

## НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И РАСЧЕТ БАЛОК ПО ДВУМ ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

В.М.Кобринец, к.т.н., профессор, М.М.Бекирова, к.т.н., доцент

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Несущая способность балки является верхней оценкой для внешних сил при расчете балок по предельным состояниям.

В сопротивлении материалов несущая способность определяется формулой

$$M_{i.\bar{n}} = W \cdot R_y. \quad (1)$$

По (1) определяется несущая способность сечения, а необходимо определить силу  $P_{i.\bar{n}}$ , которую может нести балка, вызывающая  $M = M_{i.\bar{n}}$ .

Рассмотрим шарнирно опертую балку загруженную сосредоточенной силой  $P$  (рис.1).

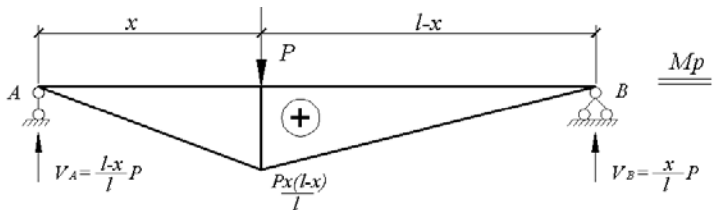


Рис. 1. Схема балки и грузовой эпюра

Максимальный момент под силой приравняем к моменту несущей способности сечения  $M_{i.\bar{n}} = W \cdot R$

$$\frac{Px(l-x)}{l} = W \cdot R. \quad (2)$$

Из (2) получим несущую способность балки по первому предельному состоянию

$$P'_{i.\bar{n}} = \frac{WR \cdot l}{x(l-x)}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что для балки постоянного сечения несущая способность зависит от прочности материала, размеров сечения, пролета и места расположения силы.

Результаты  $P_{i,\bar{n}}^I$  представлены в табл.1 и на рис. 2

Несущая способность балки увеличивается по мере смещения силы  $P$  от середины балки к опорам. Следовательно, и силу можно увеличивать.

При постоянной силе можно уменьшить сечение балки.

$$W(x) = W_0 x \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (4)$$

Здесь  $W_0$  момент инерции при  $x = \frac{l}{2}$ .  $0 \leq x \leq 0,5$ .

Таблица 1. Значения  $P_{i,\bar{n}}^I$  умножить на  $WR$

$x$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\frac{l}{x(l-x)}$	21,05	11,11	6,25	4,76	4,16	4	4,16	4,76	6,25	11,11	21,05

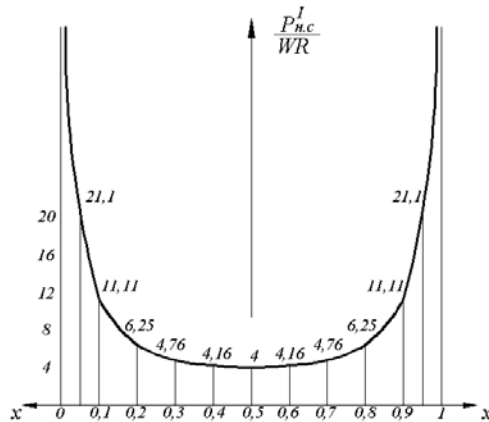


Рис. 2. Несущая способность балки  $P_{i,\bar{n}}^I$

В статически неопределимых конструкциях усилия меньше, а несущая способность больше. Для жестко защемленной балки с силой посередине несущая способность посередине балки и на опорах одинаковая.

$$P_{i,\bar{n}}^I = 8W \cdot R \quad (5)$$

Несущая способность определяется положением силы.

Определение несущей способности по второму предельному состоянию.

Для шарнирно-опертой балки определяется прогибом сосредоточенной силы расположенной в произвольном сечении (рис.3).

