УДК 691.694.012

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЯВЛЕНИЯ ЗАРОДЫШЕВЫХ ТРЕЩИН НА ГРАНИЦАХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БЕТОНЕ

В.С.Дорофеев, *д.т.н., проф.,* **А.В.Зинченко,** *аспирант*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса

Известно, что к причинам образования трещин на поверхности бетона относят пластическую усадку [1, 2], которая происходит в течении первых нескольких часов после укладки, пока бетон еще находится в пластическом состоянии. Вероятность возникновения трещин по этой причине зависит от интенсивности водоотделения и испарения воды от бетонной смеси. Физико-механические свойства материалов (бетонов) в значительной мере зависят от степени дефектности их структуры [3-5].

Ниже рассматривается начальная стадия работы бетона в процессе формирования цементного камня и появления усадочных напряжений, причем концентрация напряжений происходит на включениях. Под включением будем понимать область с измененными свойствами. Это позволяет использовать соотношения линейной теории упругости для кусочно-однородного тела без разрывов и трещин. В дальнейшем будем исследовать только двумерные распределения напряжений: плоскую или плоское напряженное состояние. С одной стороны, эти случаи широко распространены в практике проектирования, а с другой, - для описания двумерного напряженного состояния в математической теории упругости развит исключительно мощный математический аппарат – аппарат теорий аналитических функций комплексного переменного, впервые примененного Колосовым Г.В. и развитого Мусхелишвили Н.И. [6] (рис 1).

Применение этого аппарата дает возможность получить числовые результаты, характеризующие начальную стадию работы композитов для любых характеристик материалов, форм включений и внешних воздействий.

Решение поставленных задач сводится к определению двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. комплексного переменного $z=x+iy$. Компоненты напряженного состояния выражаются через φ(z) и ψ(z). при помощи соотношений:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z) \tag{1}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \overline{\psi'(z)}\right]$$

Здесь $\mathrm{Re}\,\varphi'(z)$ – материальная часть аналитической функции φ(z). А перемещения:

$$2\mu(u - i\nu) = x\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \tag{2}$$

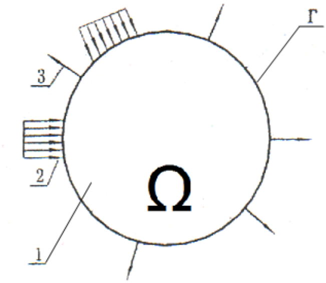

Рис.1 расчетная модель однородного материала:
1 - однородный материал с границей Г;
2, 3 - распределенная и сосредоточенная нагрузки

Определение искомых функций осуществлялось из системы функциональных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{\mu}\varphi\left(t^{(m)}\right)-\frac{1}{\mu}\left[t^{(m)}\overline{\varphi'\left(t^{(m)}\right)}+\overline{\psi\left(t^{(m)}\right)}\right]-\frac{x_0}{\mu_0}\varphi_m\left(t^{(m)}\right)\\
&+\frac{1}{\mu_0}\left[t^{(m)}\overline{\varphi'\left(t^{(m)}\right)}+\overline{\psi_m\left(t^{(m)}\right)}\right]=g\left(t^{(m)}\right);\\
&g\left(t^{(m)}\right)=g_1(t)+ig_2(t);\\
&t^{(m)}\in\Gamma^{(m)};m=0.1...
\end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что g(t) задает величину смещения, которую следует задать в точке $t^{(m)}$ ядра $\Omega^{(m)}$, чтобы совместить ее с точкой $t^{(m)}$ элемента границы $\Gamma^{(m)}$ области Ω, когда последняя находится в недеформированном состоянии. Например, в случае равномерной усадки круговых упругих ядер начальным радиусом R в отверстия единичного радиуса $g\left(t^{(0)}\right) = (R-1)e^{i\theta}$, θ – полярный угол точки $t^{(0)}$ в системе координат, связанной с центром отверстия.

Кроме условий (3), для каждого элемента границы Г должны выполняться условия равновесия, которые приводят ко второму функциональному уравнению:

$$\begin{aligned}&\varphi\left(t^{(m)}\right)+t^{(m)}\overline{\varphi'\left(t^{(m)}\right)}+\overline{\psi\left(t^{(m)}\right)}-\varphi_m\left(t^{(m)}\right)-\\&-t^{(m)}\overline{\varphi'_m\left(t^{(m)}\right)}-\overline{\psi_m\left(t^{(m)}\right)}=0\end{aligned} \tag{4}$$

Система уравнений (3) и (4) совместно с (2) дает возможность определить φ(z), ψ(z), $\psi_m(z)$, (m=0,1…, n=1) по заданным g(t) и условиям на бесконечности.

