

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ  
ПРОДОЛЬНО - ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ**

Дорофеев В.С., Карпюк В.М., Артюшкина К.И., Замани Неда,  
Ракитина О.А., Свидовая А.С. (*Одесская государственная академия  
строительства и архитектуры, г.Одесса, Украина*)

Приводятся основные положения деформационной модели прогноза напряженно-деформированного состояния железобетонных балок при продольно-поперечном изгибе с использованием реальных диаграмм состояния бетона и арматуры.

**Анализ публикаций. Постановка проблемы.** В настоящее время на Украине расчет ЖБК по I и II группам предельных состояний ведется отдельно, что противоречит истинному характеру их работы. Поэтому существует реальная необходимость поднять на качественно новый уровень методику их расчета. Существующие методы расчета железобетонных элементов при действии изгибающих моментов, продольных и поперечных сил, можно разделить на две основные группы: методы, основанные на рассмотрении напряженно- деформированного состояния сечения [1,2,3,4] и методы, не использующие деформационные зависимости. К первой группе, обычно, относят методы расчета элементов по нормальным сечениям, содержащиеся в нормах проектирования большинства развитых стран, в том числе в нормах ЕКБ-ФИП, Еврокоде-2. Эти методы основаны на расчетных моделях, построенных на единых принципах, главными из которых являются гипотеза плоских сечений и диаграммы деформирования материалов. Такой подход позволяет с единых позиций вести расчет по прочности, образованию и раскрытию трещин, а также по деформациям. Характерными представителями второй группы являются методы расчета действующих на Украине норм [5]. Они согласуются с экспериментами, но не имеют общей основы в расчетных по различным видам предельных состояний. Эти нормы насыщены многочисленными эмпирическими соотношениями, в результате чего они во многом потеряли ясный физический смысл. При этом заметим, что в действующих нормах [5] нет конкретных рекомендаций по расчету железобетонных элементов, испытывающих продольно-поперечный изгиб.



В России с 2004 года взамен устаревших норм [5] ввели в действие два свода правил по проектированию и строительству железобетонных конструкций без предварительного напряжения [6] и с предварительным напряжением [7] арматуры. Актуальность работы подтверждается тем, что в настоящее время в НИИСКе Минрегионстроя Украины с участием ведущих ВУЗов завершается подготовка новых государственных строительных норм Украины «Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. ДБН В.2.6....200...», в основу которых положен деформационный метод расчета обычных и преднапряженных ЖБК.

**Задачи исследования.** Целью данной работы является разработка удобного для практического использования варианта слоистой деформационной модели напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов, испытывающих продольно-поперечный изгиб.

**Изложение основного материала.** Пользуясь рекомендациями [8,9] принимаем деформационную модель балки (рис.1) в дискретном виде: делим ее на “ $i$ ” – участков (например, кратно шагу поперечной арматуры, т.е.  $h_0/2$ ) по длине и  $j$ - слоев (например, по 1 см) по высоте сечений. Предполагаем, что на образовавшихся таким образом участках напряженно- деформированное состояние одинаково.

Арматуру растянутой и сжатой зон балки “привязываем” к граням сечения на уровне их центров тяжести величинами защитных слоев  $a$  и  $a'$ . В основу моделирования напряженно- деформированного состояния балки, испытывающей продольно- поперечный изгиб, положены традиционные для деформационной модели положения.

Вначале по торцам к балке прикладывается продольная сжимающая сила  $N$  с заданным эксцентриситетом, а затем - две симметрично расположенные сосредоточенные силы  $F$  на расстоянии “ $c$ ” от опор (рис. 4). Все характеристики НДС балки определяются итерационным методом. Выражением, используемым для описания диаграммы  $\sigma_b-\varepsilon_b$  (рис. 2), является соотношение, предложенное ЕКБ-ФИП:

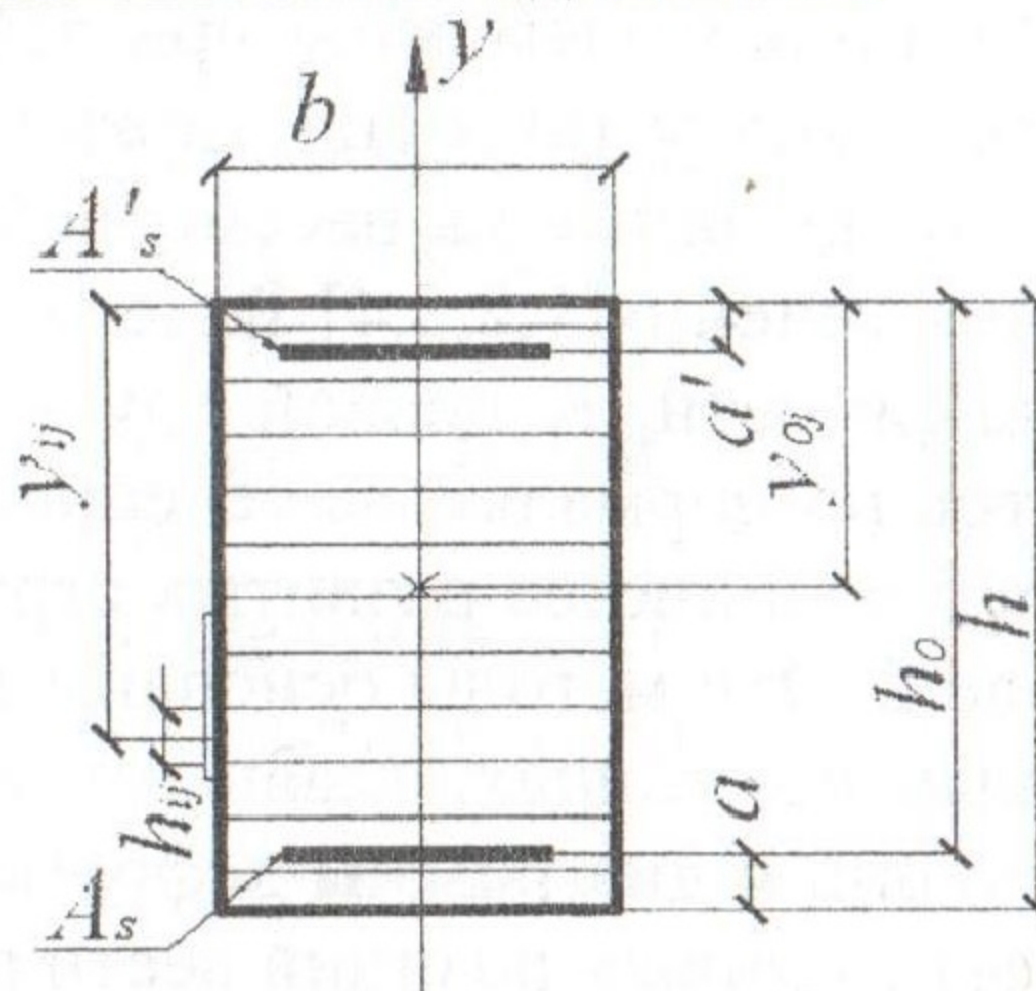


Рис. 1. Расчетное поперечное сечение балки



$$\frac{\sigma_b(t)}{R_b} = \frac{k \times \eta - \eta^2}{1 + (k-2) \times \eta}, \quad (1)$$

где  $\eta = \frac{\varepsilon_b(t)}{\varepsilon_{bu}}$  - величина, которая характеризует интенсивность увеличения деформаций в бетоне  $\varepsilon_b(t)$ ,  $\varepsilon_{bu}$  - величина деформаций, которая отвечает наибольшему значению напряжений сжатия  $R_b$  (призменной прочности);  $k$  - коэффициент, который учитывает влияние неупругой составляющей деформаций. ЕКБ-ФИП рекомендует определять призменную прочность бетона в любой момент времени ( $t$ ) со дня бетонирования по известной формуле:

$$R_b = \frac{R_{b28} \times \lg t}{\lg 28} \quad (2)$$

где  $R_{b28}$  - призменная прочность бетона в 28-суточном возрасте.