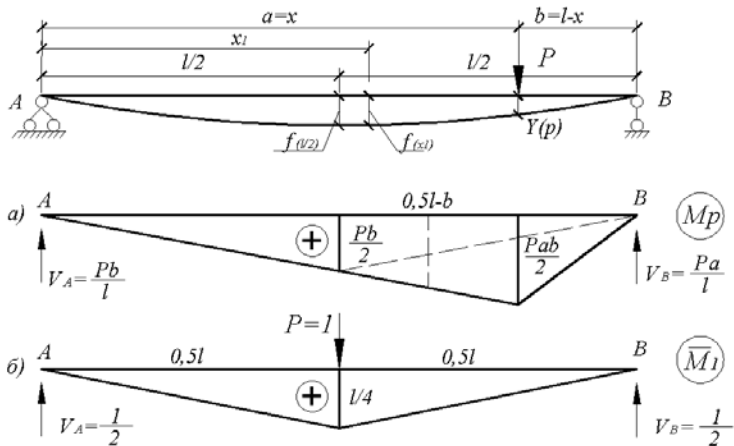


Рис. 3. Деформированная схема балки:  
а) грузовая эпюра; б) единичная эпюра

Прогиб под силой  $P - Y(p)$ . Единичная эпюра  $\bar{M}$  такая, как и  $M_p$ , только  $P = 1$ . Перемножая эпюры получим

$$Y(p) = \frac{Px^2 \cdot (l-x)^2}{3EI \cdot l}. \quad (6)$$

Максимальный прогиб  $Y_{max} = f(x_1)$  вычисляем по С.П. Тимошенко [1], стр. 224.

$$f(x_1) = \frac{P \cdot b \sqrt{(l^2 - b^2)^3}}{15,591EI}. \quad (7)$$

$$x_1 = \sqrt{(l^2 - b^2)3}. \quad (8)$$

Прогиб посередине пролета балки

$$f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{48EI} \left\{ lb^2 + \frac{ab}{l}(l-2b)(l+4b) + 8\frac{ab^3}{l} \right\}. \quad (9)$$

Несущая способность через прогиб по (3)

$$P_{f,\bar{n}}^H = \frac{3EI \cdot [f_p]}{x^2 \cdot (l-x)^2}. \quad (10)$$

Несущая способность через прогиб по (4)

$$P_{i,\bar{n}}^{II} = \frac{15,6EI [f_{max}]}{b\sqrt{(l^2 - b^2)^3}}. \quad (11)$$

Несущая способность  $P_{i,\bar{n}}^{II}$  через прогиб при  $x = \frac{l}{2}$  по (7)

$$P_{i,\bar{n}}^{II} = \frac{48EI \cdot \left[ f\left(\frac{l}{2}\right) \right]}{\left[ lb^2 + \frac{ab}{l}(l-2b)(l+4b) + \frac{8ab^3}{l} \right]}. \quad (12)$$

Нормативный прогиб в балках  $[f]$  задается как  $x = \frac{l}{2}$ .

Определим  $x_1$  по (6) в зависимости от положения силы  $P$ .

$$x_1 = \sqrt{\frac{(l^2 - b^2)}{3}} = \sqrt{\frac{(l^2 - (kl)^2)}{3}} = l\sqrt{\frac{1 - k^2}{3}}.$$

Вычисления приведены в таблице 2.

Таблица 2. Вычисление  $x_1$  от  $b$

$k$	$k^2$	$1 - k^2$	$\sqrt{1 - k^2} / 3$	$x_1$
0,1	0,01	0,99	0,5745	0,5745 $l$
0,2	0,04	0,96	0,5657	0,5657 $l$
0,3	0,09	0,91	0,5508	0,5508 $l$
0,4	0,16	0,84	0,5292	0,5292 $l$
0,5	0,25	0,75	0,5	0,5 $l$

Результаты таблицы 2 известны и они дают основания для вычисления  $P_{i,\bar{n}}^{II}$  по (11).

График показан на рис. 4 и для сравнения построен график  $P_{i,\bar{n}}^{II}$  по (11).

Вычисления  $P_{i,\bar{n}}^{II}$  по (8), таблица 3.

Таблица 3. Вычисление  $P_{i,\bar{n}}^{II}$  при  $x = a$  по (8)

$x$	$x^2$	$(l-x)^2$	$x^2(l-x)^2$	$\frac{3}{x^2(l-x)^2}$	$P_{i,\bar{n}}^{II}$
0,05 $l$	0,0025 $l^2$	0,9025 $l^2$	0,00226 $l^2$	1327,4	$\frac{1327EI [f]}{l^3}$

0,1l	0,01l <sup>2</sup>	0,81l <sup>2</sup>	0,0881l <sup>2</sup>	370	$\frac{370EI[f]}{l^3}$
0,2l	0,04l <sup>2</sup>	0,64l <sup>2</sup>	0,0256l <sup>2</sup>	117,2	$\frac{117,2EI[f]}{l^3}$
0,3l	0,09l <sup>2</sup>	0,49l <sup>2</sup>	0,0441l <sup>2</sup>	68	$\frac{68EI[f]}{l^3}$
0,4l	0,16l <sup>2</sup>	0,36l <sup>2</sup>	0,0576l <sup>2</sup>	52,08	$\frac{52,08EI[f]}{l^3}$
0,5l	0,25l <sup>2</sup>	0,29l <sup>2</sup>	0,0625l <sup>2</sup>	48	$\frac{48EI[f]}{l^3}$

Вычисление  $P''_{i,\bar{n}}$  по (9), таблица 4.

