

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА КРУЧЕНИЯ СЕЧЕНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК В УПРУГОЙ СТАДИИ РАБОТЫ

*А.В.Ковров, А.М.Кушнир, А.В.Ковтуненко (Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

### DETERMINATION OF CENTER OF TWIST CROSS SECTIONS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS IN THE ELASTIC STAGE WORK

*A. V. Kovrov, A. M. Kushnir, A. V. Kovtunencko*

**Анотація:** наведена методика визначення центру кручення перерізів залізобетонних балок.

**Аннотация:** приведена методика определения центра кручения сечений железобетонных балок.

**Abstract:** A method for determining the center of torsion sections of reinforced concrete beams.

**Ключевые слова:** центр кручения, мембранная аналогия Прандтля, равновесия касательных напряжений.

**Key words:** center torsion, membrane analogy Prandtl equilibrium shear stress.

**Актуальность исследований.** При кручении неоднородных призматических стержней, имеющих прямоугольное поперечное сечение, центр кручения не совпадает с центром тяжести сечения.

**Цель работы** – разработать методику определения центра кручения сечений железобетонных балок.

**Основная часть.** Центр кручения поперечного сечения стержня это точка, относительно которой происходит кручение стержня. Касательные напряжения в центре кручения равны нулю.

Относительно центра кручения определяется значение крутящего момента, возникающего в рассматриваемом поперечном сечении.

При кручении однородных призматических стержней, имеющих прямоугольное поперечное сечение, центр кручения  $O$  совпадает с центром тяжести сечения  $C$  (рис 1) и находится на пересечении осей симметрии – главных центральных осей сечения.

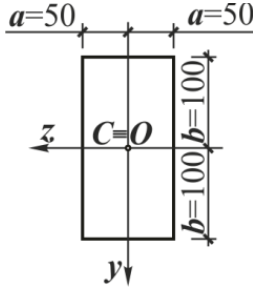


Рис.1 Центры тяжести и кручения прямоугольного поперечного сечения

Напряжения, возникающие в точках симметричного прямоугольного поперечного сечения можно определить по формулам Прандтля [1], [2]:

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \frac{sh \frac{(2n-1)\pi y}{b}}{ch \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi z}{b}; \quad (1)$$

$$\tau_{xy} = -G\theta \frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} \frac{ch \frac{(2n-1)\pi y}{b}}{ch \frac{(2n-1)\pi a}{2b}} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi z}{b}, \quad (2)$$

где  $G$  – модуль сдвига материала;

$\mu$  – коэффициент Пуассона;

$b$  – половина высоты прямоугольного сечения;

$a$  – половина ширины прямоугольного сечения;

$\theta$  – относительный угол закручивания.

Как отмечено в [1], ряды в формулах, (1), (2) достаточно быстро сходятся и можно с достаточной точностью принять  $n = 1$ . В этом случае выражения для касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  после преобразований примут вид:

$$\tau_{xz} = -E\theta \cdot \frac{4b}{\pi^2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}} \cdot \cos \frac{\pi z}{b}; \quad (3)$$

$$\tau_{yz} = -E\theta \cdot \frac{4b}{\pi^2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{2b}}\right) \cdot \sin \frac{\pi z}{b}, \quad (4)$$

Зададимся следующими значениями физических постоянных и значением относительной угловой деформации:

$$E_b = 3276 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$\mu_b = 0,3;$$

$$\theta = 0,0000132.$$

Для определения значений касательных напряжений воспользуемся формулами (3), (4) разбив сечение на 10 полос по высоте и ширине поперечного сечения (рис 3):

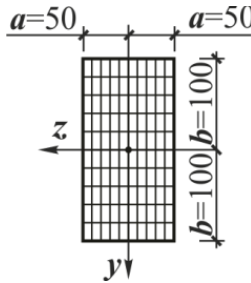


Рис.2 Разбиение прямоугольного поперечного сечения

С использованием MatLab в центре каждого из полученных элементов определены касательные напряжения  $\tau_{xz}$ .

Проверим соблюдение равновесия касательных напряжений, возникающих в направлении оси  $z$  при заданной относительной угловой деформации в соответствии с условиями:

$$\begin{aligned}\Sigma z &= 0; \\ \Sigma \tau_{xz}^+ + \Sigma \tau_{xz}^- &= 0. \\ \Sigma \tau_{xz}^+ + \Sigma \tau_{xz}^- &= 2.465 - 2.465 = 0\end{aligned}\tag{5}$$

Равновесие касательных напряжений возникающих в направлении оси  $z$  обеспечено.

Рассмотрим кручение несимметричного сечения прямоугольного железобетонного элемента, приведенного на рис.4.

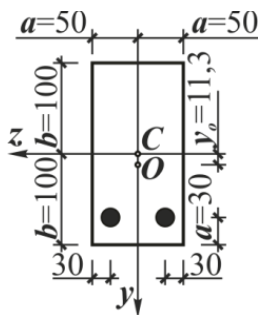


Рис.4 Несимметричное прямоугольное поперечное сечение

При кручении неоднородных призматических стержней, имеющих прямоугольное поперечное сечение, центр кручения  $O$  не совпадает с центром тяжести сечения  $C$ .

Центр кручения приведенного сечения в работе Ю.А.Школы [3] предлагается определять по следующим формулам:

$$Y_o = \frac{\sum_i A_{bi} y_{bi} G_{bi} + \sum_j A_{sj} y_{sj} G_{sj} / \psi_{sj}}{\sum_i A_{bi} G_{bi} + \sum_j A_{sj} G_{sj} / \psi_{sj}}\tag{6}$$

$$Z_o = \frac{\sum_i A_{bi} x_{bi} G_{bi} + \sum_j A_{sj} x_{sj} G_{sj} / \psi_{sj}}{\sum_i A_{bi} G_{bi} + \sum_j A_{sj} G_{sj} / \psi_{sj}} \quad (7)$$

где  $A_{bi}$  - площадь поперечного сечения железобетонного элемента;

$A_{sj}$  - площадь продольной арматуры;

$x_{bi}$ ,  $y_{bi}$  - координаты центров тяжести бетонных элементов относительно центра симметрии поперечного сечения;

$x_{si}$ ,  $y_{si}$  - координаты центров тяжести стержней продольной арматуры;

$\psi_{sj}$  - коэффициент В.И.Мурашева, принимаемый для железобетонных элементов без трещин равным 1;

$G_{bi}$  - модуль сдвига бетона;

$G_{si}$  - модуль сдвига арматуры.

Определим координаты центра кручения железобетонного элемента по формулам (6), (7):

$$Y_0 = \frac{200 \cdot 0 \cdot 1260 + 2(3,14 \cdot 7 \cdot 7700)}{200 \cdot 1260 + 2(3,14 \cdot 7700)} = 1,13 \tilde{m} ;$$

$$Z_0 = 0.$$

При кручении прямоугольных сечений, в соответствии с мембраной аналогией предложенной Л.Прандтлем [1], задача сводится к нахождению прогибов равномерно нагруженной прямоугольной мембраны, при этом ее прогибы должны удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{p}{q}, \quad (8)$$

где  $p$  - давление на единицу площади мембраны;

$q$  - равномерное растяжение на единицу длины контура мембраны.

Прогиб  $x$  принимается в виде ряда:

$$x = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n Y_n \cos \frac{n\pi z}{2a}, \quad (9)$$

где  $b_n$  - постоянные коэффициенты;

$Y_n$  - функции, зависящие от координаты  $y$ .

