

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЖЕСТКОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ

Назаренко О.А., к.ф.-м.н., доцент,
Стехун А.А.,

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
angela_stehun@mail.ru

Аннотация. Разработан подход к исследованию стационарных задач дифракции волн на сферических дефектах, основанный на применении метода разрывных решений и метода обобщенных интегральных преобразований. Построены разрывные решения волнового и трехмерных уравнений линейной теории упругости в сферической системе координат. Решены задачи дифракции волны кручения на жестких неподвижных (подвижных) сферических телах оболочечного типа. Были численно решены интегро-дифференциальные уравнения методом редукции, что позволило вычислить реактивный крутящий момент для сферического дефекта. Исследовались зависимости момента кручения оболочечного включения от частоты облучаемых его волн, а также угловые атаки волнового удара.

Ключевые слова: волновое уравнение, теория упругости, разрывное решение, скачек, напряжение, стационарная дифракция, реактивный момент волны кручения, сферические координаты.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ЖОРСТКОГО СФЕРИЧНОГО СЕГМЕНТУ В ПРУЖНОЮ СЕРЕДОВИЩІ ПІД ДІЄЮ ХВИЛІ КРУЧЕННЯ

Назаренко О.А., к.ф.-м.н., доцент,
Стехун А.О.,

Одеська державна академія будівництва і архітектури
angela_stehun@mail.ru

Анотація. Розроблено підхід до дослідження стаціонарних задач дифракції хвиль на сферичних дефектах, заснований на застосуванні методу розривних розв'язків і методу узагальнених інтегральних перетворень. Побудовано розривні розв'язки хвильового і тривимірних рівнянь лінійної теорії пружності в сферичній системі координат. Вирішені завдання дифракції хвилі кручення на жорстких нерухомих (рухливих) сферичних тілах оболонкового типу. Були чисельно вирішені інтегро-диференціальні рівняння методом редукції, що дозволило обчислити реактивний крутний момент для сферичного дефекту. Досліджувалися залежності моменту крутіння оболонкового включення від частоти опромінюються його хвиль, а також кутові атаки хвильового удару.

Ключові слова: хвильове рівняння, теорія пружності, розривний розв'язок, стрибок, напруження, стаціонарна дифракція, реактивний момент хвиль скручування, сферичні координати.

INVESTIGATION OF HARD SPHERICAL SEGMENTS BEHAVIOR IN AN ELASTIC MEDIUM UNDER WAVES TWISTING

Nazarenko O.A., PhD, Assistant Professor,
Stekhun A.A.,

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
angela_stehun@mail.ru

Abstract. The point, connected with the use of shell structures, concerning study of non-deformed shells interaction with surrounding elastic medium is stripped from the general range of problems in this article. An approach to the study of stationary wave diffraction problems on spherical defects, based on the method of discontinuous solutions and the method of generalized integral transforms was developed in this paper. Discrete solutions of the wave equation and the three-dimensional equations of the elasticity linear theory in a spherical coordinate system are constructed. The problems of torsion wave diffraction on the immobility (mobility) spherical bodies of shell type are solved. Integral-differential equations by the reduction method were solved numerically, which allowed calculating the reaction torque for a spherical defect. The dependence of torque shell switching frequency waves irradiated it, as well as the angle of attack of the wave impact was investigated. These results allow determining the reactive torque twisting, which should be attached to the inclusion to be fixed, the oscillation amplitude of the movable switching and thoroughly explore the distant zone in an elastic medium.

Keywords: the wave equation, elasticity theory, the discrete solutions, voltage jump, stationary diffraction, reactive torque wave, the spherical coordinate system.

Введение. В настоящее время много важных узлов, деталей и целых агрегатов, которые входят в состав современного оборудования, сооружений, работают или в постоянно действующих или в резко нестационарных режимах. Тонкостенные конструкции оболочечного типа составляют широкий класс механического оборудования современного транспорта, ракетной техники, и, конечно, строительства. В условиях эксплуатации, при интенсивных нагрузках различной природы, возникают большие напряжения. Исследование взаимодействия недеформированных оболочек с окружающей упругой средой имеет практическую ценность, обусловленную повышением ударпрочности судов относительно подводных и воздушных взрывов, улучшением методов и способов подводной акустики, обеспечением сейсмостойкости некоторых гидротехнических сооружений и их составных частей. Таким образом, разработка математических методов решения задач о взаимодействии нестационарных (стационарных) волн с разными объектами, в том числе и оболочечного типа, является актуальной.