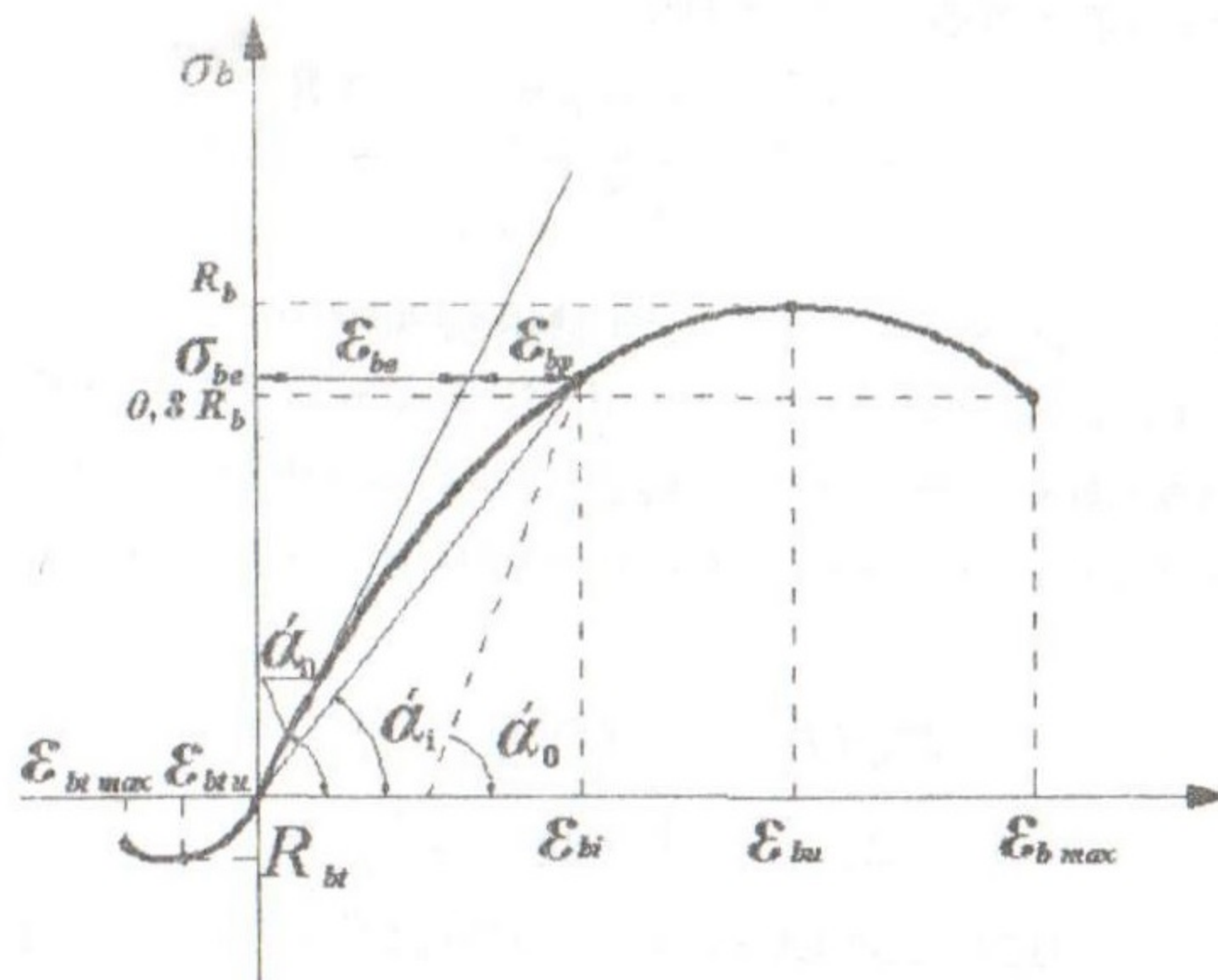


Рис. 2. Диаграмма  $\sigma$ - $\varepsilon$  бетона (ЕКБ-ФИП)

Для определения значения  $\varepsilon_{bu}$  была принята формула:

$$\varepsilon_{bu} = [3,6R_b - 3\left(\frac{R_b}{36}\right)^5 + 51]10^{-5} \quad (3)$$

Для уровня напряжений  $\sigma_b = 0,3R_b$  деформация бетона составляет:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_{b0}} = \frac{0,3 \times R_b}{E_{b0}}, \text{ тогда } \eta_0 = \frac{0,3 \times R_b}{\varepsilon_{bu} \times E_{b0}} \quad (4)$$

После подстановки в (1) вместо  $\sigma_b/R_b = 0,3$  и выражения (4) получим:



$$0.3 = \frac{k \times \eta_0 - \eta_0^2}{1 + (k - 2)\eta_0} \quad (5)$$

После преобразования (5) выражение для коэффициента упругопластичности бетона  $k$  на восходящей ветви диаграммы имеет вид:

$$k = \frac{\eta_0^2 + 0.6 \times \eta_0 + 0.3}{0.7 \times \eta_0} \quad (6)$$

Для описания нисходящей ветви диаграммы сжатия бетона вводится еще одна контрольная точка, отвечающая конечному значению деформаций бетона  $\varepsilon_{bmax}$ :

$$\varepsilon_{b,max} = \frac{R_b \times 10^{-2}}{10 + 2.75 \times R_b} \quad (7)$$

Исходя из условия, что  $\varepsilon_{bmax}$  наблюдаются при напряжениях  $\sigma_b = 0,8R_b$ , коэффициент упругопластичности  $k_1$  на нисходящей ветви диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  бетона приобретает вид:

$$k_1 = \frac{\eta_{01}^2 + 1.6 \times \eta_{01} + 0.8}{0.2 \times \eta_{01}} \quad (8)$$

Для описания диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  при растяжении бетона используем ту же зависимость (1) ЕКБ-ФИП, что и при сжатии. Значения  $\varepsilon_{btu}$ ,  $\varepsilon_{btmax}$  получаем путем умножения  $\varepsilon_{bu}$ ,  $\varepsilon_{bmax}$  на соотношение  $R_{bt}/R_b$ . В конечном виде напряжение растяжения в бетоне определяем с помощью зависимости

$$\frac{\sigma_{bt}(t)}{R_{bt}} = \frac{k \times \eta_t + \eta_t^2}{1 + (k - 2) \times \eta_t} \quad (9)$$

