УДК 593.3

РАЗВИТИЕ МЕТОДА НАПРЯЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

Барановский В.И., *к.т.н., доц.*

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

В работе [1] приведено решение полной (15 уравнений) системы дифференциальных уравнений линейной пространственной задачи теории упругости в классе функций, удовлетворяющих бигармоническим уравнениям и граничным условиям. В упомянутой системе уравнений соотношения совместности деформаций в явной форме не фигурируют. Если граничные условия заданы в виде поверхностной нагрузки, то в ряде случаев удобно применить метод напряжений, суть которого состоит в том, что для определения шести компонент вектора напряжений $\vec{\sigma}$ используются 3 уравнения равновесия и 6 уравнений совместности деформаций, выраженных через напряжения в форме уравнений Бельтрами (при отсутствий объемных сил) или Бельтрами – Мичелла при их наличии. Для сокращения количества уравнений напряжения выражают через новые неизвестные - функции напряжений (например Максвелла и Мореры), таким образом, что бы они заведомо удовлетворяли условиям равновесия. Тогда для определения функций напряжений записываются уравнения исходя из условий совместности. Так в работе [2], см. также [3], приведены 6 дифференциальных уравнений для функций Максвелла и столько же для функций Мореры. В [4], см. также [5], для функций Максвелла приведены 3 дифференциальных соотношения при использований свойства гармоничности функции относительного объемного расширения. В [6], см. также [7], с применением аппарата тензорного исчисления получена система дифференциальных уравнений относительно тензора функций напряжений, причем не обязательно знать все компоненты тензора, а достаточно связать его дивергенцию и след. Ввиду сложности этих дифференциальных соотношений (в отличии от плоской задачи, где функция напряжений подчиняется бигармоническому уравнению) метод напряжений менее развит, чем метод перемещений. Предлагаемый в статье подход позволяет получить уравнения совместности в напряжениях в форме, несколько отличной от уравнений Бельтрами, а также уравнения для функций напряжений Максвелла, поддающиеся решению, в общем виде.

Исходными уравнениями метода напряжений в статической постановке для тела, занимающегося область Ω, ограниченную замкнутой поверхностью S, являются условия равновесия и совместности деформаций в напряжениях

$$\begin{cases} A\vec{\sigma} = \vec{p} \\ CB\vec{\sigma} = \vec{0} \end{cases}, \tag{1}$$

где A(3х6) – дифференциальный оператор первого порядка (размером 3х6) условий равновесия элементарного параллелепипеда: $\vec{\sigma}$ (x,y,z) – вектор напряжений; B(6х6) – алгебраическая матрица зависимости между деформациями и напряжениями; C(6х6) – дифференциальный оператор совместности деформаций второго порядка, Подразумевается, что векторы напряженно деформированного состояния обладают необходимыми свойствами дифференцируемости и непрерывности; граничными условиями для (1) будут известные условия равновесия на поверхности S, ограничивающей объем тела. Отметим, что в выборе оператора совместности имеется определенный произвол.

Анализ показывает, что оператор совместности можно записать в симметричной матричной форме; симметричную его форму обозначим C_B и представим в клеточной форме следующим образом:

$$C_B = \left| C_2^T, C_1^T \right| = \begin{vmatrix} C_2 \\ C_1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

где C_2(3х6) и C_1(3х6) – матричные дифференциальные операторы второго порядка,

$$C_2 = \left| c_{20}, \; c_{2x} \right|, \quad C_1 = \left| c_{10}, \; c_{1x} \right|, \tag{3}$$

а составляющие операторы c_{20}, c_{2x}, c_{10}, c_{1x} имеют размер (3х3), причем c_{20} и c_{1x} – симметричные операторы, а $c_{2x} = c_{10}^T$.

Возьмем блочно-диагональный алгебраический оператор B_3(6х6)

$$B_3 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & -2E_3 \end{vmatrix} \tag{4}$$

где a_3 – алгебраическая, E_3 – единичная матрица третьего порядка; 0 – нулевые матрицы соответствующих порядков, и введем в рассмотрения дифференциальный оператор $C_B B_3$. Простым перемножением можно убедится в существовании следующих свойств, для оператора $C_B B_3$

$$C_B B_3 C_i = \nabla^2 C_i \tag{5}$$

где $C_i = C_1$ или $C_i = C_2$ или $C_i = C_B$; ∇^2 - трехмерный оператор Лапласа.