Максимальные тангенциальные напряжения $\tau_{мах}$ и главные напряжения σ_1 и σ_2 в точке z с Ω выражаются через комплексные потенциалы φ(z) и ψ(z).

$$\tau_{\max}=\left[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)\right], \tag{5}$$

$$\sigma_1=\varphi'\left(z\right)+\overline{\varphi\left(z\right)}+\left[\bar{z}\varphi''\left(z\right)+\psi'\left(z\right)\right], \tag{6}$$

$$\sigma_2=\varphi'\left(z\right)+\overline{\varphi'_1\left(z\right)}+\left[\bar{z}\varphi''_1\left(z\right)+\psi'_1\left(z\right)\right], \tag{7}$$

В качестве модели, описывающей распределение напряжений в композите, рассматривается бесконечное изотропное упругое тело с регулярным кольцом круговых включений. Поэтому их можно представить как упругие ядра с равными эффективными характеристиками. Упругие свойства материалов ядер и матриц отличаются друг от друга и описываются модулем упругости и коэффициентом Пуассона υ либо константами Ляме λ и μ, которые связаны с Е и υ соотношениями

$$\lambda=\frac{E\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\ \text{и}\ \mu=\frac{E}{2\left(1-\nu\right)}$$

Кроме них вводится упругая постоянная:

$$\chi=\frac{3-\nu}{1-\nu}$$

Исследуется распределение напряжений в композите, обусловленное скачками перемещений на границах ядер. Тем самым моделируются усадочные явления, происходящие как в материале матрицы, так и в материале ядер. Будем считать, что при любых деформациях трещины между ядрами и матрицей не возникают, а центры тяжести ядер совпадают с центрами тяжести соответствующих плоскостей в матрице (рис. 2).

Обозначим Ω – пересечение комплексной плоскости xOy с матрицей Ω_r (r=0,1,…, n-1) – область, занимаемая r – m Γ_r (r=0,1,…, n-1) – граница между ядром Ω_r и областью Ω (рис.3).

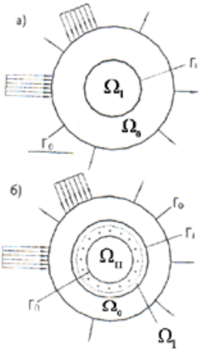

Рис.2 Расчетная модель неоднородного материала: а – наличие четной границы; б – случай плавного изменения свойств

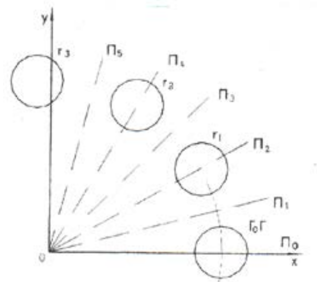

Рис.3 Модель расчета с регулярным кольцом круговых включений

При решении системы функциональных уравнений, для циклически симметричной области применим общий метод учета симметрии среды, разработанный М.Л. Бурышкиным [7]. Исходная задача распадается на несколько обобщенных симметричных задач.

Пусть система координат x'Oy' получена из xOy поворотом на угол τ. Тогда компоненты напряженно-деформированного состояния в новой системе координат определяются соотношениями:

$$\sigma_x'+\sigma_y'=4\mathrm{Re}\varphi'(z)$$
$$\sigma_y'-\sigma_x'+2i\tau_{xy}=2[z\varphi''(z)+\psi'(z)]e^{2i\theta} \qquad (8)$$
$$2\mu(U'-i\upsilon')=[z\varphi(z)-z\varphi'(z)-\psi(z)]e^{-i\theta}$$

Соотношения (8) пригодны для отыскания напряжений и смещений в полярной системе координат. в полярной системе координат. При этом, $\sigma_x'=\sigma_r$, $\sigma_y'=\sigma_\theta$, $\tau_{x'y'}=\tau_{r0}$, $u'=u_r$, $\upsilon=u_\theta$, θ – полярный угол..

Функции φ(z) и ψ(z), описывающая напряженно-деформированное состояние матрицы Ω, будем отыскивать в виде:

$$\varphi(z)=\varphi^*(z)+\widehat{\varphi}(z),\quad \psi(z)=\psi^*(z)+\widehat{\psi}(z),$$

где φ(z) и ψ(z) описывает напряженно-деформированное состояние без отверстий под действием нагрузок, приложенных на бесконечности, а φ*(z) и ψ* (z) возмущение, вносимое отверстиями и исчезающее на бесконечности.

Для плоскости, испытывающей растяжение усилиями P вдоль оси Ox:

$$\varphi(z) = Pz/4; \quad \psi(z) = - Pz/2$$

Решение обобщенной циклической задачи сводится к нахождению функций $\phi^{(p)}(z), \psi^{(p)}(z), \varphi_{\nu p}^{(')}(z), \psi_{\nu p}^{(')}(z)$ из уравнений

$$\varphi_{\upsilon p}(t) + t\overline{\varphi_{\upsilon p}'(t)} + \overline{\varphi_{\upsilon p}(t)} - \varphi_{\upsilon p}^{(e)}(t) - t\overline{\varphi_{\upsilon p}^{(e)}(t)} - \overline{\psi_{\upsilon p}^{(e)}(t)} = P_{\upsilon p}(t);$$

$$\chi\varphi_{\upsilon p}(t) - \frac{1}{\mu}[t\overline{\varphi_{\nu p}^{(e)}(t)} + \overline{\psi_{\nu p}(t)}] - \frac{\chi}{\mu_1}\varphi_{\nu p}^{(e)}(t) +$$

$$+\frac{1}{\mu_1}[t\overline{\varphi_{\nu p}^{(e)}(t)} + \overline{\psi_{\nu p}^{(e)}(t)}] = g_{\nu p}(t); \quad t \in \Gamma_0 \tag{9}$$

Принимая

$$\phi^{(P)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{кр}\left(z-e\right)^{-k}; \psi^{(P)}\left(z\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{кр}\left(z-e\right)^{-k}$$

$$\varphi_{kp}^{(e)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{кр}(z-e)^{k}; \quad \psi^{(e)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{кр}(z-e)^{k}$$

Методом рядов (7) система (9) сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_{кр}$, $b_{кр}$, $A_{кр}$, $B_{кр}$ (k=1,2,…, p=1,2), которая решается методом редукции.

Так как изначально принято, что структура конструкций состоит из структурных элементов различного масштабного уровня [3], то можно предположить, что под действием внешних воздействий в бетоне на одном из уровней неоднородностей происходит структурные изменения. Это вызывает локальное изменения свойств материалов конструкции. В этой связи можно допустить, что в теле возникла область Ω_1, свойства которого отличается от свойств материалов области Ω_0 (рис. 2а). Тогда область Ω_1 можно рассматривать как включение в Ω_0. Напряженное состояние составного тела будет описываться двумя параметрами комплексных функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ ($z \in \Omega_0$) – для основного материала и $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ ($z \in \Omega_1$) – для включения.

На границе контакта должны выполняться условия равновесия и условия непрерывности перемещений.

$$\overline{\varphi_0\left(t\right)} + \bar{t}\varphi_0'\left(t\right) + \psi_0\left(t\right) = f\left(t\right), \left(t \in \Gamma_0\right) \tag{10}$$

$$\overline{\varphi_0(t)} + \bar{t}\varphi_0'(t) + \psi_0(t) = \overline{\varphi_1(t)} + t\varphi_1'(t) + \psi_1(t), \ (t \in \Gamma_0) \tag{11}$$

$$\frac{\chi_0}{\mu_0}\varphi_0(t)-\frac{1}{\mu_0}\left[t\varphi_0(t)+\varphi_0(t)\right]=\frac{\chi_1}{\mu_1}\varphi_1(t)-\frac{1}{\mu_1}\left[t\varphi'_1(t)+\psi_1(t)\right];(t\in\Gamma_1) \quad (12)$$

В формулах (10) … (12) предполагается наличие границы между основным материалом и включением. В случае плавного изменения свойств (на макроуровне) период можно описать несколькими концентрическими контурами, между которыми свойства материала предполагаются одинаковыми (рис.2б). В этом случае вводится (n+1) пара комплексных функций, где φ_0 и ψ_0 описывают напряженное состояние нового материала, φ_i и ψ_i (i=1,2….n-1) – напряженное состояние концентрических областей Ω_i, а φ_n и ψ_n – напряженное состояние внутреннего ядра. Все эти функции могут быть найдены из системы уравнений аналогично (10) … (12), в которых условия равновесия и непрерывности записываются для каждого контура.

При заданных скачках смещений состояния объекта определяется шестью параметрами: упругими характеристиками материала матрицы x и μ, материала ядер x_0 и μ_0 и геометрическими параметрами области n и a. В ходе расчетов фиксировались параметры материалов матрицы (x=2, μ=0,4), что отвечает единичному модулю упругости и коэффициенту Пуассона 0,3, и в широком диапазоне менялись n, a, x_0, μ_0. Анализ числовых результатов показывает, что при 0,01< μ/μ_0 <1,00 распределение напряжений на основном контуре мало отличается от равномерного с интенсивностью $\sigma_\theta = 2\mu^{(1+\chi)}/(2\mu-1)$. Характер распределения напряжений на смежном контуре определяется величиной x/x_1>1 картина распределения напряжений на смежном контуре такая же, как в случае одинаковых материалов плоскости и ядер, а при x/x_1>1 эпюра σ_θ на контуре Γ_0 меняет знак.

