УДК 624.072.2

РАСЧЕТ БАЛОК ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Гошевец А.А., Кобринец В.М. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Предлагается методика определения коэффициентов при неизвестных и грузовых членов для расчета балок на упругом основании по методу Жемочкина [1].

Метод Б.Н. Жемочкина, впервые опубликованный в 1937г., получил широкое распространение в нашей стране. Метод удобен не только для расчета балок постоянной жесткости, но и для других, более сложных задач, часто не подлежащих решению чисто аналитическими методами [2].

Сущность метода применительно к расчету балок заключается в следующем. Балку мысленно делим на равные участки длиной c. Между балкой и основанием в середине каждого участка помещаем условный абсолютно жесткий стержень (Рис 1а). Решаем полученную систему смешанным способом. Помещаем заделку на конце балки и удаляем опорные стержни, заменив их силами $X_1, X_2, X_3, \ldots$ (Рис. 1б).

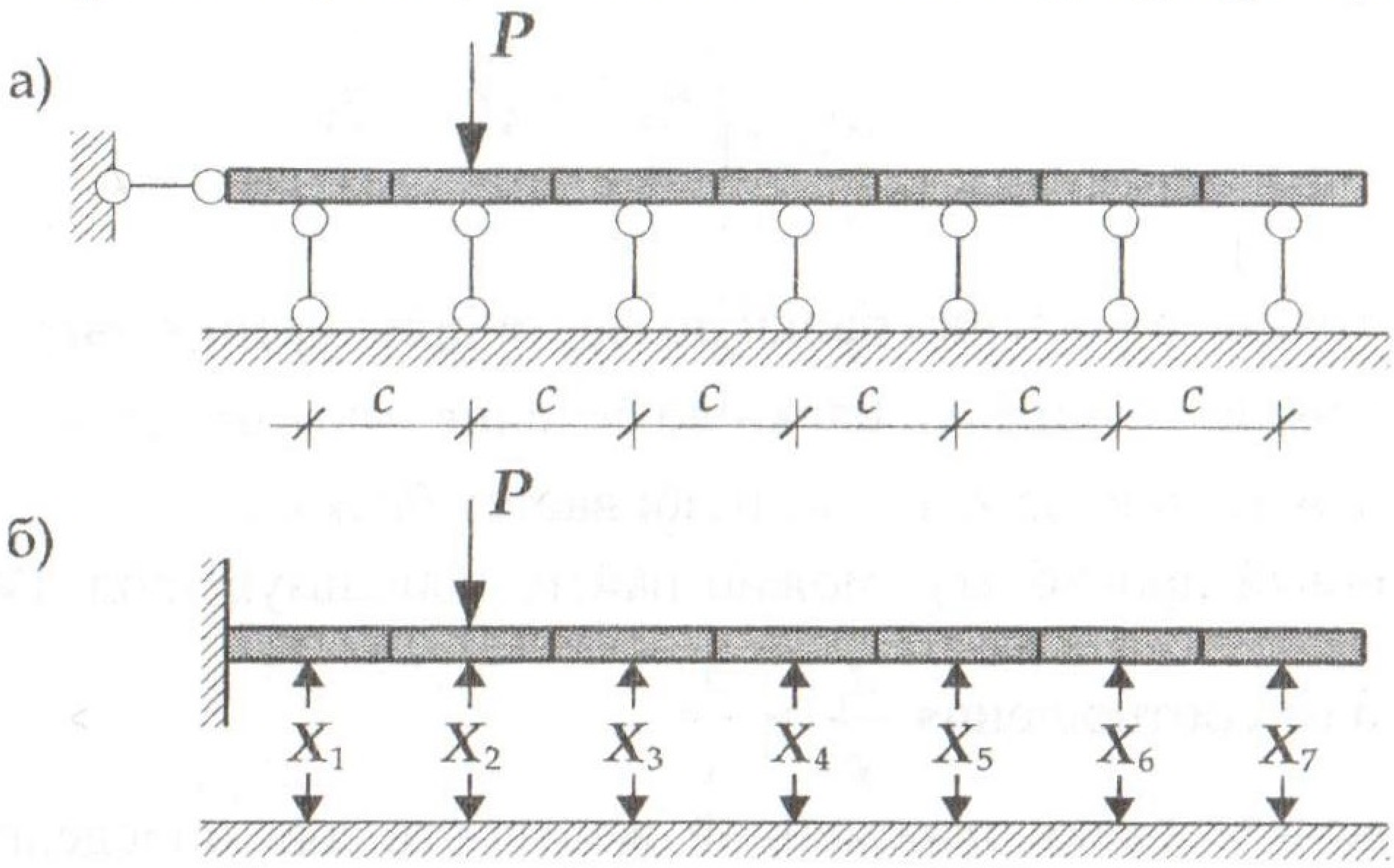

Рис. 1

За неизвестные принимаем, кроме сил X, также осадку y_0 начальной точки и угол поворота φ_0 в этой точке. Для определения этих перемещений составляется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + ... + y_0 + \varphi_0 a_1 + \Delta_{1P} = 0 \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + ... + y_0 + \varphi_0 a_2 + \Delta_{2P} = 0 \\ .... \\ X_1 + X_2 + ... - \sum P = 0 \\ X_1 a_1 + X_2 a_2 + ... - \sum M_P = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Перемещения слагаются из перемещений от осадки и от изгиба балки

