m})[C^{(k,m)}(0)]^{-1}$ .

Изменим теперь столбец  $X^{*(k,m)}(x_{k,m})$  следующим образом:

$$X^{**(k,m)}(x_{k,m}) = \begin{bmatrix} \Delta u_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta v'_{k,m}(x_{k,m}) \\ \Delta M^{(k,m)}(x_{k,m}) \\ \Delta Q^{(k,m)} \\ \Delta N^{(k,m)} \end{bmatrix},$$

т.е. добавим еще один элемент  $\Delta u_{k,m}(x_{k,m})$  - приращение продольного смещения поперечного сечения стержня с номером  $k,m$ . Тогда формула (3) будет выглядеть так:

$$X^{**(k,m)}(x_{k,m}) = S^{**(k,m)}(x_{k,m})X^{**(k,m)}(0). \quad (4)$$

Пренебрежем продольной деформацией стержней, тогда для  $S^{**(k,m)}(x_{k,m})$  будем иметь следующее представление:

$$S^{**(k,m)}(x_{k,m}) = \begin{bmatrix} 1 & \dots\dots\dots \\ \dots & S^{*(k,m)} \end{bmatrix}$$

(пропущенные элементы равны нулю).

Рассмотрим равновесие граничного элемента, расположенного между двумя вертикальными стержнями. На рис. 4 показаны силовые факторы, действующие на этот элемент. Они равны соответствующим внутренним усилиям в концевых сечениях стержней, примыкающих к этому элементу, но имеют противоположные по отношению к внутренним усилиям направления.

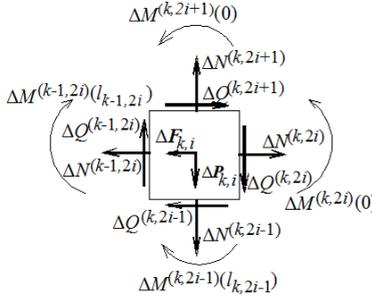


Рис. 4. Промежуточный элемент.

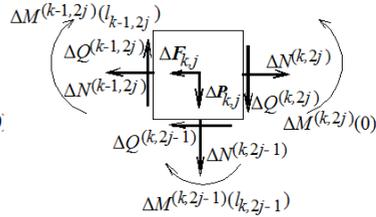


Рис. 5. Верхний элемент.

Из условий равновесия элемента и жесткого соединения стержней в узлах находим

$$\Delta N^{(k,2i)} = \Delta N^{(k-1,2i)} + \Delta Q^{(k,2i-1)} - \Delta Q^{(k,2i+1)} + \Delta F_{k,i},$$

$$\Delta Q^{(k,2i)} = \Delta Q^{(k-1,2i)} - \Delta N^{(k,2i-1)} + \Delta N^{(k,2i+1)} - \Delta P_{k,i},$$

$$\Delta M^{(k,2i)}(0) = \Delta M^{(k-1,2i)}(l_{k-1,2i}) + \Delta M^{(k,2i-1)}(l_{k,2i-1}) - \Delta M^{(k,2i+1)}(0), \quad (5)$$

$$\Delta u_{k,2i}(0) = \Delta u_{k-1,2i}(l_{k-1,2i}), \quad \Delta v_{k,2i}(0) = 0, \quad \Delta v'_{k,2i}(0) = \Delta v'_{k-1,2i}(l_{k-1,2i})$$

( $i = 1, 2, \dots, j-1$ ).

Рассмотрим равновесие граничного элемента, находящегося на самом веру суперэлемента (рис. 5). Из уравнений равновесия и вышеуказанных условий получаем

$$\Delta N^{(k,2j)} = \Delta N^{(k-1,2j)} + \Delta Q^{(k,2j-1)} + \Delta F_{k,j},$$

$$\Delta Q^{(k,2j)} = \Delta Q^{(k-1,2j)} - \Delta N^{(k,2j-1)} - \Delta P_{k,j},$$

$$\Delta M^{(k,2j)}(0) = \Delta M^{(k-1,2j)}(l_{k-1,2j}) + \Delta M^{(k,2j-1)}(l_{k,2j-1}), \quad (6)$$

$$\Delta u_{k,2j}(0) = \Delta u_{k-1,2j}(l_{k-1,2j}), \quad \Delta v_{k,2j}(0) = 0,$$

$$\Delta v'_{k,2j}(0) = \Delta v'_{k-1,2j}(l_{k-1,2j}) \quad (k := 1, 2, \dots, n).$$