Таблица 4. Вычисление  $P''_{i,\bar{n}}$  при  $x = x_i$

b	$b = k^2l^2$	$l^2(1-k^2)$	$(l^2(1-k^2))^3$	$kl(l^3(1-k^2))^3$	$P''_{i,\bar{n}} = \frac{15,6}{l^3k(1-k^2)^3} EI[f_{max}]$
0,1	0,01l <sup>2</sup>	l <sup>2</sup> · 0,99	$l^3 \cdot \frac{0,9703}{0,985}$	0,0985	$158,4 \frac{EI[f_{max}]}{l^3}$
0,2	0,04l <sup>2</sup>	l <sup>2</sup> · 0,96	$l^3 \cdot \frac{0,8847}{0,9406}$	0,1881	$83 \frac{EI[f_{max}]}{l^3}$
0,3	0,09l <sup>2</sup>	l <sup>2</sup> · 0,91	$l^3 \cdot \frac{0,7536}{0,868}$	0,2604	$60 \frac{EI[f_{max}]}{l^3}$
0,4	0,16l <sup>2</sup>	l <sup>2</sup> · 0,84	$l^3 \cdot \frac{0,5927}{0,77}$	0,308	$50,65 \frac{EI[f_{max}]}{l^3}$
0,5	0,25l <sup>2</sup>	l <sup>2</sup> · 0,75	$l^3 \cdot \frac{0,4219^{1/2}}{0,65}$	0,3248	$48 \frac{EI[f_{max}]}{l^3}$

По формулам (8) и (9) строим графики

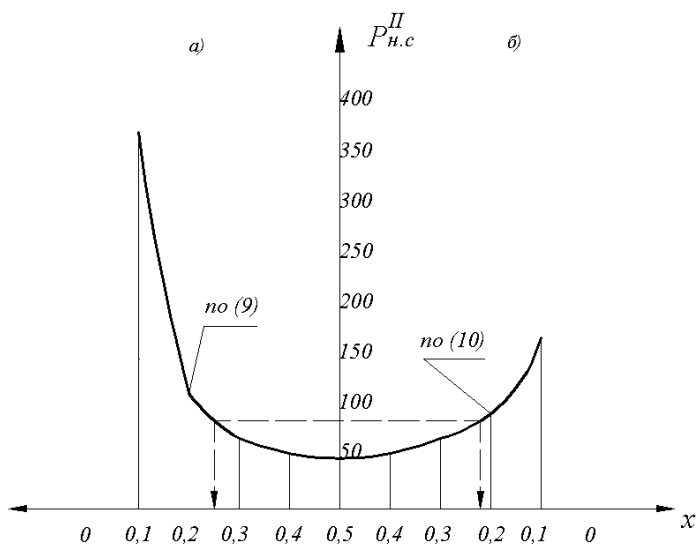


Рис. 4. Изменение несущей способности  $P_{i.\bar{n}}^{II}$  в зависимости от положения силы  $P(x)$ : а) определение  $(p) P_{i.\bar{n}}^{II}$  через прогиб под силой  $f_{(p)}$ ; б) определение  $P_{i.\bar{n}}^{II}$  через  $f_{max}$

Несущая способность  $P_{i.\bar{n}}^{II}(f_{max})$  меньше  $P_{i.\bar{n}}^{II}(f_p)$ , поэтому истощение несущей способности по второму предельному состоянию происходит раньше, чем под силой. Это способность второго предельного состояния.

Нормативный прогиб под силой меньше  $[f_{max}]$ , пока не установлен.

Нормативный прогиб  $[f_{max}]$  можно определить через нормативный прогиб, по  $0,5l$ , который определяется по СНиП.

По графикам а) и б) на рис. 4 можно определить  $x_a$  и  $x_a'$ , это пунктирная линия, тогда несущие способности совпадают.

Несущие способности по первому и второму предельным состояниям могут не совпадать по месту приложения силы.

Если на балку действует сила  $P$  при  $x = \frac{l}{2}$  больше несущей способности при  $x = \frac{l}{2}$ , тогда силу  $P$  необходимо разложить на две. Передать силу через второстепенную вышележащую балку, если

позволяет строительная высота. Несущая способность балки при этом будет больше.

Расчет балок одновременно по двум предельным состояниям, это синтез расчета по двум предельным состояниям.

Основные положения расчета.

Балка под нагрузкой прогибается и деформируется. Если изогнутую ось балки вращать относительно первоначального прямолинейного положения оси балки, получим поверхность положительной Гауссовой кривизны, изображенную на рис. 6.

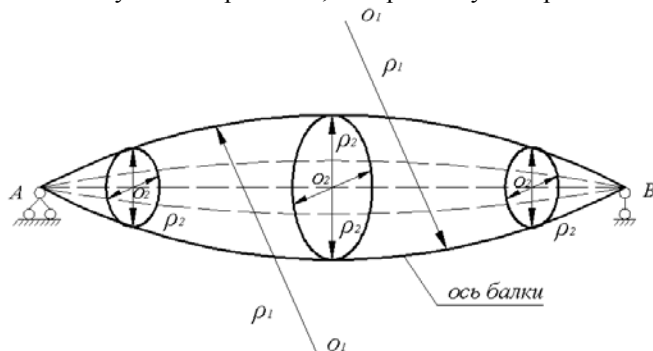


Рис. 6. Поверхность вращения балки

В сопромате [2] при выводе формулы нормальных напряжений получена промежуточная формула

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M}{EI}. \quad (13)$$

Следовательно, кривизна  $Y''(x)$  и радиус  $\rho_1$  связаны с моментом и с первым предельным состоянием. Радиус  $\rho_2$  это прогиб, он ограничен нормативными требованиями, следовательно, он связан со вторым предельным состоянием. Подставляя в Гауссову кривизну для поверхности вращения, получим формулу синтеза двух предельных состояний.

$$K_A = \rho_1 \cdot \rho_2. \quad (14)$$

Определим  $K_A$  при действии на балку сосредоточенной силы  $P$  приложенной в середине балки, рис. 7.

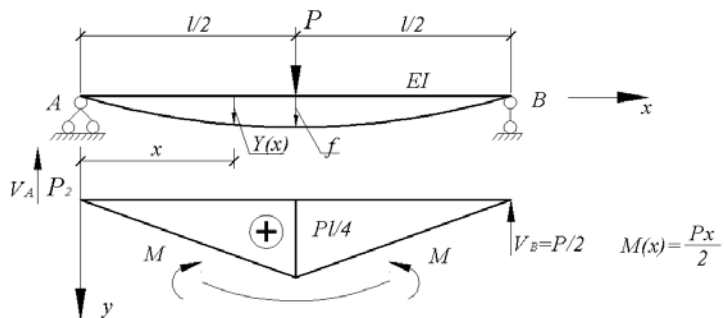
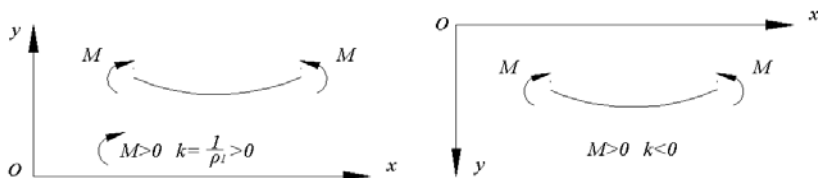


Рис. 7. Схема балки с реакциями и моментами

Определение знака кривизны.



Определение  $\rho_1$  по (13)

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{M}{EI} = \frac{\rho x}{2EI}, \quad \rho_1 = \frac{2EI}{\rho x} \quad (15)$$

Определение радиуса  $\rho_2$ .

Уравнение  $Y''(x) = -\frac{\rho x}{2EI}$  интегрируем два раза.

$$Y'(x) = -\frac{\rho x}{4EI} + C_1; \quad Y(x) = -\frac{\rho x^3}{12EI} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (16)$$