$$\delta_{ki} = y_{ki} + v_{ki} \qquad (2)$$

Осадка упругого полупространства вычисляется по формуле Б.Н. Жемочкина [3]:

$$y_{ki} = \frac{\left(1 - \mu_0^2\right)}{\pi E_0 c} F_{ki}, \qquad (3)$$

значение F_{ki} можно определить по таблице II [1], в зависимости от соотношений $\frac{x}{c}$ и $\frac{b}{c}$.

Прогиб балки равен [1]

$$v_{ki} = \frac{c^3}{6EI} w_{ki}, \qquad (4)$$

где:

$$w_{ki} = \left(\frac{a_k}{c}\right)^2 \left(3\frac{a_i}{c} - \frac{a_k}{c}\right), \qquad (5)$$

здесь:

a_i – расстояние от заделки балки до места приложения нагрузки;

a_k – расстояние от заделки балки до сечения, где определяется прогиб;

c – длина участков, на которые разбивается балка.

Единичный прогиб w_{ki} можно найти, используя табл. IV [1], в зависимости от соотношения $\frac{a_i}{c}$ и $\frac{a_k}{c}$.

При расчете балки переменной жесткости для определения перемещений также применяем формулу (2), однако мы уже не можем использовать табл. IV [1]. Теперь, чтобы определить прогиб балки, следует перемножить эпюры моментов от единичных сил (ниже будет показано, что, вычисляя прогиб балки по формуле (7), можно использовать табл. IV).

Пример 1

Рассмотрим балку переменной жесткости на упругом основании (рис. 2а).