Сравнение максимальных значений σ_θ на Γ_0 и Γ_1 дает возможность сделать вывод о малом взаимном влиянии смежных ядер при 10^{-2}< μ/μ_0 <10^2.

Таким образом, при анализе причин развития технологических трещин вполне адекватной моделью может служить бесконечная плоскость с одним включением. Поскольку, в процессе развития трещина уходит с границ контакта, то для описания процесса развития трещины допустимо принять в качестве модели однородную плоскость, на однородное напряженное состояние, которой накладывается поле напряжений, порождаемых самой трещиной.

В качестве примера на рисунке 4 изображены эпюры напряжений σ_r/μ_Δ на контурах кольца с пятью абсолютно жесткими ядрами. Коэффициент Пуассона материала матрицы принят 0,3. Линии 1 и 2 отвечают значениям ширины перемычки между отверстиями, соответственно, а=0,3 и а=0,7. Штриховой линией показана единичная эпюра объекта.

Рис.4. Эпюры напряжений на контуре кольца: 1 – ширина перемычки между отверстиями а=0,3; 2 – ширина перемычки между отверстиями а=0,7

В ходе вычислений фиксировались параметры материала матрицы (х=2, μ=0,4), что соответствует материалу с единичным модулем упругости и коэффициентом Пуассона 0,3. В широких пределах изменились геометрические параметры конструкции n и а и параметры x_0 и μ_0 материала ядер.

Характерные эпюры σ_θ приведены на рис.5.

Практически во всех случаях максимальная концентрация напряжений достигается на основном контуре. Линии уровня коэффициента концентрации напряжений k= $\sigma_{\theta\max} / p$ в зависимости от свойств материала и геометрических параметров области изображены на рис. 5.

Большое количество параметров затрудняет использование таблиц в практических вычислениях. Однако, рассматриваемая задача имеет три простых случая: А – растяжение плоскости с кольцом отверстий, Б – с кольцом абсолютно жестких ядер, В – растяжение сплошной плоскости.

Выводы

1. Проведенный численный эксперимент дал возможность заключить, что при твердении грубогетерогенных материалов (бетонов) возникает неравномерное поле деформаций, которое ведет к концентрации напряжений на границе включений и появлению зародышевых трещин.
2. При анализе причин развития технологических трещин адекватной моделью может служить бесконечная плоскость с одним включением.

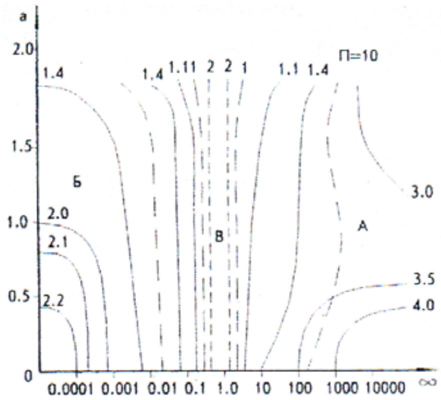

Рис. 5 Номограмма коэффициента концентрации напряжений при растяжении бесконечной плоскости:
А – растяжение плоскости с кольцом отверстий; Б – то же, с кольцом абсолютно жестких ядер; В – растяжение сплошной плоскости

3. При внешних воздействиях на бетон на микро- и макро-уровнях и вследствие усадочных явлений в нем на границах включений возникает концентрация напряжений, которая может перерасти в трещины. Начальные (технологические) трещины зависят от состава бетона, интенсивности водоотделения и испарения воды [2] и могут достигать ширины раскрытия 2 мм.

Summary

This article describes numerical studies of the embryonic cracks appearance at the borders inclusion in the concrete.

Литература

1. EN 1992-1-1. Общие правила и правила для зданий. 2. Руководство для проектировщиков к еврокоду 2: Проектирование железобетонных конструкций. Э.В. Биби, Р.С. Нараянан. Изд. 2, М., 2013, 291 с. 3. Соломатов В.И., Дорофеев В.С., Выровой В.Н., Сиренко А.В. Композиционные строительные материалы и конструкции пониженной материалоемкости. – К., Будівельник, 1991. – 144 с. 4. Beeby A.W. Cracking and Corrosion. Concrete in the Oceans Report №2 CIRIA Underwater Engineering Group, London, 1978. 5. Schiessl P. and Ranpach M. Laboratory studies and calculations on the influence of chloride-induced corrosion of steel in concrete. AC Materials Journal. 94, 1997, c.56-62. 6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1976. – 707 с. 7. Бурышкин М.Л., Тропп Э.А., Шупта В.П. Эффективный метод решения задач термоупругости для дисков циклической структуры // АН СССР, ФТН А.Р. Йоффе, 1336. Л.., 1989.