Прочность бетона при растяжении определяется по формуле:

$$R_{bt} = \frac{R_{b28} \times \lg t}{\lg 28} \quad (10)$$

Секущий модуль деформации бетона в любом возрасте и уровне нагружения в точке "i" диаграммы определяется по зависимости:

$$E_{bi}(t) = \frac{\sigma_{bi}(t)}{\varepsilon_{bi}(t)} = \operatorname{tg} \alpha_i \quad (11)$$

Деформации ползучести бетона при длительном действии нагрузки можно учесть путем использования известных зависимостей, предложенных А.Я.Барашиковым, А.Б.Голышевым, В.П.Полищуком, И.В.Руденко [10], И.Е.Прокоповичем и др. Поскольку в исследуемых элементах использовали растянутую и сжатую арматурную сталь с



физическим пределом текучести, то связь между напряжениями и деформациями представим в виде двухлинейной диаграммы (рис. 3).

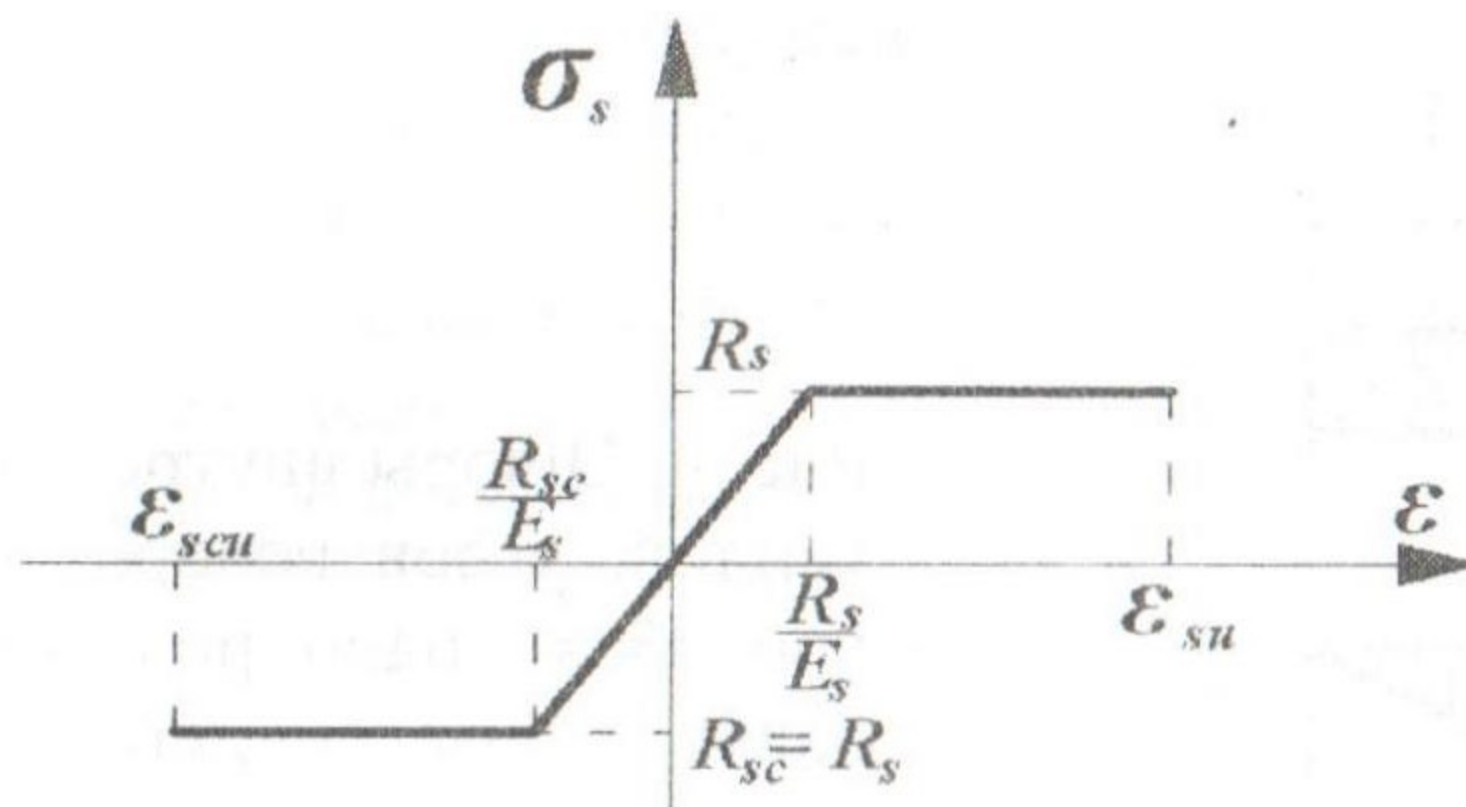


Рис.3. Диаграмма  $\sigma_s$ - $\epsilon_s$  для арматурной стали с физическим пределом текучести.