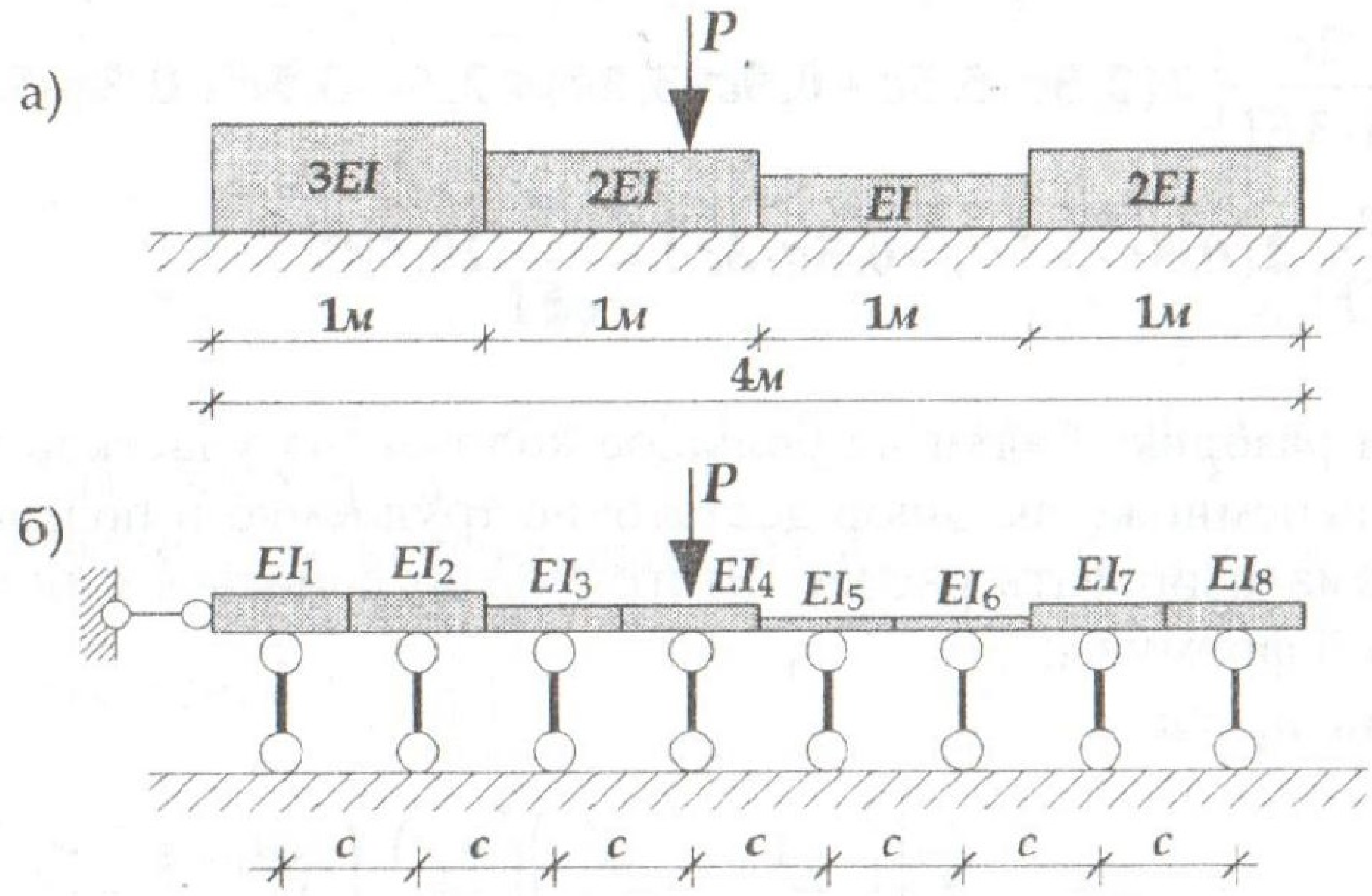

Рис. 2

Разобьем балку по длине на равные участки c=0,5м и в серединах участков поставим опорные стержни (рис. 2б).

Для расчета балки применим смешанный способ. Основная система показана на рис. 3а.

