

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Крутий Ю.С., к.ф.-мат.н., профессор,
Сурьянинов Н.Г., д.т.н., профессор,
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
sng@ogasa.org.ua

Аннотация. Рассмотрено решение краевых задач изгиба ортотропных пластин численно-аналитическим методом граничных элементов. Построенное аналитическое решение охватывает все возможные варианты граничных условий. Численная реализация выполнена для двух вариантов опирания пластины – шарнирного по всему контуру и жесткого закрепления по трем сторонам при свободной четвертой стороне. В обоих случаях исследованы прогибы и напряжения при двух видах внешней нагрузки.

Ключевые слова: ортотропная пластина, изгиб, метод граничных элементов, метод конечных элементов, прогиб, напряжение, ANSYS, Scilab.

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВИХ ЗАВДАНЬ ВИГИНУ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ

Крутий Ю.С., к.ф.-мат.н., професор,
Сур'янінов М.Г., д.т.н., професор,
Одеська державна академія будівництва та архітектури
sng@ogasa.org.ua

Анотація. Розглянутий розв'язок крайових завдань вигину ортотропних пластин чисельно-аналітичним методом граничних елементів. Побудований аналітичний розв'язок охоплює усі можливі варіанти граничних умов. Чисельна реалізація виконана для двох варіантів обпирання пластины – шарнірного по усьому контуру й жорсткого закріплення по трьох сторонах при вільній четвертій стороні. В обох випадках досліджені прогини й напруження при двох видах зовнішнього навантаження.

Ключові слова: ортотропна пластина, вигин, метод граничних елементів, метод скінченних елементів, прогин, напруження, ANSYS, Scilab.

SOLUTION OF REGIONAL PROBLEMS OF A BEND OF ORTOTROPIC PLATES BY NUMERICAL METHODS

Krutiyy Yu.S., PhD., Professor,
Surianinov N.G., Doctor of Engineering, Professor,
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
sng@ogasa.org.ua

Abstract. A brief analysis of the numerical and analytical boundary element method and finite element method. The solution of boundary value problems of bending of orthotropic plates numerically-analytical boundary element method. Constructing an analytical solution covers all possible variants of boundary conditions for the two of them formed the boundary value problem. Numerical implementation is made for two variants bearing plate — swivel around the loop and fixed on three sides with the fourth side free. In both cases we studied deflections and stresses in

two types of external load. The results for a number of characteristic points. To determine the numerical value obtained by analytic expressions of the fundamental functions, Green's functions and the load vector components with the subsequent decision of the constructed boundary value problems, compiled calculation program, implemented in SKILAB package. The program is universal, because it covers all possible variants of boundary conditions for any character of the applied load. To evaluate the results obtained and simulated calculation plates considered in the ANSYS program. The maximum discrepancy between the results of calculations using two methods was 2.96% for the deflection and 0.9% for the stresses under the action of a force on the plate is rigidly fixed on three sides with the fourth side free.

Keywords: orthotropic plate bending, boundary element method, finite element method, deflection, stress, ANSYS, Scilab.

Введение. Большинство задач строительной механики, связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов, сводится, как правило, к одному или нескольким дифференциальным уравнениям.

Точные решения этих уравнений, или решения в замкнутом виде, удается получить далеко не всегда. В остальных случаях точные решения либо принципиально невозможны (когда граничные условия или условия на контуре нельзя выразить в аналитической форме), либо приходится сталкиваться с таким объемом вычислений, что получение аналитических решений становится нецелесообразным. В связи с этим при решении многих практических задач давно используются приближенные методы исследования.

Эти методы можно разбить на две основные группы. К первой группе относятся вариационные методы, применение которых позволяет получить численные алгоритмы и приближенные аналитические выражения искомых функций (напряжений, перемещений, внутренних усилий и др.). Вторую группу составляют численные методы, при использовании которых определяются значения искомых функций при тех или иных значениях аргументов.

Как известно, в настоящее время наиболее разработанным численным методом является метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод является мощным средством решения задач не только строительной механики, но и целого ряда других дисциплин – гидрогазодинамики, теплотехники, электротехники и т.д.

Метод конечных элементов реализует подавляющее большинство современных инженерных компьютерных программ.

Цели и задачи. Наиболее серьезной проблемой МКЭ, очевидно, следует считать проблему сходимости полученного решения, оценку погрешности, связанной с дискретизацией исходной геометрической модели. Помимо этого, у метода существует еще целый ряд существенных недостатков – искусственное ограничение области расчета, дискретизация окружающего пространства, выполнение новой дискретизации при изменении положения элементов. Анализ литературных источников показывает, что к настоящему времени ресурсы совершенствования МКЭ практически исчерпаны. Это подчеркивает актуальность разработки новых, более эффективных, чем МКЭ, численных методов, а также реализующих их программных комплексов, позволяющих более экономично использовать вычислительные ресурсы и гарантировать эффективное решение многовариантных задач анализа и проектирования.

Поиск альтернативных подходов привёл к появлению нового метода, а точнее, методов граничных элементов (МГЭ). Здесь дискретизации подвергается не вся рассматриваемая область, как в методе конечных элементов, а только её граница. Хотя эта концепция и является общей для всех МГЭ, принято различать прямой вариант МГЭ, полупрямые варианты и непрямые.

В данной работе краевые задачи изгиба ортотропных пластин решаются в рамках сравнительно нового варианта МГЭ, который получил название «Численно-аналитический

метод граничных элементов» (ЧА МГЭ). Это направление в развитии методов граничных элементов имеет целый ряд преимуществ по сравнению с классическими вариантами МГЭ, разработанными в трудах Бенерджи и Баттерфилда [1], Бреббиа, Толлеса и др. [2, 3]. Метод состоит в разработке фундаментальной системы решений (аналитически) и функций Грина (также аналитически) для каждой рассматриваемой задачи. Для учета определенных граничных условий, или условий контакта между отдельными модулями (так мы называем отдельный элемент системы) составляется небольшая система линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решать численно.

Многие ученые и, в первую очередь, «чистые» математики, считают, что правильнее было бы называть этот метод аналитическим, а не численно-аналитическим, т.к. все основные операции сводятся к аналитическим преобразованиям, а объем вычислительной работы на заключительном этапе не превышает обычного для других аналитических подходов объема.

Привлекательность ЧА МГЭ обусловлена рядом причин. Дискретизация только границы области, занимаемой объектом, резко уменьшает порядок системы разрешающих уравнений; есть возможность снижения мерности решаемой задачи. Кроме того, метод строго обоснован математически, так как использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений, а, значит, в рамках принимаемых гипотез позволяет получить точные значения параметров задачи (усилий, перемещений, напряжений, токов, частот собственных колебаний, критических сил потери устойчивости и т.д.) внутри области. Отметим также простоту логики алгоритма, хорошую сходимость решения, высокую устойчивость и малое накопление погрешностей при численных операциях.

В настоящее время метод хорошо разработан для решения широкого круга задач – статики, динамики и устойчивости разнообразных стержневых систем (балок, рам, ферм, арок и комбинированных систем, тонкостенных стержней), изотропных пластин (круглых и кольцевых) [4, 5]. Несколько сложнее обстоит дело с оболочками, где приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями восьмого порядка, что приводит к большому числу фундаментальных функций, аналитические выражения которых весьма громоздки. Однако и здесь удалось достичь заметных успехов, в частности, для пологих и цилиндрических оболочек [6, 7]. Представляется перспективным использование ЧА МГЭ и для расчета систем с дискретно-непрерывным распределением параметров.

Объекты и методы исследования. В работе рассматриваются краевые задачи изгиба ортотропной пластины при любых условиях закрепления ее краев. В качестве конкретного объекта выбрана квадратная плита класса OSB/3 размерами $500 \times 500 \times 8$ мм. Эксплуатационные требования и нормативные технические (в том числе, и механические) характеристики к OSB регламентируются Европейскими стандартами EN 300 "Определения, классификация и технические характеристики", EN 13986 "Панели из древесных материалов для применения в строительстве – характеристики, оценка соответствия и маркировка" и рядом других нормативных документов. В данном случае продольный модуль упругости – 5500 МПа; поперечный модуль упругости – 1500 МПа.