Равенства (4)-(5) могут быть записаны в виде матричных соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{** (k,2i)} &= \mathbf{I} \mathbf{Y}^{** (k-1,2i)} + \mathbf{D} \mathbf{Y}^{** (k,2i-1)} + \\ &+ \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{X}^{** (k,2i+1)} + \mathbf{U}^{(k,i)} \quad (i = 1, 2, \dots, j), \end{aligned} \quad (7)$$

$$(\mathbf{I}_{1,1} = \mathbf{I}_{3,3} = \mathbf{I}_{4,4} = \mathbf{I}_{5,5} = \mathbf{I}_{6,6} = 1; \mathbf{E}_{4,4}^{(i)} = \mathbf{E}_{6,5}^{(i)} = -1, \mathbf{E}_{5,6}^{(i)} = 1 \text{ при } i < j; \mathbf{D}_{5,6} = -1,$$

$$\mathbf{D}_{4,4} = \mathbf{D}_{6,5} = 1; \mathbf{U}_5^{(k,i)} = -\Delta P^{(k,i)}, \mathbf{U}_6^{(k,i)} = \Delta F^{(k,i)}; \text{остальные}$$

элементы матриц  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{E}^{(i)}$ ,  $\mathbf{D}$  и столбца  $\mathbf{U}^{(k,i)}$  равны нулю,  $\mathbf{E}^{(j)}$  - нулевая матрица).

Для краткости записи приняты обозначения:  $X^{**(k,m)} = X^{**(k,m)}(0)$ ,  $Y^{**(k,m)} = X^{**(k,m)}(l_{k,m})$ , которые будут использоваться ниже.

Заметим, что из условий жесткого соединения в узлах следует

$$Y_2^{**(k,2i-1)} = Y_1^{**(k-1,2i)}, Y_3^{**(k,2i-1)} = Y_3^{**(k-1,2i)} \quad (i = 1, 2, \dots, j). \quad (8)$$

Кроме того, введем условия

$$Y_2^{**(k,2i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j). \quad (9)$$

Они связаны с тем, что правый гонец горизонтального стержня суперэлемента соединяется с узлом, расположенным на вертикальном стержне следующего суперэлемента.

На нижнем конце первого стержня колонны выполняются условия:

$$X_p^{**(k,1)} = 0 \quad (p = 1, 2, 3), \quad (10)$$

на нижних концах следующих стержней колонны –

$$\begin{aligned} X_1^{**(k,2i-1)} &= 0, X_2^{**(k,2i-1)} = -Y_1^{**(k-1,2i-2)}, \\ X_3^{**(k,2i-1)} &= Y_3^{**(k-1,2i-2)} \quad (i = 2, \dots, j). \end{aligned} \quad (11)$$

Равенства (8)-(9) можно рассматривать как систему  $3j$  линейных уравнений относительно оставшихся неопределенными элементов столбцов  $X_p^{**(k,2i-1)}$  ( $p = 4, 5, 6; i = 1, 2, \dots, j$ ) и выразить их через элементы столбцов  $Y^{**(k-1,2i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ ). Представим столбцы  $X^{**(k,2i-1)}$  так:

$$X^{**(k,2i-1)} = \bar{X}^{**(k,2i-1)} + \bar{\bar{X}}^{**(k,2i-1)},$$

$$\bar{X}^{**(k,2i-1)} = \begin{bmatrix} X_1^{**(k,2i-1)} \\ X_2^{**(k,2i-1)} \\ X_3^{**(k,2i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{X}}^{**(k,2i-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_4^{**(k,2i-1)} \\ X_5^{**(k,2i-1)} \\ X_6^{**(k,2i-1)} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Равенства (11) позволяют записать  $\bar{X}^{**(k,2i-1)}$  в следующем виде:

$$\bar{X}^{**(k,2i-1)} = \hat{\mathbf{I}}^{(i-1)} \mathbf{Y}^{**(k-1,2i-2)} \quad (13)$$

( $\hat{\mathbf{I}}_{2,1}^{(i-1)} = -1, \hat{\mathbf{I}}_{3,3}^{(i-1)} = 1$ , остальные элементы матрицы  $\hat{\mathbf{I}}^{(i-1)}$  равны нулю

при  $i > 1$ ,  $\hat{\mathbf{I}}^{(0)}$  - нулевая матрица).

