УДК 531.383

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)*

Исследовано движение твердого тела в случае Лагранжа под действием постоянного возмущающего момента и восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени и угла прецессии. Получено решение усредненной системы уравнений в первом и втором приближении.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки O под действием постоянного возмущающего момента и восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени и угла прецессии. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C - A)\, qr = k(\tau,\psi)\sin\theta\cos\varphi + M_1,\\
&A\dot{q} + (A - C)\, pr = -k(\tau,\psi)\sin\theta\sin\varphi + M_2,\\
&C\dot{r} = M_3,\, M_i = M_i(p,q,r,\psi,\theta,\varphi),\ (i = 1,2,3),\ \tau = \varepsilon t\\
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + \mathrm{q}\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\\
&\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\\
&\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины M_i (i = 1, 2, 3) – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π, φ – угол собственного вращения, ψ – угол прецессии, θ – угол нутации; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от медленного времени и угла прецессии $k(\tau,\psi)$. При отсутствии возмущений $M_i=0$ (i=1, 2, 3) и $k=const$ уравнение (1) отвечает случаю волчка Лагранжа.

В данной работе делаются следующие исходные предположения:

$$(p^2 + q^2)^{1/2} << r, C r^2 >> k, |M_i| << k\ (i = 1,2,3) \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика;

возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим моментом.

Неравенства (2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon << 1$ и положить:

$$p = \varepsilon P, q = \varepsilon Q, k = \varepsilon K,$$
$$M_i = \varepsilon^2 M_i^* (P, Q, r, \psi, \theta, \varphi) (i = 1,2,3) \tag{3}$$

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1), если выполнены условия (2)-(3), которое будет проводиться методом усреднения [1,2] на интервале времени порядка ε^{-1}. Рассмотрим систему нулевого приближения (предварительно разделив обе части первых двух уравнений (1) на ε после замены переменных (3)), и положим $\varepsilon = 0$. Тогда решение полученной системы имеет вид

$$\begin{aligned}
&r = r_0,\ \psi = \psi_0,\ \theta = \theta_0,\ \varphi = \varphi_0 + r_0,\\
&P = a\cos\gamma_0 + b\sin\gamma_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0 \sin(r_0 t + \varphi_0),\\
&Q = a\sin\gamma_0 - b\cos\gamma_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0 \cos(r_0 t + \varphi_0),\\
&a = P_0 - K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0 \sin\varphi_0,\\
&b = -Q_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0 \cos\varphi_0,\\
&\gamma_0 = n_0 t,\ n_0 = (C - A)A^{-1}r_0,\ r_0 \neq 0,\ |n_0 / r_0| \leq 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, P_0, Q_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$, а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы прецессионных колебаний. Пользуясь соотношениями (3),(4), перейдем в системе (1) от переменных $p, q, r, \psi, \theta, \varphi$ к новым переменным $a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, где $\alpha = \gamma + \varphi,\ r = r_0 + \varepsilon\delta$. После преобразований получим систему семи уравнений вида:

$$\begin{aligned}
\dot{a} = {} & \varepsilon A^{-1}(M_1^0 \cos\gamma + M_2^0 \sin\gamma) - \varepsilon K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b -\\
& - K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) - \varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\tau} -\\
& - \varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\sin\alpha\frac{\partial K(\tau,\theta)}{\partial\psi}(a\cos\alpha - b\sin\alpha + K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta) +\\
& + \varepsilon^2 K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b - 2K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) +\\
& + \varepsilon^2 C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\sin\alpha\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\tau} +\\
& + \varepsilon^2 C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\alpha\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\psi}(a\cos\alpha - b\sin\alpha + K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta) +
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon^2 K(\tau,\psi)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha,$$

$$\dot b=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma-M_2^0\cos\gamma)+\varepsilon K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta\,(a+$$

$$+K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\tau}+$$

$$+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}\cos\alpha\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\psi}(a\cos\alpha-b\sin\alpha+K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta)-$$

$$-\varepsilon^2 K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta\,(a+2K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-$$

$$-\varepsilon^2 C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\cos\alpha\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\tau}- \qquad (5)$$

$$-\varepsilon^2 C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\alpha\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\psi}(a\cos\alpha-b\sin\alpha+K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta)$$

$$-\varepsilon^2 K(\tau,\psi)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha,$$

$$\dot\delta=\varepsilon C^{-1}M_3^0,$$

$$\dot\psi=\varepsilon\,\mathrm{cosec}\,\theta\,(a\sin\alpha-b\cos\alpha)+\varepsilon K(\tau,\psi)C^{-1}r^{-1}-\varepsilon^2 K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta,$$

$$\dot\theta=\varepsilon\,(a\cos\alpha+b\sin\alpha),$$

$$\dot\alpha=CA^{-1}r_0+\varepsilon CA^{-1}\delta-\varepsilon ctg\theta\,(a\sin\alpha-b\cos\alpha)-$$

$$-\varepsilon K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta+\varepsilon^2 K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta,$$

$$\dot\gamma=n_0+\varepsilon(C-A)A^{-1}\delta,$$

$$M_i^0(a,b,\delta,\psi,\theta,\alpha,\gamma)=M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi),\quad (i=1,2,3).$$

Рассмотрим полученную систему с точки зрения применения метода усреднения [1,2]. Система (5) содержит медленные переменные $a, b, r, \psi, \varphi, \theta$ и быстрые переменные – фазы α, γ с постоянными частотами $CA^{-1}r$ и $(C-A)A^{-1}r$ соответственно. Проекции M_i^0 возмущающего момента являются периодическими функциями α, γ с периодом 2π.

В работах [3,4] исследованы движения твердого тела при предположениях (2), когда восстанавливающий момент постоянен $k=const$ или $k=k(\theta)$, а также случай зависимости восстанавливающего момента от медленного времени $\tau=\varepsilon t, t\in(0,\varepsilon^{-1}]$ и угла нутации одновременно $k=k(\tau,\theta)$. В данной работе рассматривается случай зависимости восстанавливающего момента от медленного времени и угла прецессии $k=k(\tau,\psi)$. Зависимость восстанавливающего момента от

τ и ψ приводит к появлению в системе (5), в первых двух уравнениях, слагаемых содержащих частные производные $\dfrac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial \tau}$ и $\dfrac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial \psi}$.

Рассмотрим возмущенное движение твердого тела в случае Лагранжа под действием возмущающего момента, постоянного в связанных осях:

$$M_1 = M_2 = M_3 = const,$$

и восстанавливающего момента конкретного вида:

$$k(\tau,\psi) = k(\tau)\sin\psi = \varepsilon K(\tau)\sin\psi,$$

После ряда преобразований решение усреднённой системы уравнений первого приближения для медленных переменных примет вид:

$$\begin{aligned}
&\theta^{(1)} = \theta_0, \quad \delta^{(1)}(\tau) = C^{-1}M_3^0\tau,\\
&\mathrm{tg}\frac{\psi^{(1)}(\tau)}{2} = \mathrm{tg}\frac{\psi_0}{2}\exp F_1(\tau),\\
&a^{(1)}(\tau) = \exp(\tfrac{1}{2}F(\tau))\cdot(a_0+b_0)^{1/2}\cdot\cos(G+\beta),\\
&b^{(1)}(\tau) = \exp(\tfrac{1}{2}F(\tau))\cdot(a_0+b_0)^{1/2}\cdot\sin(G+\beta),\\
&F(\tau) = -C^{-1}r_0^{-1}\int_0^\tau K(\tau')\frac{1-tg^2\dfrac{\psi_0}{2}\exp 2F_1(\tau')}{1+tg^2\dfrac{\psi_0}{2}\exp 2F_1(\tau')}d\tau',\\
&F_1(\tau) = C^{-1}r_0^{-1}\int_0^\tau K(\tau')d\tau', \quad tg\,\beta = \frac{b_0}{a_0},\\
&G(\tau) = C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0\int_0^\tau K(\tau')\sin\psi^{(1)}(\tau')d\tau',\\
&\sin\psi^{(1)}(\tau) = \frac{2tg\dfrac{\psi_0}{2}\exp F_1(\tau)}{1+tg^2\dfrac{\psi_0}{2}\exp 2F_1(\tau)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Угол прецессии 2π-периодическая переменная, для которой выполняется соотношение $\mathrm{tg}\dfrac{\psi}{2} \ge \mathrm{tg}\dfrac{\psi_0}{2}$. Медленные переменные a,b
(5)
являются произведением осциллирующего сомножителя с частотой,

обусловленной видом восстанавливающего момента и экспоненциального сомножителя.

Определим эволюцию углов прецессии и нутации во втором приближении:

$$\psi_\varepsilon^\vee(t) = 2arctg\left[\operatorname{tg}\frac{\psi_0}{2}\exp F_1(\varepsilon t)\right] + \varepsilon e^{-F(\varepsilon t)}\int_0^{\varepsilon t} g(\tau)e^{F(\tau)}d\tau + S_1,$$

$$S_1 = \varepsilon\, AC^{-1}r_0^{-1}\operatorname{cosec}\theta \exp(1/2F(\varepsilon t))\left[(a_0\cos(\alpha - G) + b_0\sin(\alpha - G)\right],$$

$$\theta_\varepsilon^\vee(t) = \theta_0 + \varepsilon\, AC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0\int_0^{\varepsilon t}\frac{\partial K(\tau,\psi^{(1)}(\tau))}{\partial\tau}d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}AC^{-3}r_0^{-3}\sin\theta_0\int_0^{\varepsilon t}K^2(\tau)\sin 2\psi^{(1)}d\tau + S_2, \qquad (7)$$

$$S_2 = \varepsilon\, AC^{-1}r_0^{-1}\exp(1/2F(\varepsilon t))\left[(a_0\sin(\alpha - G) - b_0\cos(\alpha - G)\right],$$

$$\alpha(t) = \varphi_0 + CA^{-1}r_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^{-1}M_3^0 t^2 - \varepsilon\, C^{-1}r_0\cos\theta\int_0^t K(\varepsilon t')\sin\psi^{(1)}(\varepsilon t')dt'$$

$$g(\tau) = AC^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0 K^2(\tau)\sin^2\psi^{(1)} - C^{-2}r_0^{-2}K(\tau)\sin\psi^{(1)}M_3^0\tau +$$

$$+\frac{1}{4}AC^{-3}r_0^{-3}K^2(\tau)\sin 2\psi^{(1)}.$$

Вывод. Зависимость восстанавливающего момента от медленного времени и угла прецессии привела к усложнению приближенных выражений для угла прецессии и нутации. Полученные второе и третье слагаемые $\psi_\varepsilon^\vee(t)$ дополняют известное из приближенной теории гироскопов выражения для угловой скорости прецессии.

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974 – 503с.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971 – 507с.
3. Кушпиль Т. А., Тимошенко И. А., Лещенко Д. Д. Некоторые задачи эволюции вращений твёрдого тела под действием возмущающих моментов// Механика твердого тела (Донецк). – 2000. – Вып. 30. – С.119–125.
4. Акуленко Л. Д., Козаченко Т. А., Лещенко Д. Д. Возмущенные вращения твёрдого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента // Механика твердого тела (Донецк). – 2002 – Вып. 32. – С. 77–84.