Для простейшего случая нагружения элемента постоянного сечения двумя поперечными силами  $F$  и продольной силой  $N$  эпюры внутренних усилий, углов поворота и прогибов без учета влияния деформацией сдвига имеют вид, представленный на рис.4. Изгибающий момент по длине элемента является переменной величиной:

$$M(X) = M_F(X) + M_N(X) = M_F(X) + NY_p(X); \quad (12)$$

где:  $M_F(X)$  и  $M_N(X)$  – изгибающие моменты в сечении  $X$ , соответственно, от поперечной нагрузки  $F$  и продольной силы  $N$ . При этом, в начальной стадий работы элемента при отсутствии эксцентриситета ( $e=0$ ) нарушается принцип суперпозиции (независимости действия сил). В таком случае в начале следует приложить часть поперечной нагрузки  $F$ , способной вызвать заметный прогиб элемента, а затем – продольную силу.

Моделирование напряженно-деформированного состояния исследуемых элементов при продольно-поперечном изгибе выполняем в соответствии блок-схемой, представленной на рис. 5, в такой последовательности:

1. Вводится входная (п.2 блок-схемы) информация.

2. Определяем геометрические характеристики опорных и пролетных сечений железобетонных элементов (п.3 блок-схемы) с учетом реальных секущих модулей деформаций на данном этапе

$$(EA)_{redl} = \sum_{j=1}^{j \max} (E_{bij} A_{bij} + E_{si} A_{si} + E'_{si} A'_{si}) \quad (13)$$

$$(ES)_{redl} = \sum_{j=1}^{j \max} (E_{bij} A_{bij} y_{ij} + E_{si} A_{si} y_{si} + E'_{si} A'_{si} y'_{si}) \quad (14)$$