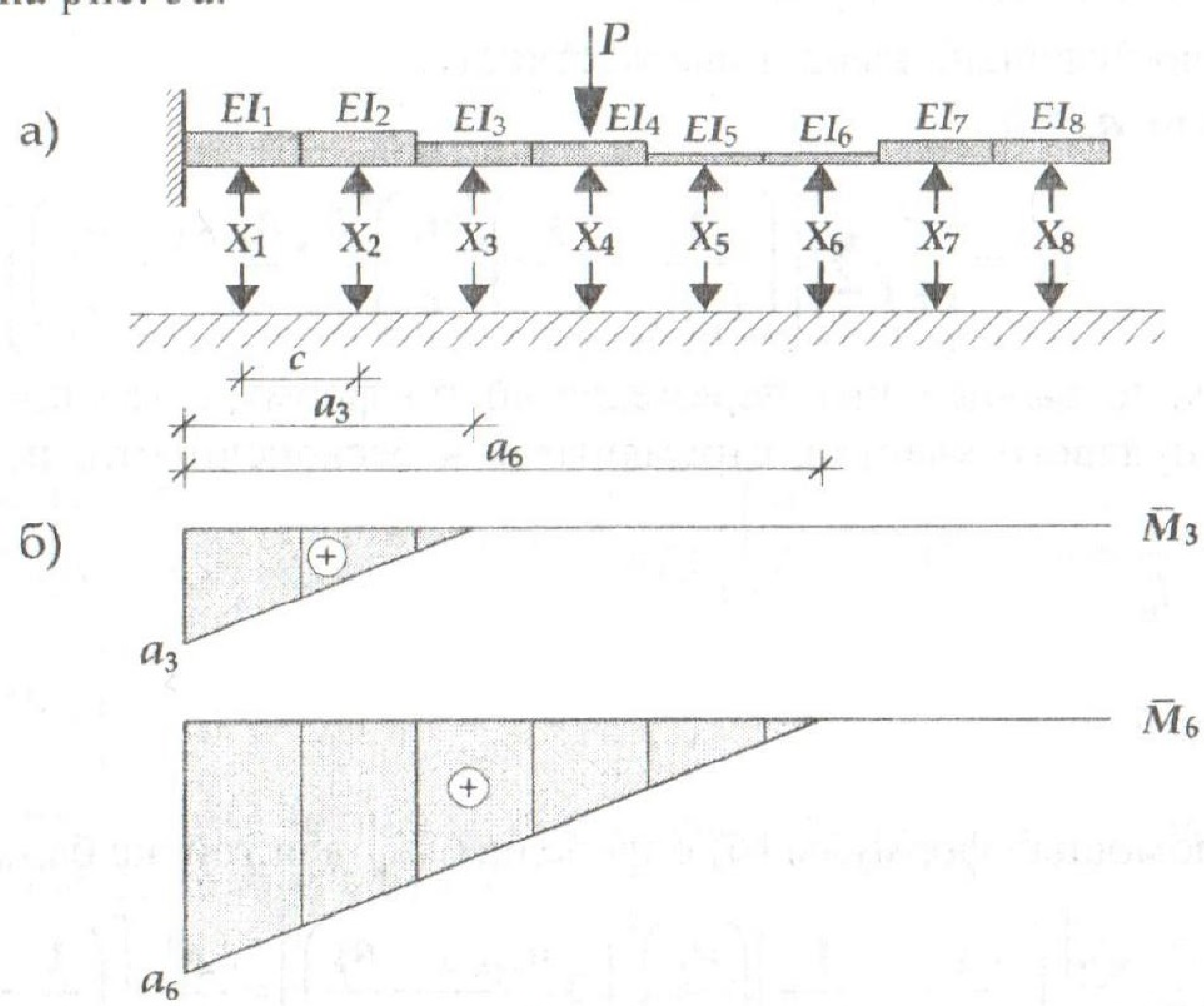

Рис. 3

Для определения перемещений применение табл. IV [1] уже не представляется возможным, поэтому найдем их, перемножая единичные эпюры.

Для примера определим перемещение v_{36} (рис 3б)

$$v_{36}=\frac{2c}{6\cdot 3EI}\left[2\left(2,5c\cdot 5,5c+0,5c\cdot 3,5c\right)+2,5c\cdot 3,5c+0,5c\cdot 5,5c\right]+$$

$$+\frac{0,5c}{6\cdot 2EI}\left[2\left(0,5c\cdot 3,5c\right)+0,5c\cdot 3c\right]=\frac{c^3}{6EI}29,583\,.$$

При разбивке балки на большое количество участков разной жесткости, перемножение эпюр достаточно трудоемко и поэтому желательно автоматизировать расчет. Этого можно добиться с помощью предлагаемой формулы:

-если $a_k<a_i$

$$v_{ki}=\frac{c^3}{6EI}\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\frac{1}{i_{k-j+1}}-\frac{1}{i_{k-j}}\right)\left(\frac{a_j}{c}\right)^2\left(3\frac{a_{j+i-k}}{c}-\frac{a_j}{c}\right)\right], \tag{6}$$

здесь a_k – расстояние от заделки балки до места приложения X_k;

$i_k=\dfrac{EI_k}{EI}$, где

EI_k – жесткость k-го участка;

EI – произвольно выбранная жесткость.

-если $a_k>a_i$

$$v_{ki}=\frac{c^3}{6EI}\sum_{j=1}^{i}\left[\left(\frac{1}{i_{i-j+1}}-\frac{1}{i_{i-j}}\right)\left(\frac{a_j}{c}\right)^2\left(3\frac{a_{j-i+k}}{c}-\frac{a_j}{c}\right)\right].$$

В ходе вычисления перемещений по формуле (6) появится жесткость нулевого участка, стремящаяся к бесконечности, поэтому отношение $\dfrac{1}{i_0}=0$.