Используя представления (12) и (13), а также формулы (4) и (7), можно придать уравнениям (8)-(9) следующую форму:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}^{**}(k,2i-1)\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i-1)]_2 &= \mathbf{Y}_1^{**}(k-1,2i) - [\mathbf{S}^{**}(k,2i-1)\widehat{\mathbf{I}}^{(i)}\mathbf{Y}^{**}(k-1,2i)]_2, \\
[\mathbf{S}^{**}(k,2i-1)\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i-1)]_3 &= \mathbf{Y}_3^{**}(k-1,2i) - [\mathbf{S}^{**}(k,2i-1)\widehat{\mathbf{I}}^{(i)}\mathbf{Y}^{**}(k-1,2i)]_3, \\
[\mathbf{S}^{**}(k,2i)\mathbf{D}\mathbf{S}^{**}(k,2i-1)\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i-1)]_2 &+ [\mathbf{S}^{**}(k,2i)\mathbf{E}^{(i)}\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i+1)]_2 = \\
= -[\mathbf{S}^{**}(k,2i)\mathbf{I}\mathbf{Y}^{**}(k-1,2i)]_2 &- [\mathbf{S}^{**}(k,2i)\mathbf{D}\mathbf{S}^{**}(k,2i-1)\widehat{\mathbf{I}}^{(i-1)}\mathbf{Y}^{**}(k-1,2i-2)]_2 - \\
- [\mathbf{S}^{**}(k,2i)\mathbf{E}^{(i)}\widehat{\mathbf{I}}^{(i)}\mathbf{Y}^{**}(k-1,2i)]_2 &- [\mathbf{S}^{**}(k,2i)\mathbf{U}^{(k,i)}]_2 \quad (i = 1,2,\dots, j).
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь  $\mathbf{S}^{**}(k,m) = \mathbf{S}^{**}(k,m)(I_{k,m})$ .

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
w_{m+3(i-1)}^{(k)} &= \overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i-1) \quad (m = 1,2,3; i = 1,2,\dots, j), \\
z_{m+3(i-1)}^{(k-1)} &= \mathbf{Y}_m^{**}(k-1,2i) \quad (m = 1,2,\dots,6; i = 1,2,\dots, j),
\end{aligned} \tag{15}$$

т.е.  $w_p^{(k)}$  ( $p = 1,2,\dots,3j$ ) и  $z_p^{(k-1)}$  ( $p = 1,2,\dots,6j$ ) представляют собой выписанные подряд элементы матриц-столбцов  $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i-1)$  ( $m = 4,5,6; i = 1,2,\dots,j$ ) и  $\mathbf{Y}_m^{**}(k-1,2i)$  ( $m = 1,2,\dots,6; i = 1,2,\dots,j$ ) соответственно. Тогда система уравнений (14) запишется в следующем виде:

$$\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{W}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)}\mathbf{Z}^{(k-1)} + \mathbf{V}^{(k)}. \tag{16}$$

Здесь  $\mathbf{W}^{(k)}$  - матрица-столбец с элементами  $w_m$  ( $m = 1,2,\dots,3j$ ),  $\mathbf{R}^{(k)}$  - квадратная матрица размера  $3j$ ,  $\mathbf{V}^{(k)}$  - столбец того же размера,  $\mathbf{T}^{(k)}$  - прямоугольная матрица  $3j \times 6j$ ,  $\mathbf{Z}^{(k-1)}$  - столбец размера  $6j$ .