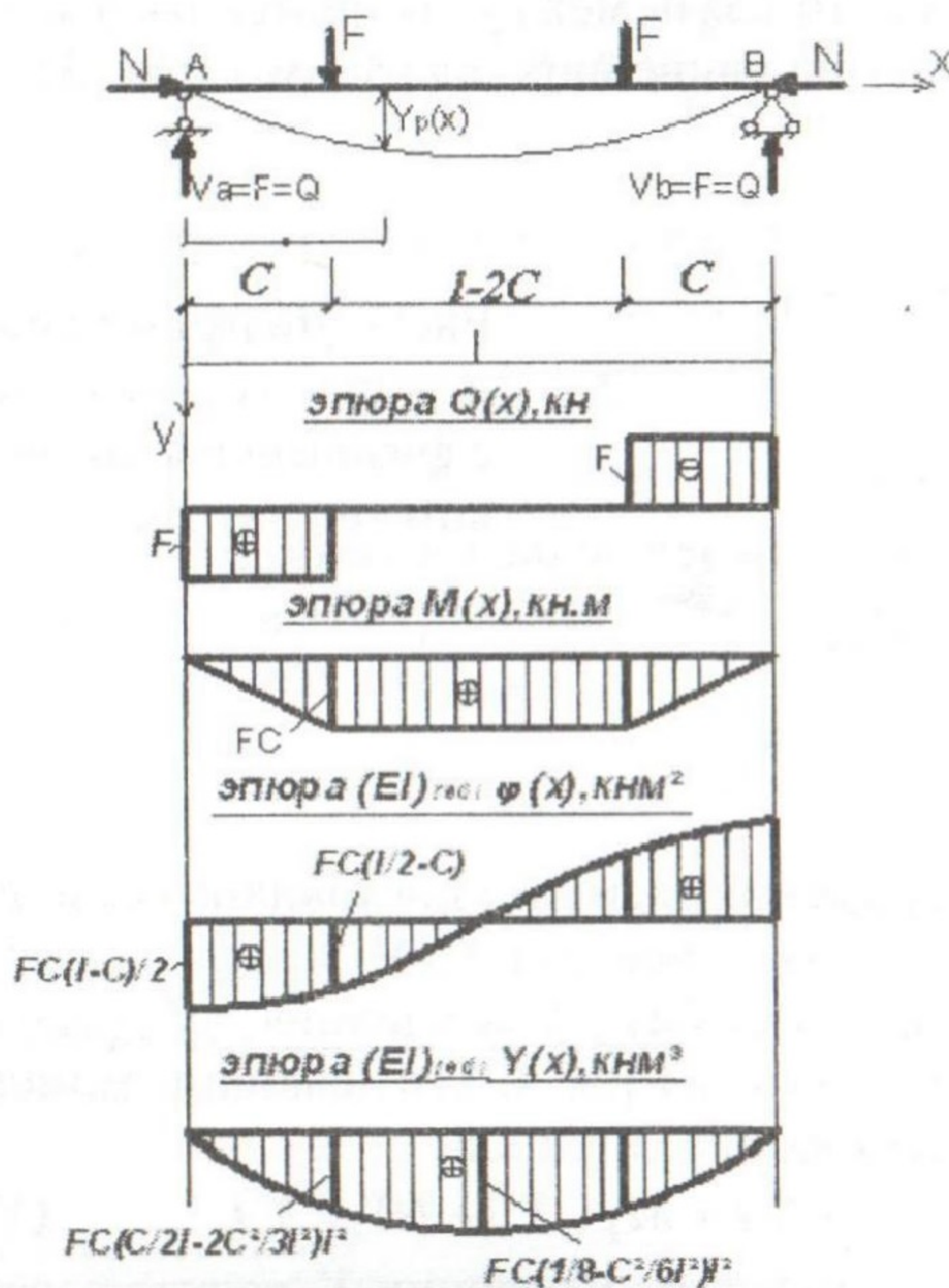


Рис. 4. Эпюры внутренних усилий, углов поворота и прогибов однопролетной балки от действия поперечной нагрузки.

$$y_{oi} = \frac{(ES)_{redi}}{(EA)_{redi}} \quad (15)$$

$$(EI)_{redi} = \sum_{j=1}^{j_{max}} (E_{bij} A_{bij} (y_{oi} - y_{ij})^2 + E_{si} A_{si} (h_0 - y_{oi})^2 + E'_{si} A'_{si} (y_{oi} - a')^2) \quad (16)$$

где:  $E_{bij}$ ,  $E_{si}$ ,  $E'_{si}$  - секущие модули деформаций, соответственно, бетона, растянутой и сжатой арматуры, которые перед нагружением принимаются равными начальным модулям деформаций,  $y_{ij}$  - расстояние от сжатой грани балки до центра тяжести  $i$ -го сечения,  $A_{ij}$  - площадь  $j$ -го слоя  $i$ -го сечения балки.

3. Определяем начальную координату полюса силы  $N$  (п.4 блок-схемы) без учета прогиба рассматриваемого сечения по формуле:

$$y_{p0} = \left[ \frac{h}{2} - y_{oi} \pm (e + e_{0cl}) \right] \quad (17)$$

где:  $e$  - эксцентриситет приложения продольной сжимающей силы  $N$ , взятый со знаком „-“, если он создает разгружающий момент в бал-



ке, т.е.выгиб, и со знаком „+”, если он образует в ней догружающий момент;  $e_{0cl} = \frac{h}{30}$  - случайный эксцентриситет приложения силы  $N$ .

4.Задаем этап нагружения балки продольной сжимающей силой  $N$  с последующим ее увеличением на  $\Delta N = 0,1[N_{adm}]$  (п.5,6 блок-схемы) до заданной или допустимой величины  $[N_{adm}]$ .

5.Определяем деформации бетона и арматуры в рассматриваемых сечениях балки (при необходимости с учетом ползучести и усадки бетона), а также уточняем координату полюса силы  $N$  (п.7блок-схемы):

$$\varepsilon_{bij} = -N/(EA)_{red\ i} \left[ 1 + \frac{y_p (y_{ij} - y_{0i}) (EA)_{red\ i}}{(EI)_{red\ i}} \right] + \frac{M_i (y_{ij} - y_{0i})}{(EI)_{red\ i}}, \quad (18)$$

$$\varepsilon_{si} = -N/(EA)_{red\ i} \left[ 1 + \frac{y_p (h - a_i - y_{0i}) (EA)_{red\ i}}{(EI)_{red\ i}} \right] + \frac{M_i (h - a_i - y_{0i})}{(EI)_{red\ i}}, \quad (19)$$

$$\varepsilon'_{si} = -N/(EA)_{red\ i} \left[ 1 + \frac{y_p (a'_i - y_{0i}) (EA)_{red\ i}}{(EI)_{red\ i}} \right] + \frac{M_i (a'_i - y_{0i})}{(EI)_{red\ i}}, \quad (20)$$

$$y_{pi} = y_{po} + y_{N(x)}, \quad (21)$$

где:  $y_{N(x)}$  - дополнительный прогиб или выгиб  $i$ -го сечения, обусловленный продольной силой  $N$  (или предварительным напряжением арматуры), и определяемый по формуле:

$$y_{N(x)} = [(\varepsilon_{si} - \varepsilon'_{bi}) / \Lambda_{0i}] \cdot \rho_{mNi} \cdot l^2, \quad (22)$$

где:  $\rho_{mNi}$  - коэффициент, учитывающий влияние момента от продольной силы  $N$  (или усилия от предварительного напряжения) на величину обусловленного им прогиба или выгиба и определяемый по длине балки ( $0 \leq x \leq l$ ) по формуле:

$$\rho_{mNi} = \frac{lx - x^2}{2l^2} \quad (23)$$

6.Проверяем условие неперевышения определенными по формулам (18)...(20) деформациями установленных по соответствующим диаграммам  $\sigma$ - $\varepsilon$  (п.8 блок-схемы) предельных величин  $\varepsilon_{btmax}$ ,  $\varepsilon_{b\ max}$  и арматуре  $\varepsilon_{su}$ . Превышение деформаций растяжения  $\varepsilon_{btmax}$  в каком-то из слоев сечения свидетельствует, что модуль деформаций в нем равен нулю и слой выключился из работы в соответствующем сечении элемента. При этом, для уточнения величины разрушающей нагрузка сначала уменьшается до величины предыдущего этапа (п.17 блок-схемы) с последующим увеличением  $e$  на  $\Delta N/2$  (п.18 блок-схемы).