Пример 2

С помощью формулы (6) определим v_{36} для той же балки.

$$v_{36}=\frac{c^3}{6EI}\sum_{j=1}^{3}\left[\left(\frac{1}{i_{3-j+1}}-\frac{1}{i_{3-j}}\right)\left(\frac{a_j}{c}\right)^2\left(3\frac{a_{j+6-3}}{c}-\frac{a_j}{c}\right)\right]=\frac{c^3}{6EI}\left[\left(\frac{1}{i_3}-\frac{1}{i_2}\right)\left(\frac{a_1}{c}\right)^2\times\right.$$

$$\times\left(3\frac{a_4}{c}-\frac{a_1}{c}\right)+\left(\frac{1}{i_2}-\frac{1}{i_1}\right)\left(\frac{a_2}{c}\right)^2\left(3\frac{a_5}{c}-\frac{a_2}{c}\right)+\left(\frac{1}{i_1}-\frac{1}{i_0}\right)\left(\frac{a_3}{c}\right)^2\left(3\frac{a_6}{c}-\frac{a_3}{c}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{c^3}{6EI}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{0,25}{0,5}\right)^2\left(3\cdot\frac{1,75}{0,5}-\frac{0,25}{0,5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{0,75}{0,5}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left(3\cdot\frac{2,25}{0,5}-\frac{0,75}{0,25}\right)+\left(\frac{1}{3}-0\right)\cdot\left(\frac{1,25}{0,5}\right)^2\cdot\left(3\cdot\frac{2,75}{0,5}-\frac{1,25}{0,5}\right)\right]=\frac{c^3}{6EI}29,583\,.$$

Как видим, полученные значения полностью совпадают со значениями в предыдущем примере.

Выражение (6) можно переписать иначе, если обратить внимание на то, что произведение $\left(\frac{a_j}{c}\right)^2\left(3\cdot\frac{a_{j+i-k}}{c}-\frac{a_j}{c}\right)$ есть не что иное, как единичный прогиб $w_{j,j+i-k}$:

$$v_{ki}=\frac{c^3}{6EI}\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\frac{1}{i_{k-j+1}}-\frac{1}{i_{k-j}}\right)w_{j,j+i-k}\right], \qquad (7)$$

Полученная формула позволяет определить прогиб балки, используя табл. IV [1].

Заметим, что формулу (6) и (7) можно использовать только при разбивке балки на равные участки постоянной по длине жесткости и размещении заделки на конце одного из участков.

Пример 3

Для балки из предыдущего примера определим v_{36}, используя формулу (7)

$$v_{36}=\frac{c^3}{6EI}\sum_{i=1}^{3}\left[\left(\frac{1}{i_{m-i+1}}-\frac{1}{i_{m-i}}\right)w_{i,i+n-m}\right]=\frac{c^3}{6EI}\left[\left(\frac{1}{i_3}-\frac{1}{i_2}\right)w_{14}+\left(\frac{1}{i_2}-\frac{1}{i_1}\right)w_{25}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{i_1}-\frac{1}{i_0}\right)w_{36}\right],$$

Необходимые нам w найдем по таблице IV [1] на пересечении соответствующего столбца и строчки:

$\frac{a_1}{c}=\frac{0,5c}{c}=0,5$, $\frac{a_4}{c}=\frac{3,5c}{c}=3,5$, следовательно $w_{14}=2,5$;

$$\frac{a_2}{c} = \frac{1,5c}{c} = 1,5\,,\ \frac{a_5}{c} = \frac{4,5c}{c} = 4,5\,,\ \text{следовательно } w_{25} = 27\,;$$

$$\frac{a_3}{c} = \frac{2,5c}{c} = 2,5\,,\ \frac{a_6}{c} = \frac{5,5c}{c} = 5,5\,,\ \text{следовательно } w_{36} = 87,5\,;$$

$$v_{36} = \frac{c^3}{6EI}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2,5 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot 27 + \frac{1}{3}\cdot 87,5\right] = \frac{c^3}{6EI}29,583\,.$$

Полученное значение совпадает с предыдущими.

Свободные члены уравнений, представляющие собой прогибы балки от внешней нагрузки, также можно найти, используя (6) и (7), если внешние силы приложены в местах опорных стержней.

Вывод

Полученные формулы позволяют существенно облегчить определение перемещений при расчете балки переменной жесткости на упругом основании. Формула (6) может использоваться для автоматизированного расчета, а формула (7) позволяет использовать таблицы, предложенные Б.Н. Жемочкиным.

Литература

1. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. Госстройиздат, 1962.
2. Горбунов-Посадов М.И. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1984.
3. Синицын А.П. Расчет балок и плит на упругом основании за пределом упругости. – М.: Стройиздат, 1974.