УДК 624.04(075.8)

ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

THE PROBLEM OF STABILITY OF RESILIENT DIRECT BAR OF VARIABLE CROSS-SECTIONAL

Крутий Ю.С. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры, г. Одесса)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан упругий неоднородный прямой стержень переменного поперечного сечения длины l, сжатый осевой продольной силой N и шарнирно опертый по концам. Рассмотрим задачу устойчивости такого стержня.

Направим ось x вдоль оси стержня, а ось y – по направлению наименьшей жесткости поперечного сечения. При этом будем считать, что концы стержня находятся в точках $x = 0$ и $x = l$. Считая прогибы малыми по сравнению с длиной стержня, и пренебрегая продольными деформациями, дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня запишется в виде [1]

$$B(x)y''(x) + Ny(x) = 0. \tag{1}$$

Здесь $B(x) = E(x)J(x) > 0$ – переменная поперечная жесткость стержня (жесткость на изгиб), где $E(x)$, $J(x)$ – соответственно модуль упругости материала и момент инерции поперечного сечения стержня в точке x; $y(x)$ – неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение (прогиб) сечения в точке x. К уравнению (1) присоединим граничные условия, соответствующие рассматриваемому случаю

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Как известно [2], при сжимающих силах, даже ничтожно превышающих критическое значение, дополнительные напряжения изгиба достигают весьма больших значений и непосредственно угрожают прочности конструкции. Поэтому определение критических нагрузок является ответственной частью инженерного расчета конструкции и позволяет избежать потери устойчивости введением надлежащего запаса. Этим определяется актуальность решения подобного рода задач.

Когда жесткость стержня изменяется непрерывно, известны лишь редкие случаи построения точного (аналитического) решения дифференциального уравнения (1). Как отмечается в [2, 3], в общем случае при произвольном непрерывном законе изменения жесткости, соответствующее дифференциальное уравнение не удается проинтегрировать. Тогда для определения критических нагрузок и искривленных форм равновесия стержня при потере устойчивости приходится прибегать к приближенным методам.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Автором получено точное (аналитическое) решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(0) = 0$, при произвольном непрерывном законе изменения жесткости. Это решение определяется абсолютно и равномерно сходящимся на отрезке $[0, l]$ рядом. Опуская математические выкладки и доказательство сходимости ряда, выпишем только конечные формулы:

$$y(x) = D(\beta_0(x) - N\beta_1(x) + N^2\beta_2(x) - N^3\beta_3(x) + \cdots),$$

$$\beta_0(x) = x, \;\; \beta_i(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{1}{B(x)} \beta_{i-1}(x)dxdx \quad (i = 1,2,3,\dots);$$

D –константа. Реализация условия $y(l) = 0$ приводит к уравнению

$$l - \beta_1(l)N + \beta_2(l)N^2 - \beta_3(l)N^3 + \cdots = 0, \qquad (2)$$

где

$$\beta_i(l) = \int_0^l \int_0^x \frac{1}{B(x)} \beta_{i-1}(x)dxdx \quad (i = 1,2,3,\dots).$$

Это и есть в общем случае характеристическое уравнение для отыскания нагрузок, при которых возможны смежные искривленные формы равновесия стержня.

Левая часть уравнения (2) представляет собой абсолютно сходящийся числовой ряд. Это означает, что какова бы ни была изначально задана точность ε, ее всегда можно достичь, удерживая конечное число $n + 1$ первых членов ряда и пренебрегая остальными. В результате такой процедуры, для неизвестной N получим приближенное характеристическое уравнение, которое будет представлять собой алгебраическое уравнение степени n с вещественными коэффициентами

$$P_n(N) = l - \beta_1(l)N + \beta_2(l)N^2 - \beta_3(l)N^3 + \cdots + (-1)^n\beta_n(l)N^n = 0,$$

где число n удовлетворяет условию $\beta_{n+1}(l) < \varepsilon$.

Согласно теореме Декарта [4], число положительных корней многочлена, засчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена или меньше этого числа на четное число. Число перемен знаков многочлена $P_n(N)$ равно n. Следовательно, выбирая n нечетным, мы гарантируем тем самым наличие как минимум одного положительного корня многочлена $P_n(N)$.