Подставив ряд (10) в уравнение (9) и после преобразований, получим:

$$Y_n = A \cdot \sinh \frac{n\pi y}{2b} + B \cdot \cosh \frac{n\pi y}{2b} + \frac{16pb^2}{qn^3 \pi^3 b_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (10)$$

где  $A$ ,  $B$  - постоянные интегрирования, которые должны удовлетворять граничным условиям.

Для несимметричного прямоугольного поперечного сечения должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} (Y_n)_{y=h_1} &= 0; \\ (Y_n)_{y=h_2} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Исходя из граничных условий (11) определяем постоянные интегрирования. Подставив полученные выражения постоянных интегрирования  $A$ ,  $B$  в уравнение (10), после преобразований и дифференцирования получим формулы для определения касательных напряжений для несимметричного прямоугольного сечения:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{16G\theta b}{\pi^2} \sinh \frac{\pi z}{2b} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{(\cosh \frac{\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{\pi h_2}{2b}) \sinh \frac{\pi y}{2b} - (\sinh \frac{\pi h_1}{2b} + \sinh \frac{\pi h_2}{2b}) \cosh \frac{\pi y}{2b}}{\sinh \frac{\pi h}{2b}} \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tau_{xz} = \frac{16G\theta b}{\pi^2} \cosh \frac{\pi z}{2b} \times$$

$$\left( \cosh \frac{\pi h_1}{2b} - \cosh \frac{\pi h_2}{2b} \right) \cosh \frac{\pi y}{2b} - \left( \sinh \frac{\pi h_1}{2b} + \sinh \frac{\pi h_2}{2b} \right) \sinh \frac{\pi y}{2b} \quad (13)$$

$$\times \frac{\sinh \frac{\pi h}{2b}}{\sinh \frac{\pi h}{2b}}$$

С использованием MatLab в центре каждого из полученных прямоугольных элементов определены касательные напряжения, возникающие в направлении оси z, по формулам (12), (13).

Проверим соблюдение равновесия касательных напряжений, возникающих в направлении оси z, относительно приведенного центра кручения (рис. 4):

$$\Sigma \tau_{xzb}^+ + \Sigma \tau_{xzb}^- + \Sigma \tau_{xzs}^+ + \Sigma \tau_{xzs}^- = 2,813 - 2,155 - 0,82 = 0,147 \neq 0$$

Равновесие касательных напряжений возникающих в направлении оси z не обеспечено. Следовательно, центр кручения найден неверно.

Уточним положение центра кручения, методом последовательных приближений в соответствии с алгоритмом, представленным в блок-схеме приведенной на рис. 5.



Рис.5 Блок-схема определение центра кручения

Координаты центра кручения определены при помощи программы разработанной на основе алгоритма, приведенного на рис.5 в системе компьютерной математики MatLab равны:

$$Y_0 = 0.37\tilde{n} ;$$

$$Z_0 = 0.$$

Значения касательных напряжений в центре каждого из полученных прямоугольных элементов определим по формулам (12), (13), с использованием MatLab, с учетом уточненного положения центра кручения.

Проверим соблюдение равновесия касательных напряжений, возникающих в направлении оси z:

$$\Sigma\tau_{zxb}^+ + \Sigma\tau_{zxb}^- + \Sigma\tau_{xzs}^+ + \Sigma\tau_{xzs}^- = 2.303 - 2.638 + 0.335 = 0$$

Равновесие касательных напряжений возникающих в направлении оси z обеспечено.

### **Вывод**

1. Предложена методика определения центра кручения сечений железобетонных балок в упругой стадии работы.

2. В соответствии с предложенной блок-схемой составлена программа в системе компьютерной математики MatLab позволяющая определять центр кручения методом последовательных приближений.

### **Литература:**

1. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. – М., 1975. 576 с.
2. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том – Москва. Изд. «Наука». 1975. – 831 с.
3. Школа Ю. О. Несуча здатність та деформативність залізобетонних стержневих елементів при складному напруженому стані : Дис... канд. наук: 05.23.01 - 2002.