Это свойство оператора $C_B B_3$ можно обозначить как лапласиан – инвариантное свойство оператора $C_B B_3$ – если некоторая вектор функция $\vec{f}$ принадлежит подпространству C_i, т.е. $\vec{f} \in C_i$ то функция $\vec{f}_1$ = $C_B B_3 \vec{f}$ будет принадлежать $\nabla^2 C_i$, т.е. $\vec{f}_1 \in \nabla^2 C_i$.

Возьмем вектор функций напряжений $\vec{s}$ (3x1) и образуем напряжения

$$\vec{\sigma} = C_2^T \vec{s} \,. \tag{6}$$

При любых $\vec{s}$ напряжение по (6) будут удовлетворять условиям равновесия при нулевых объемных силах – верхние уравнения в (1). Для того, чтобы напряжения были истинными, они должны удовлетворять условиям совместности – нижние уравнения в (1); они служат для построения уравнений которым должны удовлетворять функций напряжений $\vec{S}$.

Предварительно разбив матрицу B на две составляющие

$$B = k_1 B_e + k_2 B_3 \tag{7}$$

подставим (11) в (1) после преобразований получим:

$$C_в (k_1 B_e + k_2 B_3) C_2 S = C_2^T D \vec{S} \tag{8}$$

где D(3x3) – дифференциальный оператор второго порядка:

$$D = k_1 e_{11} C_{20} + k_2 \nabla^2 E_3 \tag{9}$$

где e_{11}-соответствующая алгебраическая матрица.

Таким образом, полученное свойство (8) позволяет также записать систему из 3-х дифференциальных уравнений для определения функций напряжений $\vec{S}$

$$D\vec{s} = \vec{f}_c\,, \tag{10}$$

где функция $\vec{f}_c$ (3x1) должна удовлетворять уравнению:

$$C_2^T \vec{f}_c = \vec{0}\,, \tag{11}$$

откуда видно, что в качестве функций $\vec{f}_c$ могут быть полиномы 1-го порядка или другие соответствующие функции.

Из (10) как частный случай при $\vec{f}_c = \vec{0}$, получается дифференциальные соотношения, для функций напряжений [4], приведены также [5].

Анализ показывает что можно получить решение уравнения (10) для функций напряжения $\vec{S}$ через функции, удовлетворяющие бигармоническим уравнениям

$$\vec{s} = D_\beta \vec{\varphi}_s \tag{12}$$

где $\vec{\varphi}_s$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^4 \vec{\varphi}_s = \vec{0} \text{ и } \nabla^4 \vec{\varphi}_s = \vec{f}_c\,,$$

соответственно, для однородного и неоднородного уравнений (10).

Заключение

Таким образом, приведенный подход позволяет получить для определения функций напряжений три разрешающие уравнения в форме (10), поддающиеся решению (12).

В качестве иллюстрации приведем функцию напряжений для пространственного чистого изгиба бруса парами моментов М на торцах:

$$\vec{s} = \frac{kE}{2}\left|\begin{matrix} \mu x y^2 - \dfrac{(1-\mu)}{3}x^3 \\ 3\mu x y^2 - \dfrac{(1+\mu)}{3}x^3 \\ -2xz \end{matrix}\right| \tag{13}$$

Функция напряжений $\vec{S}$ удовлетворяет уравнению (12), при этом даже в таком простом случае функция $\vec{f}_c$ не будет нулевой, её компонентами будут слагаемые типа kx. Следовательно, принятие равенства $\vec{f}_c = \vec{0}$ ограничивает потенциал функции напряжений.

Summary

This article contains a system of equations on the functions of voltage and its solution, indicating stress and displacement of space problem of the theory of elasticity in the isotropic body.

Литература

1.Барановский В.И. О функциональном представлении для векторов напряжений, деформаций и перемещений пространственной задачи теории ползучести. Вестник ОГАСА, №40, 2010.

2.Ibbetson. Mathematical Theory of Elasticity, London, 1887/

3.А.Ляв. Математическая теория упругости. – М. – Л.:ОНТИ.,1935.

4.Person C.E. Theoretical elasticity. – Cambridge.: Harvard Univ. Press, 1953.

5.Х.Хан Теория упругости. Основы линейной теории упругости и её применения. Москва, «Мир», 1988.

6.Крутков Ю.А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. – Изд-во АН СССР, 1949.

7.А.И.Лурье. Теория упругости. М.:Наука, 1970.