УДК 624.073.046.3

Ю.С. КРУТИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ (продолжение)

Решена задача о свободных продольных колебаниях стержня для случая, когда коэффициент упругости и погонная масса представляют собой произвольные непрерывные функции. Предлагается метод отыскания частот и собственных форм продольных колебаний для произвольного неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения с произвольной непрерывно распределенной массой. В качестве примера исследованы свободные колебания консольного клина.

Ключевые слова: *стержень, продольные колебания, частотное уравнение, коэффициенты колебаний, частота колебаний, собственная форма колебаний, консольный клин.*

Постановка задачи

Данная статья является продолжением ранее опубликованной работы [1], где было построено точное решение дифференциального уравнения продольных колебаний стержня для случая, когда коэффициент упругости и погонная масса представляют собой произвольные непрерывные функции. Там же отмечалось, что в связи с наличием точного решения становится возможным создание алгоритма отыскания частот и собственных форм колебаний для произвольного неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения с произвольной непрерывно распределенной массой. Решению этого вопроса посвящена данная статья.

Ставиться задача: для указанного стержня требуется выписать частотные уравнения для разных случаев граничных условий; указать способ определения частот собственных колебаний стержня; выписать соответствующие этим частотам собственные формы колебаний и указать способ их численной реализации.

Результаты

Исходные формулы. Продольную ось x совместим с осью стержня и будем придерживаться принятых в [1] представлений для модуля упругости $E(x)=E_0\phi(x)$, площади поперечного сечения $F(x)=F_0\psi_1(x)$ и плотности материала стержня $\rho(x)=\rho_0\psi_2(x)$. Здесь E_0, F_0, ρ_0 – соответствующие постоянные параметры, а $\phi(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ – безразмерные функции. Для коэффициента упругости и погонной массы соответственно полагаем $k(x)=k_0A(x)$, $m(x)=m_0B(x)$, где $k_0=E_0F_0$, $A(x)=\phi(x)\psi_1(x)$, $m_0=\rho_0F_0$, $B(x)=\psi_1(x)\psi_2(x)$.

Выпишем из [1] формулы для точки оси стержня с координатой x, которыми определяется амплитудное значение продольного перемещения (главная форма свободных колебаний) $v(x)$ и продольная сила $N(x)$:

$$v(x)=v(0)\Omega_1(x)+N(0)\Omega_2(x); \tag{1}$$

$$N(x)=k_0A(x)\left[v(0)\Omega_1'(x)+N(0)\Omega_2'(x)\right]; \tag{2}$$

$$\Omega_1(x)=\alpha_0(x)-\lambda^2\alpha_1(x)+\lambda^4\alpha_2(x)-\lambda^6\alpha_3(x)+\ldots;\quad \Omega_2(x)=\frac{1}{k_0}\left(\beta_0(x)-\lambda^2\beta_1(x)+\lambda^4\beta_2(x)-\lambda^6\beta_3(x)+\ldots\right);$$

$$\alpha_0(x)=1,\ \alpha_i(x)=\int_0^x\frac{1}{A(x)}\int_0^x B(x)\alpha_{i-1}(x)dxdx; \tag{3}$$

$$\beta_0(x)=\int_0^x\frac{1}{A(x)}dx,\ \beta_i(x)=\int_0^x\frac{1}{A(x)}\int_0^x B(x)\beta_{i-1}(x)dxdx\ (i=1,2,3,\ldots). \tag{4}$$

Здесь $\lambda=\omega\sqrt{\dfrac{\rho_0}{E_0}}$, где ω — неизвестная частота гармонических колебаний стержня во времени.

Кроме того, определим также необходимые для дальнейшего функции:

$$\alpha_0^*(x)=0,\ \alpha_i^*(x)=A(x)\alpha_i'(x)=\int_0^x B(x)\alpha_{i-1}(x)dx; \tag{5}$$

$$\beta_0^*(x)=1,\ \beta_i^*(x)=A(x)\beta_i'(x)=\int_0^x B(x)\beta_{i-1}(x)dx\ (i=1,2,3,\ldots). \tag{6}$$

Помимо рекуррентных формул (3)—(6), функции $\alpha_i(x), \beta_i(x), \alpha_i^*(x), \beta_i^*(x)$ представимы в явном виде: