УДК 624.073.046.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ С НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ, ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО ПОСТОЯННОЙ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛОЙ

Крутий Ю.С. *(Одесская государственная академия строительства и архитектуры)*

STABILITY OF THE CORE WITH CONTINUOUS VARIABLE RIGIDITY, ECCENTRICALLY COMPRESSED BY CONSTANT LONGITUDINAL FORCE

Krutiy Yu. S. (Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture)

Аннотация: Рассматривается задача устойчивости внецентренно сжатого постоянной продольной силой стержня с непрерывной переменной изгибной жесткостью. В аналитическом виде получены формулы для перемещения, угла поворота, изгибающего момента и продольной силы.

Ключевые слова: внецентренно сжатый стержень, непрерывная переменная изгибная жесткость, устойчивость

Summary: The stability problem eccentrically the core compressed by constant longitudinal force with continuous variable cross-section rigidity is considered. In an analytical kind formulas for moving, a corner of the turn, the bending moment and longitudinal force are received.

Key words: eccentrically compressed core, longitudinal continuous variable cross-section rigidity, stability

Введение

При расчете стержней на устойчивость часто рассматривают идеализированную схему нагружения, исключающую возможность изгиба стержня. Однако реальные элементы конструкций всегда обладают так называемыми начальными несовершенствами. Например, продольная сила, вызывающая сжатие в стержне, может быть приложена не строго по центру тяжести поперечного сечения, а с некоторым эксцентриситетом. Или, например, реальный стержень не является идеально прямым, то есть его ось в недеформированном состоянии обладает ненулевой начальной кривизной (начальной погибью). Распространенной также является ситуация, когда наряду с продольной силой к стержню приложены разного рода поперечные нагрузки. Например, действует распределенная поперечная нагрузка или распределенная моментная нагрузка или приложены сосредоточенные поперечные силы.

Исследование влияния на устойчивость стержня перечисленных наиболее типичных начальных несовершенств важно с практической точки зрения, поскольку позволяет приблизить расчетную схему к реальным конструкциям. Поэтому является актуальным исследование устойчивости такого стержня, начальное напряженное равновесное состояние которого характеризуется не только сжатием продольной силой, но еще и компонентами изгиба.

Данная работа посвящена случаю внецентренно сжатого стержня.

Постановка задачи

Пусть задан прямой упругий стержень длины l с переменной изгибной жесткостью $E(x)J(x)$, шарнирно-опертый по краям. Будем считать, что стержень нагружен постоянной продольной сжимающей силой N, которая приложена внецентренно к концам стержня с эксцентриситетом e (рис. 1). Предполагается, что плечо e лежит в плоскости наименьшей жесткости стержня.

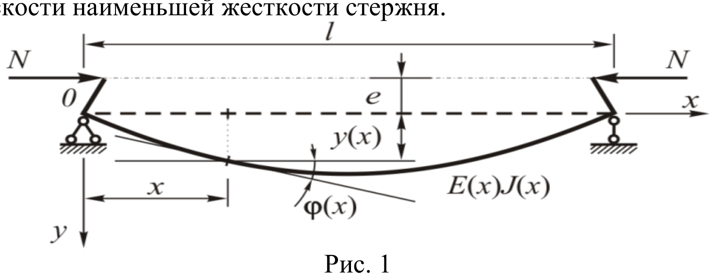

Рис. 1

Для переменной жесткости примем представление

$$E(x)J(x) = E_0J_0A(x), \tag{1}$$

где E_0J_0 – некоторая постоянная жесткость (жесткость в какой-либо характерной точке стержня), а $A(x)$ – безразмерная функция. Фактически функция $A(x)$ определяет закон изменения изгибной жесткости вдоль длины стержня.

Ставится задача: для стержня с произвольной непрерывной переменной изгибной жесткостью, внецентренно сжатого постоянной продольной силой, требуется получить в аналитическом виде формулы для перемещения, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы, необходимые для расчета стержня на устойчивость.

Результаты

С учетом эксцентриситета для изгибающего момента в точке x будем иметь $M(x) = N(y(x) + e)$. Отсюда, учитывая, что в случае шарнирного опирания $y(0) = y(l) = 0$, получим

$$M(0) = M(l) = Ne. \tag{2}$$

Следовательно, случай нагружения стержня с эксцентриситетом равносилен случаю, когда к торцам центрально-сжатого стержня приложены моменты (2) (рис. 2).

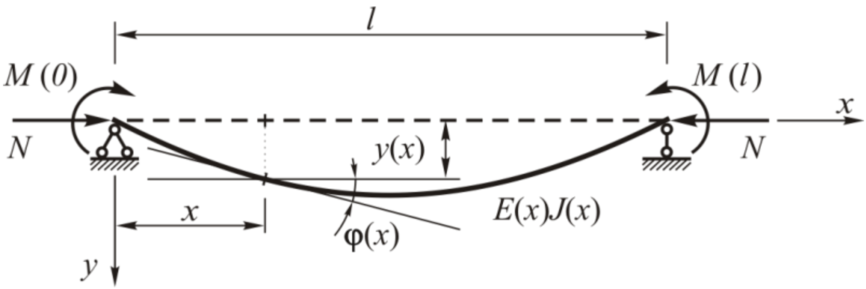

Рис. 2

Задача устойчивости центрально-сжатого стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью и постоянной продольной силой ранее была рассмотрена автором в работах [1, 2]. Основываясь на результатах этих публикаций, выпишем формулы для перемещения, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы, пригодные для центрально-сжатого стержня в виде:

$$y(x) = y(0) + \varphi(0) l X_2(x) - \frac{M(0)}{N}\left(1 - X_1(x)\right) - \frac{Q(0)\, l}{N}\left(\frac{x}{l} - X_2(x)\right); \tag{3}$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) l X_2'(x) + \frac{M(0)}{N} X_1'(x) - \frac{Q(0)}{N}\left(1 - l X_2'(x)\right); \tag{4}$$

$$M(x) = \varphi(0) N l X_2(x) + M(0) X_1(x) + Q(0) l X_2(x); \tag{5}$$

$$Q(x) = Q(0). \tag{6}$$

Здесь фундаментальные функции $X_1(x), X_2(x)$ определяются формулами:

$$X_1(x) = \alpha_0(x) - K\alpha_1(x) + K^2\alpha_2(x) - K^3\alpha_3(x) + \cdots; \qquad (7)$$

$$\alpha_0(x) = 1, \ \ \alpha_i(x) = \frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\alpha_{i-1}(x)dxdx \ (i = 1,2,3,\ldots); \qquad (8)$$

$$X_2(x) = \beta_0(x) - K\beta_1(x) + K^2\beta_2(x) - K^3\beta_3(x) + \cdots; \qquad (9)$$

$$\beta_0(x) = \frac{x}{l}, \ \ \beta_i(x) = \frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\beta_{i-1}(x)\,dxdx \ (i = 1,2,3,\ldots), \qquad (10)$$

где $K = N\frac{l^2}{E_0 J_0}$ – безразмерный параметр.

Подставляя в формулах (3), (5) вместо начальных параметров $y(0)$ и $M(0)$ их значения, получим:

$$y(x) = \varphi(0)lX_2(x) - e\big(1 - X_1(x)\big) - \frac{Q(0)\,l}{N}\left(\frac{x}{l} - X_2(x)\right); \qquad (11)$$

$$M(x) = \varphi(0)NlX_2(x) + NeX_1(x) + Q(0)\,lX_2(x). \qquad (12)$$

Реализуя с помощью (11), (12) два оставшихся граничных условия, приходим к следующей неоднородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} lX_2(l)\,\varphi(0) - \frac{l}{N}\big(1 - X_2(l)\big)Q(0) = e\big(1 - X_1(l)\big) \\ NlX_2(l)\,\varphi(0) + lX_2(l)\,Q(0) = Ne\big(1 - X_1(l)\big) \end{cases}.$$

Отсюда находим начальные параметры: $\varphi(0) = e\frac{1-X_1(l)}{lX_2(l)}$; $Q(0) = 0$.

Подставляя значения начальных параметров в формулы (3) - (6), для внецентренно сжатого стержня окончательно будем иметь:

$$y(x) = e\left(X_1(x) + \frac{1-X_1(l)}{X_2(l)}X_2(x) - 1\right); \qquad (13)$$

$$\varphi(x) = e\left(X_1'(x) + \frac{1-X_1(l)}{X_2(l)}X_2'(x)\right);$$

$$M(x) = Ne\left(X_1(x) + \frac{1-X_1(l)}{X_2(l)}X_2(x)\right);$$

$$Q(x) = 0.$$

В качестве апробации найденных здесь формул, покажем, что в случае постоянной жесткости они приводят к известным результатам. Действительно, когда жесткость стержня постоянна, в формуле (1) следует положить $A(x) \equiv 1$. Тогда по формулам (7) - (10) будем иметь:

$$\alpha_0(x) = 1,\ \alpha_i(x) = \frac{1}{(2i)!}\left(\frac{x}{l}\right)^{2i}\ (i = 1,2,3,\dots),$$

$$X_1(x) = 1 - \frac{K}{2!}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{K^2}{4!}\left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{K^3}{6!}\left(\frac{x}{l}\right)^6 + \cdots = \cos\sqrt{K}\frac{x}{l};$$

$$\beta_0(x) = \frac{x}{l},\ \beta_i(x) = \frac{1}{(2i+1)!}\left(\frac{x}{l}\right)^{2i+1}\ (i = 1,2,3,\dots),$$

$$X_2(x) = \frac{x}{l} - \frac{K}{3!}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{K^2}{5!}\left(\frac{x}{l}\right)^5 - \frac{K^3}{7!}\left(\frac{x}{l}\right)^7 + \cdots = \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\sqrt{K}\frac{x}{l}.$$

Подставляя, например, в формулу для перемещений (13) найденные для функций $X_1(x), X_2(x)$ выражения, после преобразований получим:

$$y(x) = e\left(\cos\sqrt{K}\frac{x}{l} + tg\frac{\sqrt{K}}{2}\sin\sqrt{K}\frac{x}{l} - 1\right).$$

Последняя формула с поправкой на иные обозначения полностью совпадает с известной формулой, приведенной для рассматриваемого случая в монографии [3]. К такому же выводу легко придти в отношении остальным формул.

Выводы

Для стержня с произвольной непрерывной переменной изгибной жесткостью, внецентренно сжатого постоянной продольной силой впервые в аналитическом виде получены формулы для перемещения, угла поворота, изгибающего момента и продольной силы. Показано, что ранее известная формула для перемещений, соответствующая стержню постоянной жесткости, вытекает из представленной здесь формулы, как частный случай.

Найденные формулы позволяют рассчитывать на устойчивость как однородные, так и неоднородные стержни произвольного поперечного сечения, сжатые с эксцентриситетом.

Литература

1. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. №6, 2010, с. 22-29.
2. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости (продолжение) // Строительная механика и расчет сооружений. №2, 2011, с. 27-33.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Издательство «Наука», 1967. – 984 с.