Присвоим каждому уравнению системы (14) порядковый номер  $q$  (например,  $q = m + 3(i-1)$ ,  $m = 1,2,3; i = 1,2,\dots,j$ ). Тогда  $\mathbf{V}_q^{(k)} = 0$  при  $m = 1,2$  и  $\mathbf{V}_q^{(k)} = [\mathbf{S}^{**}(k,2i)\mathbf{U}^{(k,i)}]_2$  при  $m = 3$ . Для численного определения элемента  $\mathbf{R}_{q,r}^{(k)}$  матрицы  $\mathbf{R}^{(k)}$  полагаем  $w_r^{(k)} = 1$  (т.е. один из элементов  $\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i-1)$  ( $m = 1,2,3; i = 1,2,\dots, j$ ) в соответствии с обозначениями (15) приравниваем единице), а остальные  $w_r^{(k)}$  ( $r = 1,2,\dots,3j$ ) (т.е. остальные из указанных выше элементов) полагаем равными нулю и вычисляем значение левой части формулы (14). Это значение и будет значением коэффициента  $\mathbf{R}_{q,r}$ . Аналогично определяются элементы матрицы  $\mathbf{T}$  при помощи значений величин  $z_r^{(k-1)}$  ( $r = 1,2,\dots,6j$ ).

Из (14) получаем

$$\mathbf{W}^{(k)} = [\mathbf{R}^{(k)}]^{-1}\mathbf{T}^{(k)}\mathbf{Z}^{(k-1)} + [\mathbf{R}^{(k)}]^{-1}\mathbf{V}^{(k)}. \tag{17}$$

Из (7) и (13) вытекают следующие равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{**}(k,2i) = & \mathbf{S}^{**}(k,2i) (\mathbf{I}\mathbf{Y}^{**}(k-1,2i) + \mathbf{D}\mathbf{S}^{**}(k,2i-1)\widehat{\mathbf{I}}^{(i-1)}\overline{\mathbf{Y}}^{**}(k-1,2i-1) + \\ & + \mathbf{E}^{(i)}\widehat{\mathbf{I}}^{(i)}\overline{\mathbf{Y}}^{**}(k-1,2i) + \mathbf{D}\mathbf{S}^{**}(k,2i-1)\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i-1) + \mathbf{E}^{(i)}\overline{\overline{\mathbf{X}}}^{**}(k,2i+1) + \mathbf{U}^{(k,i)} ] \\ (i = 1,2,\dots, j), \text{ которые с помощью (15) могут быть записаны так} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)}\mathbf{Z}^{(k-1)} + \mathbf{H}^{(k)}\mathbf{W}^{(k)} + \widehat{\mathbf{V}}^{(k)}. \quad (18)$$

Элементы матриц  $\mathbf{G}^{(k)}$ ,  $\mathbf{H}^{(k)}$  и столбца  $\widehat{\mathbf{V}}^{(k)}$  определяются аналогично определению элементов  $\mathbf{R}^{(k)}$ ,  $\mathbf{T}^{(k)}$  и  $\mathbf{V}^{(k)}$ . Используя (17) равенство (18) можно записать так

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{K}^{(k)}\mathbf{Z}^{(k-1)} + \mathbf{L}^{(k)}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)} + \mathbf{H}^{(k)}[\mathbf{R}^{(k)}]^{-1}\mathbf{T}^{(k)}$ ,  $\mathbf{L}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)}[\mathbf{R}^{(k)}]^{-1}\mathbf{V}^{(k)} + \widehat{\mathbf{V}}^{(k)}$ .

Для первого суперэлемента вследствие отсутствия предыдущего имеем

$$\mathbf{Y}_m^{**}(0,2i) = 0 \quad (m = 4,5,6; i = 1,2,\dots, j),$$

т.е.  $z_{m+3(i-1)}^{(0)} = 0$  ( $m = 4,5,6; i = 1,2,\dots, j$ ). Кроме того, имеют место следующие равенства  $\mathbf{Y}_2^{**}(0,2i) = 0$ , т.е.  $z_{2+3(i-1)}^{(0)} = 0$ . Остальные  $2j$  элементов столбца  $\mathbf{Z}^{(0)}$  остаются неизвестными. Из формулы (19) при  $k = 1$  получаем

$$\mathbf{Z}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)}\mathbf{Z}^{(0)} + \mathbf{L}^{(1)}. \quad (20)$$

При  $k = 2$  будем иметь

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{Z}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}.$$

Используя (20) находим

$$\mathbf{Z}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{K}^{(1)}\mathbf{Z}^{(0)} + \mathbf{K}^{(2)}\mathbf{L}^{(1)} + \mathbf{L}^{(2)}.$$