Определение произвольных постоянных

$$\text{При } x = \frac{l}{2}, \quad Y'\left(\frac{l}{2}\right) = \varphi = 0.$$

$$-\frac{Pl^2}{16EI} + C_1 = 0; \quad C_1 = \frac{Pl^2}{16EI}. \quad (17)$$

$$Y(x) = \frac{-Px^3}{12EI} + \frac{Pl^2}{16EI}. \quad (18)$$

Окончательно уравнение упругой линии



$$Y(x) = \frac{Px}{4EI} \left( \frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3} \right) = \frac{Px}{48EI} (3l^2 - 4x^2). \quad (19)$$

$$\rho_2 \left( x = \frac{l}{2} \right) = f = \frac{Pl^3}{48EI}. \quad (20)$$

Гауссова характеристика

$$K_{\bar{A}} = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{2EI}{Px} \cdot \frac{Px(3l^2 - 4x^2)}{48EI}. \quad K_{\bar{A}} = \frac{3l^2 - 4x^2}{24}. \quad (21)$$

При  $x = \frac{l}{2}$

$$K_{\bar{A}}(P) = \frac{l^2}{12}. \quad (22)$$

Эту характеристику будем называть инвариантом, так как она не содержит силы и параметры балки. По (22)  $K_{\bar{A}}(P)$  можно определить даже для  $l = 0$ . Но сначала необходимо обратиться к формуле (21) и раскрыть неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ , а потом делать вычисления.

Делать подобные вычисления не нужно, так как при  $x \neq \frac{l}{2}$  максимальный прогиб будет не под силой.

Определим Гауссов балочный инвариант при действии на балку равномерно распределенной нагрузки.

$$\text{Момент и прогиб при } x = \frac{l}{2}. \quad M = \frac{ql^2}{8}, \quad f = \frac{5ql^4}{384EI}.$$

$$\text{Радиусы: } \rho_1 = \frac{8EI}{ql^2}; \quad \rho_2 = f = \frac{5ql^2}{384EI}.$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{8EI}{ql^2} \cdot \frac{5ql^2}{384EI}; \quad K_{\bar{A}}(q) = \frac{l}{9,6}. \quad (23)$$

Гауссов балочный инвариант при чистом изгибе, когда балка загружена моментами  $M$  на опорах.

$$\text{Момент и прогиб } M, \quad f = \frac{Ml^2}{8}.$$

$$\rho_1 = \frac{EI}{M}, \quad \rho_2 = \frac{Ml^2}{8EI}, \quad K_{\bar{A}}(M) = \frac{l^2}{8}. \quad (24)$$

Балочные Гауссовы инварианты характеризуют н.д.с. среднего сечения балки и в определенной степени полноту эпюры.

При чистом изгибе эпюра моментов полностью и равномерно покрывает все пространство между опорами.

$K_{\bar{A}}(M)$  в 1,5 больше чем  $K_{\bar{A}}(P)$ . Это относительный показатель, потому что площади эпюр могут быть самыми разными.

### Пример расчета

Расчет балок настила  $l = 9\text{ м}$ . Нормативная полезная равномерно распределенная нагрузка на площадке  $E_0^n = 18\text{ кПа}$ ; коэффициент надежности по нагрузке  $\gamma_{fp} = 1,2$ . Материал – сталь марки ВСтЗпсб – 1. Предельные относительные прогибы для балок настила приняты -  $1/n_0 = 1/250$  [1; с.43]

Расчет балки настила. Расчетная погонная нагрузка на балку

$$q = E_0^n \cdot \gamma_{fp} \cdot a + g_d^n \cdot \gamma_{fp} \cdot a + g_{bg}^n \cdot \gamma_{fg} =$$

$$= 18000 \cdot 1,2 \cdot 0,75 + 670 \cdot 1,05 \cdot 0,75 + 230 \cdot 1,05 = 17000 \text{ Н/м} = 17 \text{ кПа}$$

где  $g_d^n$  - собственный вес настила;  $g_{bg}^n$  - собственный вес 1м балки, принятый ориентировочно 230Н/м (обычно предварительно назначают 300-500Н/м<sup>2</sup>),  $\gamma_{fg} = 1,05$  – коэффициент надежности по нагрузке для собственного веса металлоконструкций.

Максимальный изгибающий момент

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{17 \cdot 9^2}{8} = 172 \text{ кН·м}$$

Требуемый момент сопротивления сечения балки по формуле, из стали марки ВСтЗкп2–1 по ТУ 14-1/ 302-3 – 80

$$W = \frac{M}{c_1 \cdot R_y \cdot \gamma_c} = \frac{17200000}{1,1 \cdot 230 \cdot (100)} = 680 \text{ см}^3,$$

где  $c_1 = 1,1$ ;  $R_y = 230 \text{ МПа}$ ;  $\gamma_c = 1$

По сортаменту принимаем двутавр №36, имеющий  $W_x = 743 \text{ см}^3$  и массу 1м – 48,6кг. Проверяем минимальную высоту балки из условия жесткости по формуле:

$$h_{min} = \left( \frac{l \cdot n_0}{4800} \right) \cdot \left( \frac{1}{n_g} \right) = \frac{900 \cdot 250}{4800} \cdot 1,2 = 39,06 \text{ см},$$

т.е. больше 36см. Условие не удовлетворяется. По сортаменту принимаем двутавр № 40, имеющий  $W_x = 953 \text{ см}^3$  и массу 1м – 57кг.