Анализ публикаций. В разработку теории и методов задач динамики тел, взаимодействующих с окружающей средой, внесли значительный вклад такие ученые, как Бабайлов Е.П., Бабешко В.А., Бабичев А.И., Буриев О.Т., Векслер М.Д., Гузь А.Н., Гольденвейзер О.Д., Градштейн И.С., Грилицкий Д.В., Горшков О.Г., Ковшов О.М., Кубенко В.Д., Селезнев И.Т., Тарлаковский О.В., Попов Г.Я. и многие другие. Разработанные к настоящему времени методы решения трехмерных граничных задач в механике сплошных сред можно условно разделить на аналитические и численные. Среди аналитических методов можно выделить следующие: метод интегральных уравнений (метод потенциала), метод разделения переменных и различные его модификации (метод Фурье и его обобщения в векторной и скалярной формах, а также приведение к бесконечным системам алгебраических уравнений), метод теории функции комплексной переменной [1-4]. Однако, эти методы в основном применимы для канонических областей (уравнения их граничных поверхностей сводятся к стандартным каноническим формам).

В настоящее время к решению пространственных задач стали широко применять различные численные методы конечных разностей, конечных элементов и др. Работа посвящена решению пространственной задачи теории упругости для сферического сегмента методом разрывного решения [5].

Цели и задачи. Целью работы является перенос метода разрывных решений на динамические задачи дифракции упругих волн на сферических дефектах. Для этого построено разрывное решение волнового уравнения, а затем и трехмерных уравнений движения упругой среды для указанного дефекта. Используя построенное разрывное решение, удалось свести задачи упругих волн на сферичном дефекте к задаче решения интегральных уравнений. Разработан эффективный метод приближенного решения интегральных уравнений задачи дифракции волн кручения на неподвижном (подвижном) сферическом тонком включении.

Основной материал. Предположим, что в бесконечную упругую среду помещен абсолютно твердый дефект, имеющий форму сферического сегмента толщиной h . Положим, также, что эта неоднородность жестко сцеплена с окружающим пространством и является «замороженным», неподвижным в нем. Требуется определить реактивный момент действующий на это тело, если в среде возникает волна кручения [6]. Искомое решение задачи представим в виде:

$$u_{\text{общ}} = u_{\text{над}} + u_{\text{дифф}}, \quad (1)$$

где $u_{\text{общ}}$ – результирующее перемещение дефекта в среде, согласно постановке задачи оно равно нулю; $u_{\text{над}}$ – перемещение фронта падающей волны при отсутствии в упругой среде какой-либо преграды, в частности дефекта; $u_{\text{дифф}}$ – неизвестное (искомое) перемещение.

Относительно вектора перемещения $\vec{U} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z$ в случае установившегося движения и при условии, что объемные силы отсутствуют, уравнение согласно [1-4] запишется в форме:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \vec{u}) + \rho_m \omega^2 \vec{u} = 0, \quad (2)$$

где μ, λ – постоянные Ламе, Δ – оператор Лапласа, ∇ – набла-оператор, ρ_m – плотность материала. Решение этого уравнения из [4] можно представить в виде:

$$\vec{u} = \nabla \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}, \quad (3)$$

