УДК 624.012

СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВРАХУВАННЯМ ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

М.Д.Король, *аспірант*, **І.В.Король,** *асистент*

Одеська державна Академія будівництва та архітектури

В реальних конструкціях, що знаходяться в складному деформованому стані під дією зовнішніх навантажень, стрижневі елементи схильні до дії згинальних моментів, обумовлених наявністю різних недосконалостей, поперечних зв'язків і т.д. Очевидно, що в умовах роботи за межею пружності виникають додаткові деформації від вигину негативно впливають на несучу здатність, внаслідок нелінійності діаграми деформування матеріалу. Тому при визначенні для КЕ критичних напружень σ_{nl} в рамках алгоритму коригування модулів [1] необхідно використовувати критерій, що враховує наявність у стискаючої сили ексцентриситету.

Якщо на стрижень діє не тільки стискаюча сила N, але і момент, або спочатку стрижень має деякі відхилення, то з самого початку програми навантаження він прийме згинальну форму рівноваги. І зі зростанням значення сили N прогини будуть тільки зростати. Якщо діаграма деформування стрижня нелінійна, то настане стан, коли сила досягне свого максимуму, а прогини і кути повороту продовжать монотонно зростати (Рис. 1). Виникнення такого стану, якому відповідає сила N^m на малюнку, обумовлено наявністю криволінійної ділянки на діаграмі деформування, де значення дотичного модуля E_c становиться менше значення лінійно-пружного модуля E.

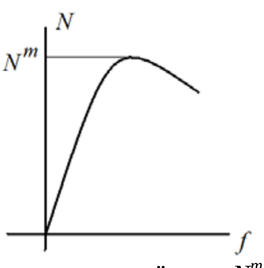

Рис.1Діаграма сила - прогин для стиснутого з вигином стержня.

Значення стискаючої сили N^m являється критичним в тому сенсі, що при його досягненні відбувається втрата стійкості 2-го роду. При втраті стійкості 2-го роду нова форма рівноваги немає з'являється (на відміну від втрати стійкості 1-го роду). При досягненні навантаженням відповідного критичного значення починається необмежене зростання переміщень аж до руйнування конструкції. Зростання переміщень не зупиняється навіть при зменшенні навантаження. Деякі автори часто говорять в цьому випадку про «втрату рівноваги» [2]. Також для критичного значення навантаження в цьому випадку часто використовують термін «гранична точка» [3, 4].

Критерій, на підставі якого будемо визначати значення критичної сили, будемо називати критерієм «нульової відпірності». Зрозуміло, що значення критичної сили N^m залежить від величини моментів і початкових недосконалостей. Тому використання критерію «нульової відпірності» для стрижневих елементів дозволяє врахувати не тільки нелінійну діаграму деформування, але також і негативний вплив згинаючих факторів.

Сформулюємо допоміжну завдання про стійкість стиснуто-вигнутого стрижня, вирішуючи яку для кожного кінцевого елемента, можна визначити значення критичної сили N^m. Вихідними даними для такого завдання будуть служити значення параметра критичного навантаження β, визначене з рішення задачі лінійно-пружної стійкості для системи, і відповідного значенням критичної сили N_{lin} і моменту M_{lin}, які діють на стержень. Знаючи критичне зусилля, для кожного кінцевого елемента за формулою Ейлера можемо визначити, значення приведеної довжини l:

$$\mathrm{l}^2 = \frac{\pi^2 \mathrm{El}}{\mathrm{N}^{\mathrm{lin}}} \tag{1}$$

В даному випадкуl розуміється як приведена довжина, отримана з рішення лінійно-пружної задачі стійкості для системи і формули Ейлера (1), ане як фізична довжина кінцевого елемента в розрахунковій схемі, та використовується лише в рамках допоміжної задачі. Для приведеної довжини, визначеної таким чином, допоміжна задача приймає наступний вигляд (Рис.2):

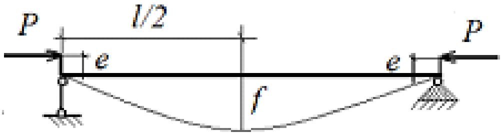

Рис. 2. Задача стійкості стиснуто-вигнутого стержня

На шарнірно опертий стрижень довжиною l діє стискаюча сила P, прикладена з ексцентриситетом e. Вид перетину, а також діаграми деформування $\sigma = \sigma\ (\varepsilon)$ відомі. Потрібно визначити критичну силу «нульової відпірності» $P = N^m$.

На малюнку (2): f - максимальний прогин, l - приведена довжина, e - ексцентриситет, де

$$e = M^{lin}/N^{lin} \qquad (2)$$

Будемо виходити з гіпотези плоских перетинів, справедливість якої визначається геометричними співвідношеннями розмірів перетину, і не залежить від фізичних властивостей матеріалу. Відповідно до цієї гіпотези поздовжні деформації ε в стержні прямо пропорційні відстані ξ від нейтрального шару перетину, причому коефіцієнтом пропорційності є кривизна осі стрижня χ:

$$\varepsilon = \chi \cdot (u - x) = \frac{u - x}{\rho} \qquad (3)$$

де ρ – радіус кривизни осі стержня, x - точка з координатою, положення нейтрального шару перетину.

Повернемося до розгляду геометричній сторони задачі. Будемо вважати прогини малими в порівнянні з довжиною стержня, тоді вигнута вісь буде пологої кривої, тобто тоді вираз для кривизни

$$\chi = \pm\frac{d^2\nu}{dz^2} \qquad (4)$$

Останнім і, мабуть, найбільш важливим допущенням щодо геометричної сторони задачі буде припущення про те, що вигнута вісь стрижня має вигляд напівхвилі синусоїди:

Це допущення дозволяє істотно спростити обчислювальний процес, так як в цьому випадку стріла прогину f є єдиним змінним параметром, від якого залежить деформований стан стрижня. Таким чином, стрижень розглядається як система з одним ступенем свободи, яка може деформуватися по заданій кривій. Умовою рівноваги такої системи будемо вважати рівність внутрішнього моменту зовнішньому в середньому перетині стрижня, відповідному максимальному прогину f. Це рівнозначно тому, що приймається незмінність відносини внутрішнього моменту і кривизни осі стрижня по всій його довжині, і вважається, що воно дорівнює дійсному відношенню між моментом і кривизною в середньому перерізі.

Допущення про форму вигину підвищує величину критичної сили, так як накладає додаткові обмеження на деформації стрижня. Однак воно компенсується допущенням, пов'язаних з розглядом тільки середнього перетину, який призводить до зменшення критичної сили. Як вже було зазначено раніше в огляді літератури з стійкості стержневих систем, дані припущення істотно спрощують завдання і отримали велику популярність в практичних розрахунках. Введені спрощення про малість прогинів і форми вигину по синусоїді призводять до завищення критичної сили не більше ніж на 3-4%.

Обчислимо вираз для кривизни осі стрижня в середньому перерізі:

$$x = \frac{1}{\rho} = \pm f\frac{\pi^2}{l^2} \tag{5}$$

Далі після вибору знака отримаємо остаточний вираз для поздовжньої деформації в будь-якої точки перерізу стрижня:

$$\varepsilon = f\frac{\pi^2}{l^2}\,(u - x) \tag{6}$$

З (6) видно, що залишається невідомою координата x положення нейтральної лінії в перерізі. Її необхідно визначати з рівнянь рівноваги стрижня, записаних щодо центрального перетину. У стані рівноваги виконуються наступні умови:

1. рівність між внутрішньою і зовнішньою стискає силою *P*:

$$P - \int \sigma\,(\varepsilon)dF = 0 \tag{7}$$

2. рівність між внутрішнім моментом і зовнішнім (відносно лівого краю перерізу):

$$P\,(e + f + c) - \int u\sigma(\varepsilon)\,dF = 0 \tag{8}$$

де c - координата центра ваги перерізу, F-площа перетину.

Умову «нульової відпірності» напишемо у вигляді:

$$\frac{dP}{df} = 0 \tag{9}$$

Тоді, взявши до уваги співвідношення для поздовжніх деформацій у довільній точці перетину (7), а також вирази для визначення ексцентриситету *e* і приведеної довжини *l*, остаточно отримаємо систему рівнянь допоміжної задачі «нульовий відпорними», яка поєднує в собі (1-9).

Для того щоб вирішити цю систему, необхідно задатися зв'язком між напругою і деформаціями. Традиційно в практичних розрахунках для сталевих конструкцій використовується модель ідеального пружнопластичного матеріалу з діаграмою Прандтля.

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sin(\varepsilon)\sigma_T, & |\varepsilon| \geq \varepsilon_T \\ E\varepsilon, & |\varepsilon| < \varepsilon_T \end{cases}, \quad (10)$$

де E – модуль пружності, σ_T– межа текучості (збігається з межею пропорційності), $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}$– деформація текучості.

Висновки. При такій спрощеній залежності можна отримати прості аналітичні вирази для шуканої величини критичної сили. Зокрема, якщо перетин має прямокутну форму, а деформації плинності досягаються тільки на внутрішній (стислій) стороні розтину, то середні критичне напруження $\sigma_{кр} = \frac{N^m}{F}$ в перетині визначається з кубічного рівняння [5].

Для стержнів з малою гнучкістю (коли стійкість втрачається в галузі фізичної нелінійності) при невеликих ексцентриситетах діаграма Прандтля не може бути застосована, тому одержувані значення критичної напруги завжди прагнуть знизу до границі текучості σ_T, що закономірно з огляду на наявність на діаграмі Прандтля майданчики плинності. Можна бачити, що рішення стає мало залежним від гнучкості, значення критичної напруги виявляються завищеними. Тому для моделювання нелінійної роботи матеріалу для елементів при вирішенні допоміжної задачі «нульової відпірності» використовується уніфікована діаграма будівельних сталей [6].

Summary

This article discusses the investigation of the stability of the system taking into account the physical nonlinearity, as well as its application to the analysis of stability of rods and structural elements.

Література

1. Улитин В.В. Физически нелинейный анализ устойчивости конструкций. СПб.: ГИОРД, 2007. 96 с.]

2. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. / Я.Г. Пановко [и др.] М.: Наука, 1987. 352 с.

3. Nguyen Q.S.Stability and Nonlinear Solid Mechanics. John Wiley & Sons, 2000. 398 p.

4. Геммерлинг А.В. Расчет стержневых систем. М.: Стройиздат, 1974. 207 с.

5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

6. Одесский П.Д., Бельский Г.Е. О едином подходе к использованию диаграмм работы строительных сталей // Промышленное строительство. 1980. №7.С. 4-6.