Расчетное напряжение в балке при

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{17,06 \cdot 9^2}{8} = 172,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

и

$$q = D_0^n \cdot \gamma_{fp} \cdot a + g_a^n \cdot \gamma_{fg} \cdot a + g_{bg}^n \cdot \gamma_{fg} =$$

$$= 18000 \cdot 1,2 \cdot 0,75 + 67 \cdot 1,05 \cdot 0,75 + 57 \cdot 1,05 = 1631,2 \text{ кН/м} = 16312 \text{ Н/м}$$

составит

$$\sigma = \frac{M}{1,1 \cdot W_x} = \frac{17270000}{1,1 \cdot 953} = 16407 \text{ Н/см}^2 < R_y \gamma_c = 23000 \text{ Н/см}^2 = 230 \text{ МПа}$$

Фактический относительный прогиб балки будет

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^3}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{140,59 \cdot 900^3}{20,6 \cdot 10^6 \cdot 19062} = \frac{1}{281} < \frac{1}{250},$$

где

$$q = 1800 \cdot 0,75 + 670 \cdot 0,7 + 57 = 14059 \text{ Н/м} = 140,59 \text{ кН/м};$$

$$I_x = 20,6 \cdot 10^6 \text{ м}^4; \quad I_x = 19062 \text{ см}^4$$

$$\rho_1 = \frac{4EI}{ql} \quad \rho_2 = \frac{q^H l^3}{48EI}$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{h}{2} = \frac{4EI \cdot q^H l^3}{k \gamma_{fp} \cdot q^H l \cdot 48EI} = \frac{230 \cdot 250 \cdot 900}{2,06 \cdot 10^5 \cdot 9,6 \cdot 1,1 \cdot 1,2} = 19,82 \text{ см}$$

$$h = 39,64 \text{ см}$$

Расхождение:

$$\frac{39,64 - 39,06}{39,06} \cdot 100\% = 1,485\%$$

### Выводы

1. Несущая способность балки по первому предельному состоянию зависит от несущей способности сечения балки, момента под силой и где она расположена.

2. Минимальная несущая способность балки будет, когда сила  $P$  находится посередине.

3. При движении силы слева направо от опоры к середине балки несущая способность уменьшается. Если двигать силу дальше от середины балки к правой опоре несущая способность увеличивается. Тоже будет и в противоположном направлении, что имеет место в линиях влияния.

4. Если силу можно не фиксировать в определенном месте, тогда ее несущую способность можно отрегулировать.

5. Несущая способность по второму предельному состоянию определяется аналогично. Особенность есть – это максимальный прогиб, который не совпадает с силой. Через этот прогиб и выполняется поверочный расчет по двум предельным состояниям.

6. Инварианты несут весьма скудную информацию, так как она сократилась при вычислении  $K_{\bar{A}}$  через радиусы.

7.  $K_{\bar{A}}$  можно получить если прогиб разделить на  $M_{max} / EI$ .

8. Примеры расчета балок по двум предельным состояниям показали хорошее совпадение с расчетами по сопротивлению материалов.

9. Методы расчета сопротивления материалов балок на прочность и проверка на прогиб дают вполне достоверные результаты. Но чтобы еще раз убедиться в этом, достаточно выполнить один пример расчета по  $K_{\bar{A}}$ . И он приведен в этой статье.

10.  $K_{\bar{A}}$  могут найти применение при оптимальном проектировании.

11. При чтении курса сопротивления материалов для студентов материал по  $K_{\bar{A}}$  может быть полезным.

### **Summary**

There were investigated carrying capacity of beams in the first and second limit state and results were used for calculating the beam simultaneously on two limiting conditions.

### *Литература*

1. С.П. Тимошенко, Д.Ж. Гере. Механика материалов. – М.: Изд-во «МИР», 1976.-696с.  
Г.Е. Шилов. Математический анализ. – М.: Изд-во «Наука», 1970.-352с.