Результаты исследований. Рассмотрим два вида граничных условий: шарнирное опирание по всему контуру (вариант 1) и жесткое защемление пластины по трем сторонам при свободной четвертой стороне (вариант 2). В каждом случае рассмотрим два вида внешней нагрузки: сосредоточенная сила ($150H$), приложенная в центре пластинки и нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности ($1200H / м^2$). Метод позволяет определить прогибы и напряжения в любой точке пластины, но очевидно, что интерес представляет только ряд характерных точек (рис. 1), среди которых, в силу характера граничных условий, выделим точку 1 при шарнирном опирании всех сторон пластины и точки 1, 5 при втором варианте граничных условий.

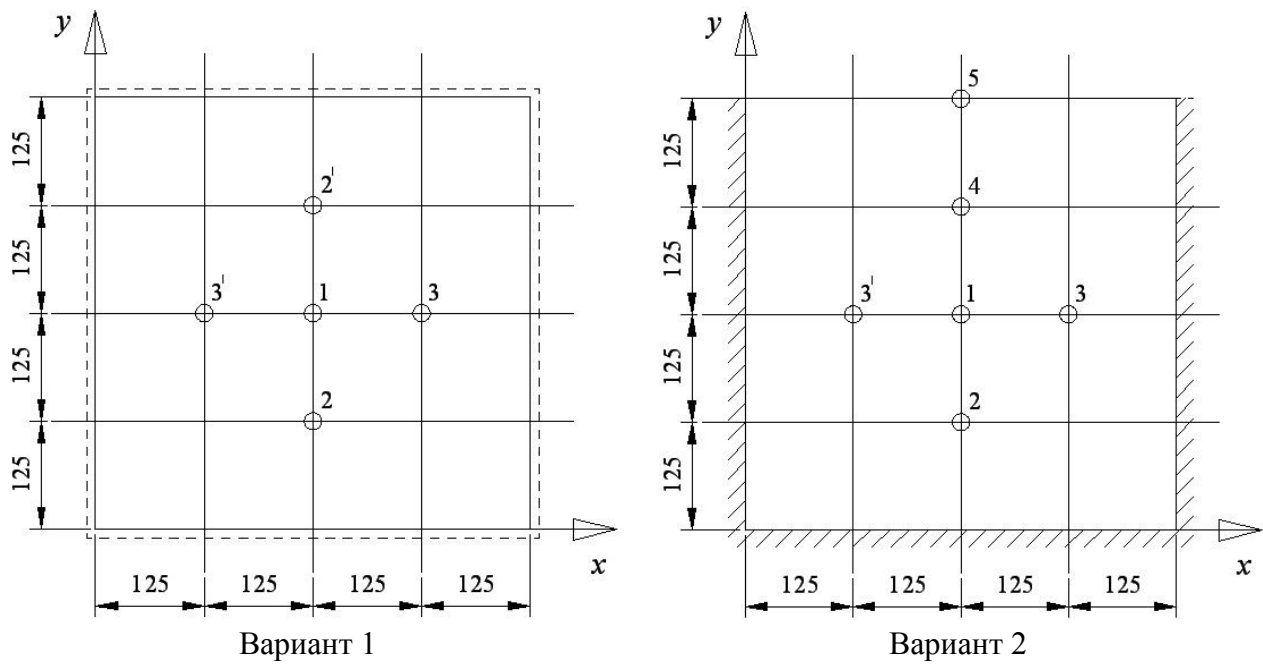


Рис. 1. Расположение характерных точек

Рассматриваемые два варианта закрепления пластины представим в виде обобщенных одномерных модулей (рис. 2), где цифрами 0 и 1 обозначены начало и конец каждого модуля.