Продолжая таким же образом далее, на  $n$ -ом шаге приходим к следующему результату:

$$\mathbf{Z}^{(n)} = \widehat{\mathbf{K}}^{(n)}\mathbf{Z}^{(0)} + \widehat{\mathbf{L}}^{(n)}, \quad (21)$$

где  $\widehat{\mathbf{K}}^{(n)} = \prod_{p=0}^{n-1} \mathbf{K}^{(n-p)}$ ,  $\widehat{\mathbf{L}}^{(n)} = \sum_{q=1}^{n-1} \prod_{p=0}^{q-1} \mathbf{K}^{(n-p)} \mathbf{L}^{(n-q)} + \mathbf{L}^{(n)}$ .

Переходим к рассмотрению последнего,  $(n + 1)$ -го суперэлемента (рис. 3). На этом рисунке добавлены фиктивные стержни с номерами  $n + 1, 2i$  ( $i = 1,2,\dots,j$ ). Вследствие фактического отсутствия этих стержней имеют место следующие равенства:

$$\mathbf{X}_p^{**}(n+1,2i) = 0 \quad (p = 4,5,6; i = 1,2,\dots, j).$$

Используя (7) их можно записать так

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{DS}^{**(n+1,2i-1)} \overline{\mathbf{X}}^{**(n+1,2i-1)}]_p + [\mathbf{E}^{(i)} \mathbf{S}^{**(n+1,2i+1)} \overline{\mathbf{X}}^{**(n+1,2i+1)}]_p + \\
& + [\mathbf{IY}^{**(n,2i)}]_p + [\mathbf{DS}^{**(n+1,2i-1)} \widehat{\mathbf{IY}}^{**(n,2i)}]_p + \\
& + [\mathbf{E}^{(i)} \mathbf{S}^{**(n+1,2i+1)} \widehat{\mathbf{IY}}^{**(n,2i+2)}]_p = -\mathbf{U}_p^{(n+1,i)} \quad (p = 4,5,6; i = 1,2,\dots, j).
\end{aligned} \tag{22}$$

Кроме того, из условий жесткого соединения в узлах следует

$$\mathbf{Y}_2^{**(n+1,2i-1)} - \mathbf{Y}_1^{**(n,2i)} = 0, \quad \mathbf{Y}_3^{**(n+1,2i-1)} - \mathbf{Y}_3^{**(n,2i)} = 0 \quad (i = 1,2,\dots, j).$$

Представим эти равенства так

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{S}^{(n+1,2i-1)} \overline{\mathbf{X}}_2^{**(n+1,2i-1)}]_2 + [\mathbf{S}^{(n+1,2i-1)} \widehat{\mathbf{I}}^{(i-1)} \mathbf{Y}^{**(n,2i-2)}]_2 - \mathbf{Y}_1^{**(n,2i)} = 0, \\
& [\mathbf{S}^{(n+1,2i-1)} \overline{\mathbf{X}}_2^{**(n+1,2i-1)}]_3 + [\mathbf{S}^{(n+1,2i-1)} \widehat{\mathbf{I}}^{(i-1)} \mathbf{Y}^{**(n,2i-2)}]_3 - \mathbf{Y}_3^{**(n,2i)} = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Используя (15) и (21) запишем систему уравнений (22)-(23) так:

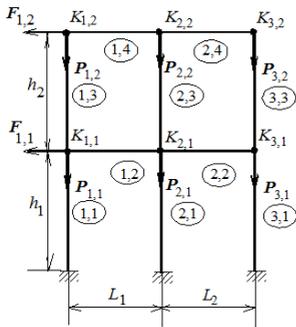
$$\mathbf{R}^{(n+1)} \mathbf{W}^{(n+1)} + \mathbf{T}^{(n+1)} \widehat{\mathbf{K}}^{(n)} \mathbf{Z}^{(0)} = \mathbf{V}^{(n+1)}. \tag{24}$$

Здесь  $\mathbf{R}^{(n+1)}$  - прямоугольная матрица размерности  $5j \times 3j$ ,  $\mathbf{T}^{(n+1)}$  - размерности  $5j \times 6j$ .