7. Если деформации в бетоне и арматуре не превышают предельно допустимых величин  $\varepsilon_{b\ max}$  и  $\varepsilon_{su}$ , то запоминаем величины деформаций в каждом  $j$ -том слое каждого  $i$ -того сечения (п.10 блок-схемы) и по диаграммам  $\sigma$ - $\varepsilon$  бетона и арматуры определяем величины напряжений, соответственно, в бетоне  $\sigma_{bij}$  и арматуре  $\sigma_{si}$ . Потом выполняем уточнение и коррекцию секущих модулей деформаций бетона и арматуры (п.11 блок-схемы):

$$E_{bij} = \sigma_{bij} / \varepsilon_{bij}, \quad (24)$$

$$E_{si} = \sigma_{si} / \varepsilon_{si}, \quad (25)$$

$$E'_{si} = \sigma'_{si} / \varepsilon'_{si} \quad (26)$$

По уточненным величинам секущих модулей деформаций вычисляем характеристики сечений  $(EA)_{red\ i}$  и  $(EI)_{red\ i}$  (п.12 блок-схемы).

8. По откорректированным геометрическим характеристикам сечений балок уточняем величины деформаций бетона  $\varepsilon_{bij}$  и арматуры  $\varepsilon_{si}$ ,  $\varepsilon'_{si}$ , (п.13 блок-схемы) и сравниваем их с определенными в предыдущем цикле расчета (п.9 блок-схемы). Если их значения близки к заданной точности расчетов, считаем, что на данном этапе нагружения параметры НДС сечений балки установлены (п.14 блок-схемы) и можно переходить к определению прогибов, других параметров работоспособности исследуемых элементов (п.15 блок-схемы).

9. По уточненной авторской инженерной методике определяем величину несущей способности наклонных сечений  $[Q_{ult}]$  исследуемых железобетонных элементов (п.21 блок-схемы).

10. После достижения продольной сжимающей силой заданной или допустимой величины  $[N_{adm}]$ , переходим к изучению изменения напряженно-деформированного состояния в процессе пропорционального нагружения балки симметрично расположенными поперечными силами  $F$  (рис. 4, п.22, 23 блок-схемы) ступенями  $\Delta F \leq 0,1[Q_{ult}]$  до разрушающей на элемент по нормальному или наклонному сечению.

11. Определяем величину изгибающего момента и поперечной силы по длине балки (п.24 блок-схемы):

$$\text{- при } 0 < x \leq c \text{ (см. рис.4) } M_F(x) = Fx, Q(x) = F; \quad (27)$$

$$\text{- при } c < x \leq l-c \text{ } M_F(x) = Fx - F(x-c) = Fc, Q(x) = F - F = 0, \quad (28)$$

$$\text{- при } l-c < x \leq l \text{ } M_F(x) = F(l-x), Q(x) = -F; \quad (29)$$

12. По формулам (18), (20) находим деформации бетона и арматуры в рассматриваемых сечениях балки (при необходимости с учетом ползучести и усадки бетона), а также уточняем координату полюса силы  $[N_{adm}]$  с учетом дополнительного прогиба от поперечной и продольной нагрузки (п.25 блок-схемы).

$$y_{pi} = y_{p0} + y_{tot,i} \quad (30)$$



где:  $y_{bt,i}$  - полный прогиб рассматриваемого сечения балки, определяемый как алгебраическая сумма прогиба, обусловленного деформациями изгиба от поперечной и продольной нагрузки, а также деформациями сдвига:

$$y_{tot,i} = \left( \frac{\varepsilon_{si} - \varepsilon_{bi1}}{h_0} \right) (\rho_{mNi} + \rho_{mMi}) l^2 \rho_{qi}, \quad (31)$$

где  $\rho_{mMi}$  - коэффициент, учитывающий влияние изгибающего момента на прогиб балки в рассматриваемом сечении и определяемый в пределах пролета среза ( $0 < x \leq c$ ) по формуле  $\rho_{mMi} = \frac{x}{2l} - \frac{2x^2}{3l^2}$ , в пролете

$$\left( c < x \leq \frac{l}{2} \right) \rho_{mMi2} = \rho_{mMi1} + \frac{(x-c) \left( \rho_{mM \frac{1}{2}} - \rho_{mMi1} \right)}{\frac{l}{2} - c},$$

где  $\rho_{mM \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{c^2}{6l^2}$  - посередине пролета балки;  $\rho_{qi}$  - коэффициент,

учитывающий влияние деформаций сдвига на прогиб балки и определяемый по допускаемой действующими нормами [5] приближенной

зависимости  $\rho_{qi} = 1 + \frac{\varphi_q}{\rho_{mi}} \left( \frac{h}{l} \right)^2$ , в которой коэффициент  $\varphi_q = 1,5$  при

наличии нормальных и (или) наклонных трещин в относительно коротких ( $\frac{l}{h} \leq 10$ ) свободно опертых балок постоянного по длине сече-

ния. При  $\frac{h}{l} > 10$   $\rho_{qi} = 1$ .

13. Проверяем условие непревышения определенными по формулам (18)...(20) деформациями установленных по соответствующим диаграммам  $\sigma$ - $\varepsilon$  (п. 26 блок-схемы) предельных величин и дальнейший расчет продолжается по ранее описанному алгоритму для продольной силы  $N$  с уточнением нагрузки  $F$ , соответствующей появлению первых нормальных и наклонных трещин, фиксацией прогибов балки на соответствующих этапах ее работы вплоть до разрушения по нормальному или наклонному сечению.

Сопоставление экспериментальных и расчетных значений основных параметров работоспособности (появление нормальных и наклонных трещин, прогибы, разрушающая нагрузка), полученных путем использования предложенного алгоритма и эффективной компьютерной математики «MATLAB», показало удовлетворительную их сходимость и



целесообразность применения данной методики после ее реализации в виде самостоятельной компьютерной программы для железобетонных элементов, испытывающих продольно- поперечный изгиб. Использование диаграммы деформирования бетона А.Н. Бамбуры при сжатии на восходящем и нисходящем участках в виде [12]:

$$\sigma_b = R_b \sum_{k=1}^s a_k \left( \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{bR}} \right)^k, \quad (32)$$

где  $R_b$  - призмная прочность бетона при осевом сжатии,  $a_k$  - коэффициенты полиномиальной зависимости,  $\varepsilon_{bR}$  - максимальные деформации бетона при  $\sigma_b = R_b$

показало хорошую сходимость расчетных и экспериментальных данных.

### *Выводы*

1. Использование деформационного метода позволяет с единых позиций вести расчет по образованию трещин, их раскрытию, деформациям и разрушению железобетонных конструкций.

2. Предложенная слоистая деформационная модель работы сжатого изогнутого стержня в какой-то мере заполняет пробел в действующих нормах расчета и проектирования ЖБК и может быть рекомендована для практического использования при простых режимах нагружения.

### *Литература*

1. Залесов А.С., Чистяков Е.А., Ларичева И.Ю. Деформационная расчетная модель железобетонных элементов при действии изгибающих моментов и продольных сил.- Бетон и железобетон, 1996, №5, С.16-18.
2. Звездов А.И., Залесов А.С., Мухамедиев Т.А., Чистяков Е.А. Расчет прочности железобетонных конструкций при действии изгибающих моментов и продольных сил по новым нормативным документам.- Бетон и железобетон, 2002, №2, с.21-25.



3. Голышев А.Б., Бачинский В.Я., Полищук В.П. и др. Железобетонные конструкции. Том 1.- К., изд-во «Логос», 2001.-417с.
4. Голишев О.Б. Курс лекцій з основ розрахунку будівельних конструкцій і з опору залізобетону. О.Б. Голишев, А.Б. Бамбура.- К.: Логос, 2004.-310 с.
5. Строительные нормы и правила. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования СНиП 2.03.01-84\*. --М.: Стройиздат, 1986,-120с.
6. Свод правил по проектированию и строительству СП52-101-2003. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры.-М: ГУП «НИИЖБ» Госстроя России, 2004.-55 с.
7. Свод правил по проектированию и строительству, СП52-101-2004. Предварительно напряженные железобетонные конструкции-М: ГУП «НИИЖБ» Госстроя России, 2004.-49 с.
8. Бліхарський З.Я., Вашкевич Р.В., Струк Р.Ф. Методика розрахунку залізобетонних конструкцій, відновлених після корозії// Вісник Одеської державної академії будівництва і архітектури. – Одеса.: «Місто майстрів», 2004.-с.41-47.
9. Бліхарський З.Я., Напружено - деформований стан залізобетонних конструкцій в агресивному середовищі при дії навантаження: Дисертація... докт. техн. наук.:05.23.01- Львів, 2005.-357.
10. Голышев А.Б., Полищук В.П., Руденко И.В. Расчет железобетонных стержневых систем с учетом фактора времени.- К.: Будівельник, 1984.-128 с.
11. Бамбура А.М. Експериментальні основи прикладної деформаційної моделі залізобетону : Дисертація докт. техн. наук.-05.23.04-Київ, 2005. -379 с.