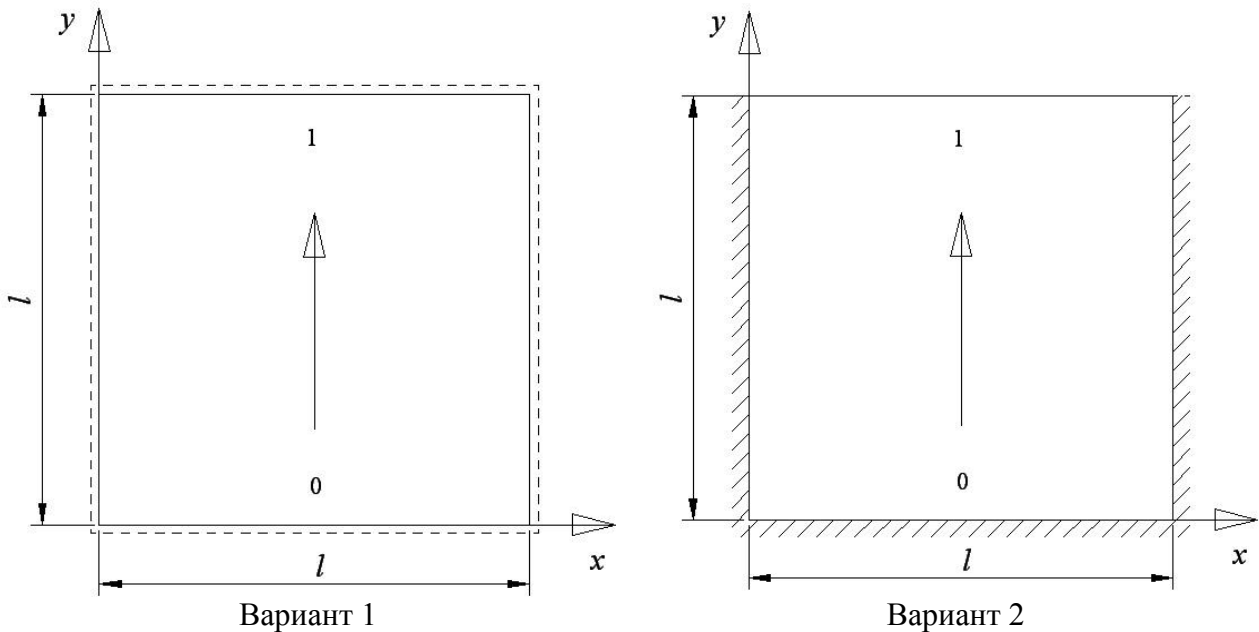


Рис. 2. Пластины в виде обобщенных одномерных модулей

Вариант 1. Шарнирное опирание по всему контуру.

В этом случае граничные условия имеют вид:

$$y = 0: W(0) = 0; M_y(0) = 0; \quad y = l: W(l) = 0; M_y(l) = 0.$$

Схема формирования краевой задачи [4]:

	1	2	3	4	$X(0)$	$Y(l)$	
1		A_{12}		A_{14}	$W(0) = 0; \theta_y(l)$	$W(l) = 0$	$B_{11}(l)$
2	-1	A_{22}		A_{24}	$\theta_y(0)$	$\theta_y(l)$	$B_{21}(l)$
3		A_{32}		A_{34}	$M_y(0) = 0; Q_y(l)$	$M_y(l) = 0$	$B_{31}(l)$
4		A_{42}	-1	A_{44}	$Q_y(0)$	$Q_y(l)$	$B_{41}(l)$

где A_{ij} , B_{il} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) – полученные нами аналитические выражения фундаментальных функций и компонентов вектора нагрузки.

В результате решения этой системы найдем значение функции прогибов $W(y)$:

$$W(y) = \theta_y(0)A_{12}(y) + Q_y(0)A_{14}(y) + B_{11}(y). \quad (1)$$

Истинное значение прогибов определяется в виде:

$$W(x, y) = W(y)X(x), \quad (2)$$

где $X(x)$ – функция поперечного распределения прогибов.

Вариант 2. Жесткое защемление по трем сторонам при свободной четвертой.

При жестком защемлении продольных кромок пластины нулевыми будут прогибы и углы поворотов, а на свободном краю отсутствуют изгибающие моменты и поперечные силы:

$$y = 0: W(0) = 0; \theta_y(0) = 0;$$

$$y = l: Q_y(l) = 0; M_y(l) = 0.$$

При $x = l$ можно выполнить следующие преобразования:

	1	2	3	4	$X(0)$	$Y(l)$	
1	-1		A_{13}	A_{14}	$W(0) = 0; W(l)$	$W(l)$	$B_{11}(l)$
2		-1	A_{23}	A_{24}	$\theta_y(0) = 0; \theta_y(l)$	$\theta_y(l)$	$B_{21}(l)$
3			A_{33}	A_{34}	$M_y(0)$	$M_y(l) = 0$	$B_{31}(l)$
4			A_{43}	A_{44}	$Q_y(0)$	$Q_y(l) = 0$	$B_{41}(l)$

где, как и раньше, A_{ij} , B_{il} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) – аналитические выражения фундаментальных функций и компонентов вектора нагрузки, но уже при других условиях закрепления.

