

УСТОЙЧИВОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ И ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ

Бекирова М.М., Орлов А.Н., Хоменко О.И.

Решена задача об устойчивости гибкого железобетонного стержня в условиях линейной ползучести с учётом трещинообразования. Получены формулы для определения перемещений и кривизны стержня, напряжения в бетоне и арматуре в любой момент времени, формулы для нахождения критической силы.

Рассматривается шарнирно опёртый по концам стержень с прямоугольным симметрично армированным ($A_s = A_s'$) поперечным сечением. Нагрузка P постоянна во времени и приложена с эксцентриситетом e_0 .

При рассмотрении деформирования такого стержня целесообразно рассмотреть две стадии:

стадия I – нагрузка P условно “мала” настолько, что трещины в растянутой зоне бетона не появляются во всём рассматриваемом интервале времени;

стадия II – нагрузка P условно “велика” настолько, что трещины в растянутой зоне бетона появляются либо в момент приложения нагрузки t_0 , либо в момент времени $t_T > t_0$ (t_T – время образования первой трещины).

Связь между деформациями и напряжениями в бетоне устанавливается зависимостями линейной теории упругой наследственности [1]

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)\delta(t,t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial \delta(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} \delta(t, \tau) &= 1/E(\tau) + C(t, \tau); \quad C(t, \tau) = C_0[1 - B e^{-\gamma(t-\tau)}] \\ C(t_0, t_0) &= C_0(1 - B) \end{aligned} \quad (1)$$

Разность $1 - B$ учитывает быстропроходящую часть деформаций ползучести, условно отнесённую к моменту времени t_0 .

Следовательно, $C(t_0, t_0)$ соответствует кратковременному действию нагрузки [2].

Стадия I. Известно, что на стадии I решением интегро-дифференциального уравнения движения армированного стержня, либо соответствующего ему дифференциального уравнения с частными производными, является функция [3]

$$y(z, t) = f(t) \sin \pi x / \ell \quad (2)$$

Здесь $f(t)$ – перемещение среднего по длине стержня сечения:

$$f(t) = f(t_0) \left\{ (1 - (P_{кр} - P) / (P_{дл} - P)) \exp[-\gamma_1 (P_{дл} - P) / (P_{кр} - P)(t - t_0)] + (P_{кр} - P) / (P_{дл} - P) \right\} \quad (3)$$

$$f(t_0) = 4e_0 P / \pi (P_{кр} - P), \quad \gamma_1 = \gamma(1 + \varphi) / (1 + (1 - B)\varphi), \quad \varphi = E_b C_0$$

При $t - t_0 \rightarrow \infty$ из [2] следует:

$$f(\infty) = 4e_0 P / \pi (P_{дл} - P) \quad (4)$$

В соответствии с полученными решениями [3] и [4] для железобетонного стержня можно указать две критические силы $P_{кр}$ и $P_{дл}$.

$$P_{кр} = \pi^2 E_b I_b / \ell^2 [\alpha + 1 / (1 + (1 - B)\varphi)]; \quad P_{дл} = \pi^2 E_b I_b / \ell^2 (\alpha + 1 / (1 + \varphi)) \quad (5)$$

$$\alpha = \mu \rho_1 n; \quad \mu = 2A_s / A_b; \quad \rho_1 = h_1^2 A_b / I_b; \quad n = E_s / E_b$$

Под критической силой при потере устойчивости второго рода подразумевается минимальное значение силы, приводящее к неограниченному росту перемещений; $P_{кр}$ – критическая сила при кратковременном действии нагрузки, определяемая условием $f(t_0) \rightarrow \infty$; $P_{дл}$ – критическая сила при длительном действии нагрузки, определяемая условием $f(\infty) \rightarrow \infty$.