где скалярная Φ и векторная $\vec{\Psi}$ функции являются волновыми. Согласно [7] в сферической системе координат вектор $\vec{\Psi}$ удобно представить следующим образом:

$$\vec{\Psi} = r \Psi_1 \vec{e}_r + \nabla x (r \Psi_2 \vec{e}_r), \quad (4)$$

где функции Ψ_1 и Ψ_2 удовлетворяют волновому уравнению, а $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ – орты касательных к координатным линиям. Пользуясь [7, 8] можно записать зависимости компонент перемещений и напряжений в среде через три волновые функции Φ, Ψ_1, Ψ_2 . Введем обозначения для скачков перемещений в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \langle u^r (R, \theta, \varphi) \rangle &= u^r (R-0, \theta, \varphi) - u^r (R+0, \theta, \varphi), \\ \langle u^\theta (R, \theta, \varphi) \rangle &= u^\theta (R-0, \theta, \varphi) - u^\theta (R+0, \theta, \varphi), \\ \langle u^\varphi (R, \theta, \varphi) \rangle &= u^\varphi (R-0, \theta, \varphi) - u^\varphi (R+0, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогичные выражения скачков можно ввести и для компонент тензора напряжений. Применим к формулам, связывающим перемещения и напряжения с волновыми функциями, преобразования Фурье. После чего, устремив в них r к $R-0$, где R – радиус дефекта, а затем r к $R+0$, и, вычитая от первого результата второй, а также пользуясь формулами (5), можно выразить скачки перемещений и напряжений через скачки волновых функций и их нормальных производных. Применяя к полученным результатам преобразование Лежандра по переменной θ , а также, принимая во внимание, что дефект жестко сцеплен с упругой средой, т.е. $\langle u^r \rangle \equiv \langle u^\theta \rangle \equiv \langle u^\varphi \rangle \equiv 0$, можно получить выражения зависимости скачков волновых функций и их нормальных производных от скачков напряжений. Пользуясь методом разрывного решения для волнового уравнения в сферической системе координат [5, 9, 10], получим, что его решение в трансформантах Фурье и Лежандра примет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{nk}^J (r) &= R^2 \left[\langle \Psi_{nk}^{J'} (R) \rangle \Gamma_{\beta_0} (r, R) - \langle \Psi_{nk}^J (R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} \Gamma_{\beta_0} (r, R) \right], \\ J = \overline{1, 2}, \quad \Gamma_{\beta_0} (r, R) &= \frac{\overline{\Psi}_k^1 (r, R)}{\sqrt{rR}}, \quad \overline{\Psi}_k^1 = \begin{cases} I_\nu (R\beta_0) K_\nu (r\beta_0), & r > R, \\ I_\nu (r\beta_0) K_\nu (R\beta_0), & r < R, \nu = k + 0, 5, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $I_\nu (R\beta_0)$ – модифицированная функция Бесселя, $\beta_0 = \omega \sqrt{\rho_m / \mu}$, ω – циклическая частота,

$K_\nu(r\beta_0)$ – функция Макдональда. Аналогично, для функции $\Phi_{nk}(r)$ запишем:

$$\Phi_{nk}(r) = R^2 \left[\langle \Phi'_{nk}(R) \rangle \Gamma_{\alpha_0}(r, R) - \langle \Phi_{nk}(R) \rangle \frac{\partial}{\partial R} \Gamma_{\alpha_0}(r, R) \right]. \quad (7)$$

В этом выражении ядро $\Gamma_{\alpha_0}(r, R)$ имеет точно такую же структуру, как и выше, за исключением того, что вместо β_0 следует подставить волновое число $\alpha_0 = \omega \sqrt{\rho_m / (\lambda + 2\mu)}$.

Подставляя формулы, описывающие зависимости скачков функций и их нормальных производных от напряжений в (6) и (7), получим выражение потенциалов Ψ^1, Ψ^2, Φ через скачки напряжений. Таким образом, остается получить уравнения относительно скачков напряжений, определив их из этих уравнений и подставив результат в (6) и (7), получим значения потенциалов функций в терминах преобразований Фурье и Лежандра. Осуществляя обратные преобразования по углам θ и φ , располагая формулами для перемещений и напряжений [7], можно определить их поля в упругом пространстве. Кроме того, обладая значениями скачков напряжений, можно определить величину реактивного момента. Переходя в уравнениях (6) и (7) к пределу, при r стремящимся к $R+0$, и, используя формулы связи перемещений с волновыми потенциалами и их нормальными производными, можно построить систему из 3-х уравнений относительно неизвестных скачков напряжений:

$$\begin{cases} \nabla_n \Psi_n^1(R+0, \theta) = \frac{[\sin \theta u_n^\varphi(R+0, \theta)]^* + in u_n^\theta(R+0, \theta)}{\sin \theta}, \\ \left\{ \frac{1}{R} \nabla_n [\Phi_n(R+0, \theta)] + \nabla_n \left\{ \frac{1}{r} [r \Psi_n^2(r, \theta)]' \right\} \right\}_{r=R+0} = \frac{in u_n^\theta(R+0, \theta) - [\sin \theta u_n^\theta(R+0, \theta)]^*}{\sin \theta}, \\ \Phi'_n(R+0, \theta) + \frac{\nabla_n \Psi_n^2(R+0, \theta)}{R} = u_n^r(R+0, \theta), \end{cases} \quad (8)$$

где $\nabla_n f = \frac{n^2 f}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$, f – произвольная функция, имеющая, по крайней мере, вторую непрерывную производную по переменной θ , штрих-производная по переменной r , точка-производная по переменной θ . Предположим, что со стороны среды на дефект действует волна кручения, создаваемая некоторым крутолом:

$$u_0^\varphi = A r \sin \theta e^{i\beta_0 r \cos \theta}, \quad (9)$$

где A – это амплитуда волны, r – радиус-вектор в сферической системе координат. Следует отметить, что в такой интерпретации, решение поставленной задачи сильно упрощается. В этом случае $\Phi \equiv 0, \Psi^1 = \Psi^1(r, \theta), \Psi^2 \equiv 0$ и отличными от нуля будут компоненты $u^\varphi, \tau^{\theta\varphi}, \tau^{r\varphi}$, что приведет к необходимости решения лишь первого уравнения из системы (8), которое, в силу симметричности, примет более простой вид:

$$\nabla_0 \Psi_0^1(R+0, \theta) = \frac{[\sin \theta u_0^\varphi(R+0, \theta)]^*}{\sin \theta}. \quad (10)$$

Используя материалы трудов [7, 8], а также вводя обозначения для скачков [5, 9, 10], можно выразить скачок функции и ее нормальной производной через скачки напряжений. Таким образом, уравнение (10) преобразуем к виду:

$$\frac{R^2}{\mu} \int_0^{\omega_0} \langle \tau_n^*(R, \tau) \rangle \sin \tau K_{\beta_0}(r, R, \theta, \tau) \Big|_{r=R+0} d\tau = F_n(\theta), \quad (11)$$

где R – радиус сегмента, ω_0 – угловой размер дефекта в радианах (угол между осью Oz и r), τ – угол прямого преобразования Лежандра, $\langle \tau_n^* \rangle \sin \tau = in \langle \tau_n^\theta \rangle + [\sin \tau \langle \tau_n^\varphi \rangle]^* K_{\beta_0}(r, R, \theta, \tau) =$

$$= \sum_{k=|n|}^{\infty} \sigma_{k,|n|} \Gamma_{\beta_0}(r, R) P_k^{|n|}(\cos \theta) P_k^{|n|}(\cos \tau), \quad \sigma_{k,|n|} = \frac{(k-|n|)!}{(k+|n|)!} \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad P_k^{|n|}(\cos \theta) - \text{полином}$$

Лежандра, $F_n(\theta)$ – правая часть уравнения (10) в терминах преобразования Фурье. Для эффективного решения интегрального уравнения первого рода, необходимо преобразовать уравнение (11) в интегральное уравнение второго рода [11, 12]. Используя [11], можно доказать, что справедливо следующее соотношение:

$$\Gamma_{\beta_0}(r, R) = \frac{1}{2k+1} - \frac{A_k(R\beta_0)}{2k+1}, \quad (12)$$