Система линейных алгебраических уравнений краевой задачи имеет вид:

	1	2	3	4		
1	-1		A_{13}	A_{14}	$W(l)$	$B_{11}(l)$
2		-1	A_{23}	A_{24}	$\theta_y(l)$	$B_{21}(l)$
3			A_{33}	A_{34}	$M_y(0)$	$B_{31}(l)$
4			A_{43}	A_{44}	$Q_y(0)$	$B_{41}(l)$

После определения параметров $M_y(0)$ и $Q_y(0)$ получим функцию прогибов:

$$W(y) = A_{13}(y)M_y(0) + A_{14}(y)Q_y(0) + B_{11}(y). \quad (3)$$

Истинное значение прогиба $W(x, y)$ определяется формулой (2).

Для численного определения полученных аналитически выражений фундаментальных функций, функций Грина и компонентов вектора нагрузки с последующим решением построенных краевых задач, составлена программа расчета, реализованная в свободно распространяемом пакете SKILAB [8].

Программа носит универсальный характер, поскольку охватывает все возможные варианты граничных условий при любом характере приложенной нагрузки.

Для оценки полученных результатов выполнено моделирование и расчет рассматриваемых пластин в программе ANSYS [9].

Выводы. В табл. 1 приведены численные результаты проведенных исследований.

Анализ табл. 1 показывает, что максимальное расхождение результатов расчетов двумя методами по прогибу составляет 2,96 % (точка 1 при втором варианте граничных условий и действующей сосредоточенной силе) и 0,9 % по напряжениям (точка 5 при тех же условиях).

Таблица 1 – Сравнение напряжений и прогибов, вычисленных двумя методами, для двух вариантов граничных условий

№№ точек	Параметр НДС	$F = 150H$			$q = 1200H / м^2$		
		ЧА МГЭ	ANSYS	%	ЧА МГЭ	ANSYS	%
Шарнирное опирание по всему контуру							
1	$W, мм$	1,713	1,690	1,32	1,122	1,127	0,22
	$\sigma, МПа$	6,150	6,095	0,89	2,220	2,210	0,25
Жесткое защемление по трем сторонам при свободной четвертой							
1	$W, мм$	1,080	1,028	2,96	0,536	0,528	1,29
	$\sigma, МПа$	5,706	5,670	0,63	0,720	0,717	0,22
5	$W, мм$	0,275	0,262	2,72	0,725	0,720	0,69
	$\sigma, МПа$	0,666	0,660	0,90	1,030	1,021	0,87

Литература

1. Бенерджи П.К. Методы граничных элементов в прикладных науках / П.К. Бенерджи, Р. Баттерфилд // Под ред. Р.В. Гольдшейна. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Бреббиа К. Методы граничных элементов / К. Бреббиа, Д. Толлес, Л. Вроубел // Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. Бреббиа К. Применение метода граничных элементов в технике / К. Бреббиа, С. Уокер // Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
4. Дашенко А.Ф. Численно–аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. – Одесса: ВМВ, 2010. – В 2–х томах. – Т.1. – 416 с. – Т.2. – 512 с.
5. Дашенко А.Ф. MATLAB в механике деформируемого твердого тела. Алгоритмы и программы / А.Ф. Дашенко, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов // Учебное пособие. — Харьков: Бурун книга, 2011. – 480 с.
6. Параска Г.Б. Приложение метода граничных элементов к задаче изгиба длинной цилиндрической оболочки / Г.Б. Параска, Н.Г. Сурьянинов, Е.В. Слабенко. – Вісник Хмельницького національного університету. – Вип. 2, 2012. – С.36-41.
7. Сурьянинов Н.Г. Фундаментальные функции в задаче изгиба длинной цилиндрической оболочки / Н.Г. Сурьянинов, Е.В. Слабенко. – Вісник Одеського національного морського університету. – Вип. (3)36, 2012. – С. 89-96.
8. Алексеев Е.Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова, Е.А. Рудченко. – М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 269с.
9. Дашенко А.Ф. ANSYS в задачах инженерной механики / А.Ф. Дашенко, Д.В. Лазарева, Н.Г. Сурьянинов / Изд. 2-е, перераб. и доп. Под ред. Н.Г. Сурьянинова. – Одесса. – Пальмира, 2011. – 505 с.

Стаття надійшла 19.07.2016