Зная перемещение $y(z, t)$ по формулам:

$$x(z, t) = h/2 + I_b / A_b [P / (y(z, t) + e_0) \rho + 2h_1^2 A_s E_s (1 - I_b / h^2 A_b) y''(z, t)]$$

$$\sigma_s'(z, t) = -E_s [x(z, t) - a] y''(z, t)$$

$$\sigma_s(z, t) = E_s [h - x(z, t) - a] y''(z, t) \quad (6)$$

$$\sigma_b'(z, t) = x(z, t) / I_b \{ [y(z, t) + e_0] P + 2h_1^2 A_s E_s y''(z, t) \}$$

$$\sigma_b(z, t) = (x(z, t) - h) / I_b \{ [y(z, t) + e_0] P + 2h_1^2 A_s E_s y''(z, t) \}$$

разыскивается высота сжатой зоны бетона, напряжения в арматуре и бетоне в произвольном сечении в любой момент времени.

В изгибаемых и внецентренно сжатых железобетонных стержнях трещины в поперечных сечениях в растянутом бетоне появляются при выполнении условия [4]

$$\sigma_b(z,t) = -2R_p \quad (7)$$

Условие [7] совместно с первой и пятой формулами из [6] позволяет получить квадратное уравнение:

$$A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0, \quad (8)$$

корнем которого является y_T — перемещение, при реализации которого в поперечном сечении образуется трещина.

$$A_0 = a_1 P^2 + a_2 P + a_3, \quad A_1 = a_4 P^2 + a_5 P + a_6, \quad A_2 = a_7 P + a_8 P$$

$$a_1 = 12/h, \quad a_2 = hP_s(1/h_1^2 - 24/h^2), \quad a_3 = hP_s^2(12/h^2 - 1/h_1^2), \quad a_4 = 2(12e_0/h - 1), \quad (9)$$

$$a_5 = -4R_p A_b + P_s[he_0/h_1^2 - 2(12e_0/h - 1)], \quad a_6 = 4R_p I_b P_s(12/h^2 - 1/h_1^2),$$

$$a_7 = 2e_0(6e_0 - 1), \quad a_8 = -4R_p A_s e_0, \quad P_s = 2h_1^2 A_s e_0, \quad P_s = 2h_1^2 A_s E_s \pi^2 / \ell^2$$

После подстановки y_T и $f(t)$ из [3] в [2] будет получено уравнение

$$\{(1 - (P_{кр} - P)/(P_{дл} - P)) \exp[-\gamma_1 (P_{дл} - P)/(P_{кр} - P)(t - t_0)] + (P_{кр} - P)/(P_{дл} - P)\} \sin \pi z / \ell = \pi y_T (P_{кр} - P) / 4e_0 P \quad (10)$$

позволяющее разыскивать время появления первой трещины.

Первая трещина появляется в среднем по длине стержня сечении ($z = \ell/2$), а время её появления определяется так:

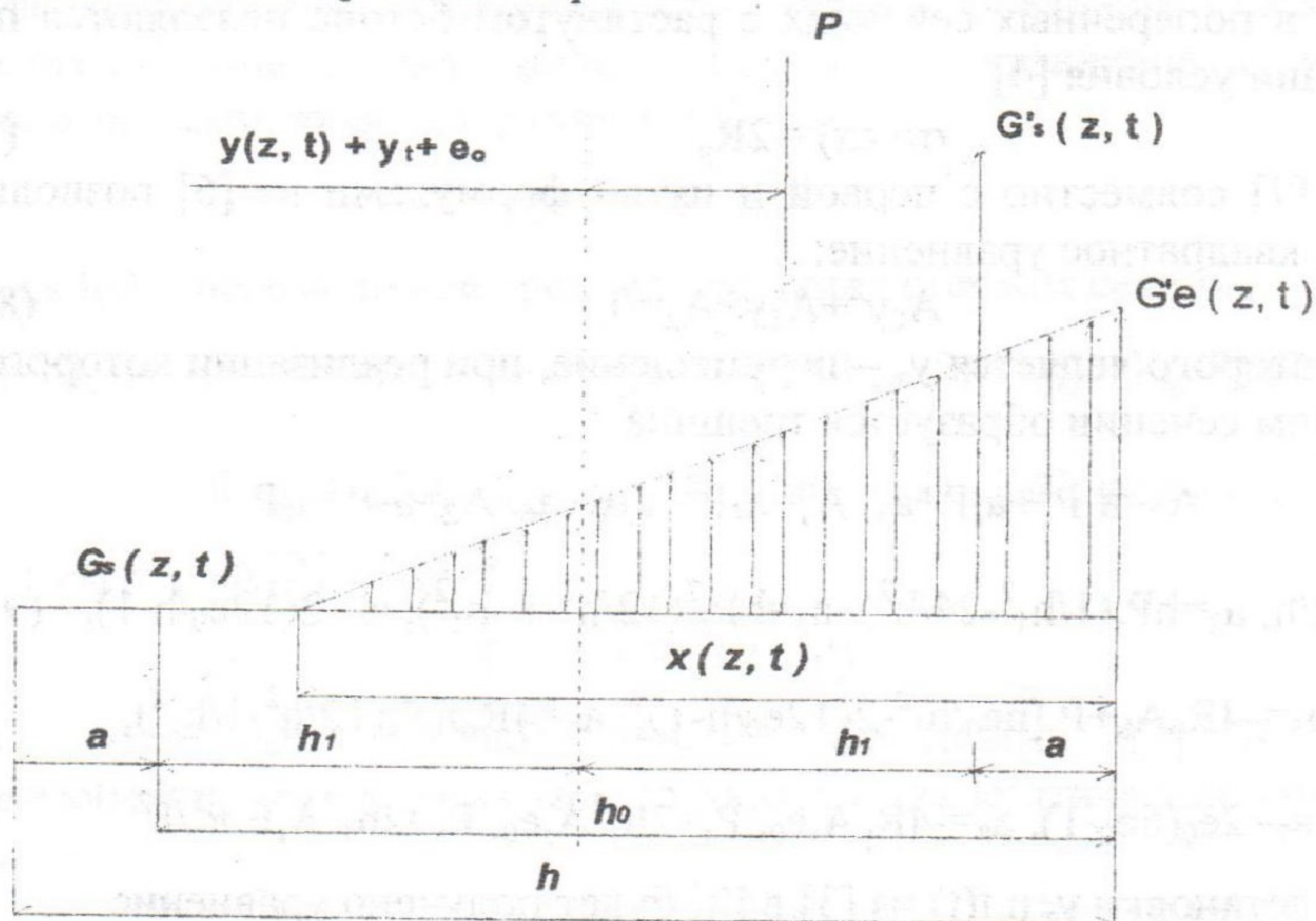
$$t_T = t_0 - 1/\gamma_1 (P_{кр} - P)/(P_{дл} - P) \ln[(P_{кр} - P)(P_{дл} - P)/(P_{дл} - P_{кр})(\pi y_T / 4e_0 P - 1/(P_{дл} - P))] \quad (11)$$

Интерес представляют нагрузки P_T и P_T^* , при действии которых образуется первая трещина в моменты времени $t = t_0$ и $t = \infty$ соответственно. P_T и P_T^* разыскиваются как корни уравнений

$$\pi y_T (P_{кр} - P) / 4e_0 P = 1, \quad \pi y_T (P_{дл} - P) / 4e_0 P = 1 \quad (12)$$

Величина действующей силы определяет характер деформирования стержня. Если $P \leq P_T^*$, то во всём рассматриваемом интервале времени деформирование происходит без образования трещин (стадия I). Если $P_T^* < P < P_T$, то трещины появляются в процессе деформирования (стадия II). Если $P \geq P_T$, то трещины появляются сразу после приложения нагрузки (стадия II).

Стадия II. Действующая на стержень сила P такова, что к моменту времени t сформировался участок длиной ℓ_T с трещинами в растянутом бетоне. Напряжённое состояние в поперечном сечении на участке с трещинами изображено на рис.1.



Работа растянутого бетона на участках между трещинами не учитывается, что приводит к принятию условия $\psi_s(t)=1$.

На участке стержня длиной ℓ_T будут иметь место дополнительные перемещения, вызванные уменьшением жёсткости в результате трещинообразования.

С использованием геометрических соотношений, уравнений равновесия и совместности деформаций с переходом от интегральных зависимостей к дифференциальным, получены зависимость, связывающая дополнительное перемещение с высотой сжатой зоны

$$f(t) = d_1/2 * (x(t) + dz) / (x^2(t) - 2hx(t) + d_3), \quad (13)$$

а также разрешающее дифференциальное уравнение относительно высоты сжатой зоны

$$\frac{[c_1 x^4(t) + c_2 x^3(t) + c_3 x^2(t) + c_4 x(t) + c_5] dx}{x(t)[x^2(t) - 2hx(t) + d_3] [x^3(t) + d_2 x^2(t) + d_5(3h + 2d_2)x(t) - d_5(hd_2 + 2d_3)]} = -\gamma dt \quad (14)$$

$$d_1 = P/A_s E_s * \ell_T^2 / \pi^2; \quad d_2 = 3(y_T + e_0 - h/2); \quad d_3 = 3/4(h^2 + 4h_1^2 - 2d_1);$$

$$d_4 = 2A_s E_s / b E_b [1 + (1 - B)\varphi]; \quad d_5 = 2A_s E_s / b E_b (1 + \varphi)$$

$$c_1=-(2h+d_2); c_2=2[d_3-d_4(3h+2d_2)]; c_3=d_2d_3+d_4(6h^2+7hd_2+6d_3);$$

$$c_4=-4hd_4(hd_2+2d_3); c_5=d_3d_4(hd_2+2d_3)$$

Решение уравнения [14] зависит от вида корней знаменателя. Имеет место два случая: 1) все корни действительные; 2) два корня у полинома третьей степени комплексносопряжённые и один действительный. Полином второй степени имеет действительные корни, что следует из самой зависимости [13].

В первом случае после интегрирования уравнения [14] будет

$$\prod_{i=1}^6 [x(t)-\omega_i]^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^6 [x(t_0)-\omega_i]^{\alpha_i} \exp[-\gamma(t-t_0)] \quad (16)$$

$\omega_1=0$; ω_2 и ω_3 — корни полинома

$$x^2-2hx+d_3=0, \quad (17)$$

а $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ — корни полинома

$$x^3+d_2x^2+d_4(3h+2d_2)x-d_4(hd_2+2d_3)=0 \quad (18)$$

α_i определяется с помощью известных методов (в частности, методом неопределённых коэффициентов), $x(t_0)$ — высота сжатой зоны в начальный момент времени t_0 , определяемая как корень уравнения:

$$x^3+d_2x^2+d_4(3h+2d_2)x-d_4(hd_2+2d_3)=0 \quad (19)$$

В случае, если нагрузка приводит к появлению трещин в процессе длительного действия, то под t_0 следует понимать момент образования первой трещины t_T .

Во втором случае после интегрирования уравнения [14] будет

$$\exp[(2\alpha_6-\alpha_5k_1)/\sqrt{4k_2-k_1^2} \arctg(2x(t)+k_1)/\sqrt{4k_2-k_1^2}] [x^2(t)+k_1x(t)+k_2]^{0.5\alpha_5*}$$

$$*\prod_{i=1}^4 [x(t)-\omega_i]^{\alpha_i} = U(t_0) \exp[-\gamma(t-t_0)] \quad (20)$$

Здесь $U(t_0)$ представляет собой левую часть [20] с заменой t на t_0 . Квадратный трёхчлен $x^2(t)+k_1x(t)+k_2$ получен делением полинома [18] на $[x(t)-\omega_4]$.

Рассматривая деформирование стержня на участке l_T удаётся разыскать критическую силу при длительном воздействии с учётом трещинообразования — $R_{дл}^T$.

Из выражения [13] следует, что $f(\infty) \rightarrow \infty$ тогда, когда знаменатель обращается в нуль. Это возможно, если $x(\infty)$ является корнем полинома [17]. Из решений [16] или [20] следует, что при $t-t_0 \rightarrow \infty$ левые части

должны обращаться в нуль, а это возможно, если $x(\infty)$ – корень полинома [18]. Понятно, что для $f(\infty) \rightarrow \infty$ (потеря устойчивости) необходимо, чтобы высота сжатой зоны $x(\infty)$ была бы общим корнем полиномов [17] и [18]. Общий корень у указанных полиномов будет в случае равенства нулю и результата R [5].

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -2h & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2h & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2h & d_3 \\ 1 & d_2 & d_5(3h+2d_2) & -d_5(hd_2+2d_3) & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & d_5(3h+2d_2) & -d_5(hd_2+2d_3) \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение [21] – уравнение устойчивости. Его корень – критическая сила при длительном действии нагрузки с учётом трещинообразования $P_{дл}^T$.

После ряда преобразований [21] приводится к виду:

$$P \ell_T = 2\pi^2 A_s E_s [3(y_T + e_0)^2 - h(y_T + e_0) + h_1^2] \quad (22)$$

В уравнении [22] ℓ_T – длина участка с трещинами, определяемая зависимостью

$$\ell_T = \ell \{1 - 2/\pi \arcsin[\pi y_T (P_{дл} - P_{дл}^T)/4e_0 P_{дл}^T]\} \quad (23)$$

Критической силе $P_{дл}^T$, определяемой из уравнения [22] с учётом [23] и [8], отвечает критическая длина участка с трещинами $\ell_{T,дл}$.

В случае кратковременного действия нагрузки критическая сила с учётом трещинообразования $P_{кр}^T$, определяемая также из уравнения [22] с заменой в формуле [23] $P_{дл}$ на $P_{кр}$, а критическая длина участка с трещинами $\ell_{T,кр}$ – по формуле [24] с заменой $P_{дл}$ и $P_{дл}^T$ на $P_{кр}$ и $P_{кр}^T$.

В таблице приведены относительные величины критических сил при кратковременном и длительном действии нагрузки без учёта и с учётом трещинообразования в долях от критической силы для центрально сжатого стержня, вычисленной в предположении только упругой работы бетона и отсутствии трещин $P_3 = \pi^2 E_b I_b / \ell^2 (1 + \alpha)$, а также относительные значения критических длин участков с трещинами. При вычислениях было принято $V = 0,85$; $\phi = 2,0$; арматура класса АIII, бетон класса В40.

№ №	e_0/ℓ	λ	μ	$t=t_0$				$t=\infty$			
				$P_{кр}/P_3$	P_T/P_3	$P_{кр}^T/P_3$	$\ell_{T,кр}/\ell$	$P_{дл}/P_3$	P_T^*/P_3	$P_{дл}^T/P_3$	$\ell_{T,дл}/\ell$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/300	30	0	0,77	0,38	0,38	0	0,33	0,19	0,19	0
2			0,01	0,79	0,40	0,43	0,35	0,38	0,23	0,26	0,48
3			0,02	0,81	0,42	0,46	0,43	0,42	0,27	0,31	0,57
4			0,03	0,83	0,43	0,48	0,50	0,45	0,30	0,35	0,65
5		40	0	0,77	0,33	0,33	0	0,34	0,19	0,19	0
6			0,01	0,79	0,34	0,37	0,39	0,38	0,22	0,25	0,54
7			0,02	0,81	0,36	0,40	0,48	0,42	0,26	0,30	0,66
8			0,03	0,83	0,37	0,43	0,56	0,45	0,28	0,34	0,71

Из приведенных численных результатов видно, что учёт ползучести и трещинообразования приводит к существенному уменьшению критических сил. Полученные решения в рамках принятых предпосылок являются точными и удобными для анализа и практических расчётов на устойчивость.

Литература.

1. Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А. Прикладная теория ползучести. М., Стройиздат, 1980, с.63.
2. Прокопович И.Е., Шафрановский Ю.А., Линник А.С. О некоторых вопросах применения теории ползучести к расчёту железобетонных конструкций на длительные эксплуатационные воздействия. Известия АН Арм.ССР, Механика, 1975, т.28, №3, с.63-73.
3. Орлов А.Н. Решение задачи о напряжённо-деформированном состоянии сжато-изогнутого стержня на основе линейной теории ползучести. Строительные конструкции. Вып. XXXI, Киев, Будівельник, 1978, с.80-92.
4. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции. М., Стройиздат, 1975, с. 253.
5. Ван дер Варден Б.Л., Алгебра. М., Наука, 1976, с. 127-130.