где $A_k(R\beta_0) = (-1)^k \int_0^{\pi} \Omega_0'(2R\beta_0 \cos(0.5\alpha)) \sin[(k+0.5)\alpha] d\alpha$, штрих-частная производная по всему аргументу, входящему в функцию $\Omega_0(2R\beta_0 \cos(0.5\alpha)) = I_0(2R\beta_0 \cos(0.5\alpha)) - L_0(2R\beta_0 \cos(0.5\alpha))$, $L_0(2R\beta_0 \cos(0.5\alpha))$ – модифицированная функция Струве нулевого порядка. Согласно формуле 5.14.4(1) из [13] можно получить связь между многочленами Лежандра и гипергеометрической функцией. Рассмотрим разрывной интеграл Вебера-Сонина:

$$W_{|n|}\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}\right) = \int_0^{\infty} J_{|n|}\left(s \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) J_{|n|}\left(s \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}\right) ds, \quad (13)$$

где $J_{|n|}(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя. Для нахождения интеграла (13) воспользуемся [13], а также, вводя обозначение для скачка напряжений $\chi_n(\tau) = \langle \tau_n^*(R, \tau) \rangle$ и избавляясь от модулей в уравнении (11), получим:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{R^2}{\mu} \int_0^{\omega_0} W_n\left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}\right) \sin \frac{\tau}{2} \chi_n(\tau) d\tau - \\ & - 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} A_k(\beta_0 R) \cdot \int_0^{\omega_0} P_k^n(\cos \theta) P_k^n(\cos \tau) \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} \chi_n(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} = F_n(\theta), \quad (14)$$

где $0 \leq \theta \leq \omega_0$, $n=0$. Используя (13), можно вывести левое спектральное соотношение с неинтегрируемой особенностью при условии $\theta \leq \omega_0$:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{2} \int_0^{\omega_0} W_n\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\beta}, \frac{\operatorname{tg} \frac{\tau}{2}}{\beta}\right) \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\tau}{2}}{\beta}\right)^{1+n} P_k^{n, -3/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2}\right) \left(\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}\right)^{-3/2} \cos^{-2} \frac{\tau}{2} d\tau = \\ & = \Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\beta}\right)^n P_{k-1}^{n, 1/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2}\right) \beta^2 \frac{1}{K! 2\Gamma(k+n)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\beta = \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2}$, $P_k^{n, -3/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2}\right)$ – многочлен Якоби. Положим в этой формуле

$P_{-1}^{n, 1/2}(1-2x^2) \equiv 0$ для $0 \leq x \leq 1$ и разложим функцию $\chi_n(\tau)$ в ряд по многочленам Якоби:

$$\sin \frac{\tau}{2} \chi_n(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} \chi_n^{(p)} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\tau}{2}}{\beta}\right)^{n+1} P_p^{n, -3/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}}{\beta^2}\right) \frac{1}{2} \beta^2 \left(\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \frac{\tau}{2}\right)^{-3/2} \cos^{-2} \frac{\tau}{2}. \quad (16)$$

Применяя к уравнению (14) сначала левое спектральное соотношение (15), а затем соотношение ортогональности для многочленов Якоби в сферической системе координат, получим:

$$\frac{\Gamma(J'+1/2)\Gamma(J'+3/2)\chi_n^{(J'+1)}\beta^3}{J'!(J'+1)!(2J'+3/2)} - \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{J=0}^{\infty} A_k(R\beta_0)\chi_n^{(J'+1)} J_{J',k}^{(n)} J_{J,k}^{(n)} =$$

$$= \frac{\mu}{R^2\beta^5} \int_0^{\omega_0} \operatorname{tg} \theta/2 \sqrt{\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \theta/2} P_{J'+1}^{n,1/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta/2}{\beta^2}\right) F_n(\theta) \frac{d\theta}{\cos^2 \theta/2},$$

(17)

где $n=0$, $J_{J',k}^{(n)} = \frac{1}{\beta^{n+5}} \int_0^{\omega_0} \left(\operatorname{tg} \theta/2\right)^{n+1} \sqrt{\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \theta/2} P_{J'+1}^{n,1/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta/2}{\beta^2}\right) P_k^n(\cos \theta) \frac{d\theta}{\cos \theta/2}$ и

$$J_{J,k}^{(n)} = \frac{1}{\beta^{n-1}} \int_0^{\omega_0} \left(\operatorname{tg} \tau/2\right)^{n+1} P_{J+1}^{n,-3/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \tau/2}{\beta^2}\right) P_k^n(\cos \tau) \left(\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \tau/2\right)^{-3/2} \frac{d\tau}{\cos \tau/2}.$$

Уравнение (17) будем решать методом редукции. Используя [10] это уравнение можно привести к более удобному для проведения численных расчетов виду

$$\chi_0^{(J'+1)} - \sum_{J=0}^{\infty} C_{JJ'}^k \chi_0^{(J+1)} = \frac{\mu}{R^2} f^{0,J'+1},$$

(18)

где $C_{JJ'}^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(R\beta_0) J_{J',k}^{(0)} J_{J,k}^{(0)}$, $J_{J',k}^{(0)} = \frac{J_{J',k}^{(0)}}{\sqrt{\sigma_{J'+1} N_{J'+1}}}$, $J_{J,k}^{(0)} = \frac{J_{J,k}^{(0)}}{\sqrt{\sigma_{J+1} N_{J+1}}}$, $(\sigma_{J'+1} N_{J'+1})^{-1/2} =$

$$= \frac{2^{J'} J'!}{(2J'-1)!!} \sqrt{\frac{(3+4J')(J'+1)}{\pi(2J'+1)\beta^3}}.$$

Меняя здесь формально J' на J можно получить

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{\frac{l\pi i}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(R\beta_0) \int_0^{\omega_0} \operatorname{tg} \theta/2 \sqrt{\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \theta/2} P_{J'+1}^{0,1/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta/2}{\beta^2}\right) P_l(\cos \theta) [2 \cos \theta - i\beta_0 R \sin^2 \theta] \frac{d\theta}{\cos^2 \theta/2},$$

$$(\sigma_{J+1} N_{J+1})^{-1/2} \text{ и } f^{0,J'+1} = -\frac{R}{\beta^5} \sqrt{\frac{\pi}{2\beta_0 R \sigma_{J'+1} N_{J'+1}}}.$$

Используя полученное выше, определим значение реактивного момента, который действует на дефект, порождаемый волной кручения:

$$M = 2\pi R^3 \int_0^{\omega_0} \sin^2 \theta \langle \tau_n^{\circ}(R, \theta) \rangle d\theta.$$

(19)

Из уравнения (18) можно найти $\chi_0^{(J')}$ – коэффициенты разложения функции $\chi_0(\tau)$ в ряд по многочленам Якоби, используя формулу (16). Однако эта функция ассоциируется со скачком напряжения $\langle \tau_n^* \rangle$, а значит, искомый крутящий момент необходимо выразить через него. Это можно сделать таким образом:

$$M = 2\pi R^3 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\omega_0} \sin 2\theta \langle \tau_n^*(R, \theta) \rangle d\theta - \cos \omega_0 \int_0^{\omega_0} \sin \theta \langle \tau_n^*(R, \theta) \rangle d\theta \right\}.$$

(20)

Подставляя в (20) вместо $\langle \tau_n^*(R, \theta) \rangle$ его разложение по формуле (16), а затем, интегрируя по переменной θ от нуля до ω_0 , получим численное значение крутящего момента. Таким образом, окончательное выражение для момента можно построить в виде:

$$M = 2\pi R^3 \beta \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \chi_0^{(m)} \int_0^{\omega_0} \frac{\operatorname{tg} \theta/2 P_m^{0,-3/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta/2}{\beta^2}\right) \cos \theta d\theta}{\cos \theta/2 \left(\sqrt{\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \theta/2}\right)^3} - \sum_{m=0}^{\infty} \chi_0^{(m)} \int_0^{\omega_0} \frac{\operatorname{tg} \theta/2 P_m^{0,-3/2} \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \theta/2}{\beta^2}\right) d\theta}{\cos \theta/2 \sqrt{\beta^2 - \operatorname{tg}^2 \theta/2}} \right\}.$$

(21)

На рисунке 1 построено семейство кривых в виде зависимости реактивного момента кручения M от частоты $f = \frac{\omega}{2\pi}$ для разных размеров сферического дефекта $\omega \approx 23^\circ$ – кривая 1, $\omega \approx 25^\circ$ – кривая 2, $\omega \approx 27^\circ$ – кривая 3.