Напомним, что столбец  $\mathbf{Z}^{(0)}$  содержит  $2j$  неизвестных величин. Таким образом, матричное равенство (24) представляет линейную систему  $5j$  скалярных уравнений относительно  $5j$  неизвестных, решая которую находим столбцы  $\mathbf{W}^{(n+1)}$  и  $\mathbf{Z}^{(0)}$ , а через них определяем  $\mathbf{Z}^{(k)}$  ( $k = 1,2,\dots,n$ ), а, следовательно, и приращения перемещений точек и усилий в стержнях рамы.

**Пример.** Исследуем движение железобетонной двухэтажной двухпролетной рамы (рис. 7), вызванное горизонтальными гармоническими силами  $\mathbf{F}_{1,1}$  с периодом  $T_{1,1} = 5c$  и амплитудой  $\widehat{F}_{1,1} = 40 \text{ кН}$  и  $\mathbf{F}_{1,2}$  с периодом  $T_{1,2} = 7,5c$  и амплитудой  $\widehat{F}_{1,2} = 20 \text{ кН}$ . Массы материальных точек (грузов)  $m_{i,k} = 35 T$  ( $i = 1,3; k = 1,2$ ). Вертикальные силы постоянны и равны весам грузов. Геометрические параметры:  $L_1 = L_2 = h_1 = h_2 = 8 \text{ м}$ . Размеры поперечных сечений: колонн -  $b = 0.8 \text{ м}$ ,  $h = 0.28 \text{ м}$ , ригелей -  $b = 0.8 \text{ м}$ ,  $h = 0.5 \text{ м}$ . Армирование симметричное:  $S_1 = S_2 = 8,5 \text{ см}^2$ . Сталь марки А-III, характеристики бетона:  $E_0 = 2,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $R_c = 19 \text{ МПа}$ ,  $R_p = 1,9 \text{ МПа}$ ,  $\Gamma_c = 0.583 \cdot 10^{-3}$ .

**Заключение.** Как и в статье [1] предполагается, что нагружение рамы осуществляется в два этапа. На первом (предварительном) этапе



происходит постепенное увеличение массы грузов (т.е. постепенное увеличение сил тяжести) от нуля до заданного значения. Затем в течение минуты действуют силы  $F_{1,1}$  и  $F_{1,2}$ , по истечению которой их действие прекращается. В рассматриваемом случае период свободных колебаний  $T_0 = 1,86$  с, что гораздо меньше периода возмущающих сил. Поэтому можно пренебречь инерционными эффектами и считать движение рамы

квазистатическим. Движение точек  $K_{1,1}$  (изображено сплош-

ной линией) и  $K_{1,2}$  (штриховая линия), определяющих движение ригелей первого и второго этажей, приведено на рис. 8 (время в секундах, перемещения в метрах). Заметно накопление пластических деформаций.

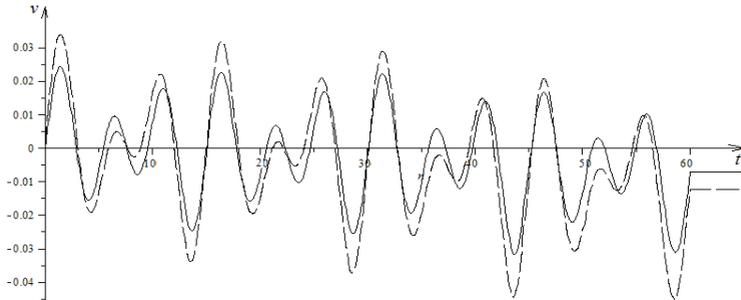


Рис. 8. График движения ригелей

## Summary

**A method which enables one to investigate quasistatic problems for multistorey multispans RC frames with taking into account nonlinear behavior and plasticity of concrete is presented.**

1. Фомин В.М. Нелинейные квазистатические задачи для многопролетных железобетонных рам с учетом пластичности бетона // Вісник ОДАБА. Вып.55 – Одесса, 2014 . – 273-281.
2. Фомин В.М. Дифференциальное уравнение плоского изгиба железобетонной балки с учетом пластичности бетона при сложном нагружении // Вісник ОДАБА. Вып.44, – Одесса, 2011. – с.345–353.