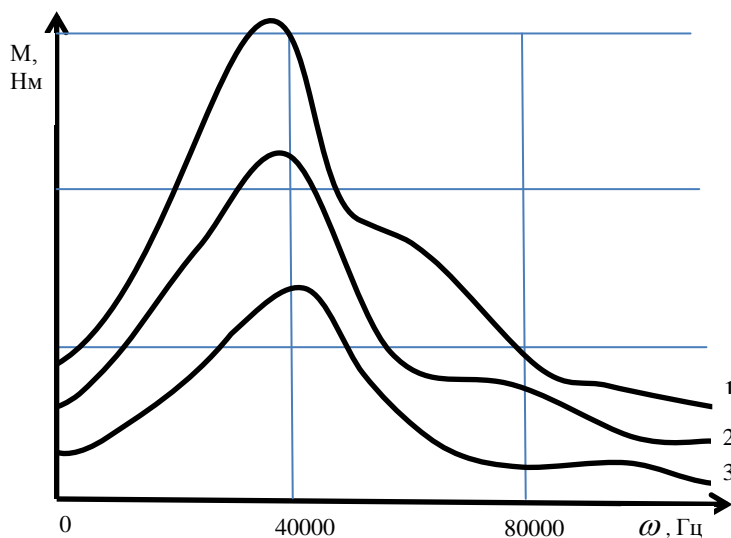


Рис. 1. Семейство кривых в виде зависимости реактивного момента кручения M от частоты f

Выводы. Таким образом, построено эффективное приближенное решение задачи дифракции волн кручения на абсолютно жестком неподвижном включении и получена формула для реактивного вращательного момента (21). Кроме того, было численно решено уравнение (18) и получены коэффициенты χ_0 , которые собраны в специальную матрицу, с целью их дальнейшего использования для выражения (21). Следующей целью исследований является вычисление реактивного момента с использованием конкретных материалов для включения: его толщины, радиуса, а также характеристик окружающей упругой среды, плотности материала и других параметров.

Литература

1. Амензаде Ю.А. Теория упругости / Ю.А. Амензаде. – М.: Высшая школа, 1976. – 72 с.
2. Ильющин А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильющин. – Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: МГУ, 1978. – 287 с.
3. Ляв А.Э.Х. Математическая теория упругости / А.Э.Х. Ляв. – Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
4. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны / Л.И. Слепян. – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.
5. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
6. Грилицкий Д.В. Рассеяние нестационарной волны кручения на жесткой неподвижной сфере в упругой среде / Д.В. Грилицкий, А.И. Поддубняк // Изв. АН СССР, МТТ. – 1980. №5. – С. 86-92.
7. Гузь А.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. – Київ: Вища школа, 1982. – 352 с.
8. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.А. Кубенко, М.А. Черевко. – Київ. Наукова думка, 1978. – 308 с.
9. Попов Г.Я. Исследование метода разрывного решения для анализа дифракции акустических волн на абсолютно жесткой преграде / Г.Я. Попов, О.А. Назаренко // Акустика и ультразвуковая техника. – Киев, 1992, Вып. 27. – С.27-31.
10. Попов Г.Я. Метод анализа дифракции акустических волн на жесткой преграде вблизи жесткого плоского дна / Г.Я. Попов, О.А. Назаренко // Акустика и ультразвуковая техника. – Киев, 1993, вып. 28. – С. 29-35.
11. Попов Г.Я. Об одном новом подходе к задачам о концентрации упругих напряжений возле трещин / Г.Я. Попов // АН СССР. ПММ. – 1991. – Т.55. – Вып.1. – С. 27.
12. G.Ya.Porov. Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect // Advances in Mechanics (Успехи Механики). – 1992. – V.15. – №1-2. – P. 71-110.
13. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маринев. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

Стаття надійшла 3.12.2016