Таким образом, для любой наперед заданной точности ε, уравнение (2) всегда приближенно разрешимо на множестве вещественных строго положительных чисел. Обозначим его положительные корни через $N_1, N_2, N_3, \ldots$ и будем считать, что они расположены в порядке возрастания. Тогда значение эйлеровой силы будет равно $N_{\text{кр}} = N_1$. При этом каждому значению N_j $(j = 1,2,3 \ldots)$ продольной силы будет соответствовать своя искривленная форма равновесия

$$y_j(x) = D(\beta_0(x) - N_j\beta_1(x) + N_j^2\beta_2(x) - N_j^3\beta_3(x) + \cdots). \qquad (3)$$

Особо следует подчеркнуть, что формулы (2), (3) пригодны для случая произвольной непрерывной жесткости стержня, шарнирно опертого по краям.

Таким образом, с вычислительной точки зрения вопрос отыскания критических нагрузок в общем случае сводится к необходимости вычисления коэффициентов $\beta_i(l)$ $(i = 1,2,3, \ldots, n)$ с последующим нахождением корней многочлена $P_n(N)$ одним из известных численных методов.

В теории устойчивости известен целый ряд случаев переменной жесткости, когда удается получить формулы для точного значения критической силы [5, 6]. Но тогда, в силу общности уравнения (2), все такие формулы должны вытекать из него как частный случай. В таких ситуациях необходимость в переходе от уравнения (2) к приближенному характеристическому уравнению отпадает. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Рассмотрим известный случай [6], когда жесткость однородного стержня изменяется по степенному закону вида

$$B(x) = EJ_0\left(1 - \gamma\frac{x}{l}\right)^4. \qquad (4)$$

Здесь J_0 – момент инерции поперечного сечения стержня в точке $x = 0$, а γ – константа, отличная от единицы.

Обозначим ради краткости $u = 1 - \gamma\frac{x}{l}$. Для вычисления соответствующих рассматриваемому случаю функций

$$\beta_i(x) = \frac{1}{EJ_0}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^4}\beta_{i-1}(x)dxdx \quad (i = 1,2,3,\dots),$$

воспользуемся специально выведенной формулой

$$\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^3}\left(\frac{1}{u} - 1\right)^p dxdx = \frac{1}{(p+1)(p+2)}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^2 u\left(\frac{1}{u} - 1\right)^{p+2},$$

где $p = 1,2,3,\dots$. В итоге будем иметь:

$$\beta_0(x) = x = \frac{l}{\gamma}u\left(\frac{1}{u} - 1\right),$$

$$\beta_1(x) = \frac{1}{EJ_0}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^4}\,\beta_0(x)dxdx = \frac{1}{3!EJ_0}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^3 u\left(\frac{1}{u} - 1\right)^3,$$

$$\beta_2(x) = \frac{1}{EJ_0}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^4}\,\beta_1(x)\,dxdx = \frac{1}{5!(EJ_0)^2}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^5 u\left(\frac{1}{u} - 1\right)^5,$$

$$\beta_3(x) = \frac{1}{EJ_0}\int_0^x\int_0^x \frac{1}{u^4}\,\beta_2(x)\,dxdx = \frac{1}{7!(EJ_0)^3}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^7 u\left(\frac{1}{u} - 1\right)^7,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

$$\Omega_2(x) = \beta_0(x) - N\beta_1(x) + N^2\beta_2(x) - N^3\beta_3(x) + \dots =$$

$$= u\left[\frac{l}{\gamma}\left(\frac{1}{u} - 1\right) - \frac{1}{3!}\frac{N}{EJ_0}\left(\frac{l}{\gamma}\right)^3\left(\frac{1}{u} - 1\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{N}{EJ_0}\right)^2\left(\frac{l}{\gamma}\right)^5\left(\frac{1}{u} - 1\right)^5 -\right.$$

$$\left.- \frac{1}{7!}\left(\frac{N}{EJ_0}\right)^3\left(\frac{l}{\gamma}\right)^7\left(\frac{1}{u} - 1\right)^7 + \dots\right] = \sqrt{\frac{EJ_0}{N}}\,u\sin\frac{l}{\gamma}\sqrt{\frac{N}{EJ_0}}\left(\frac{1}{u} - 1\right).$$

Уравнение (2) теперь принимает вид $\sqrt{\frac{EJ_0}{N}}(1 - \gamma)\sin\frac{l}{1-\gamma}\sqrt{\frac{N}{EJ_0}} = 0.$

Отсюда находим $N_j = EJ_0\left(\frac{1-\gamma}{l}\pi j\right)^2$, где $j = 1,2,3,\dots$. Согласно формуле (3), искривленные формы равновесия для данного случая определятся равенствами

$$y_j(x) = A_j u \sin \frac{1-\gamma}{l} \pi j \left(\frac{1}{u} - 1\right),$$

где обозначено $A_j = \frac{l}{(1-\gamma)\pi j} D$. Полагая $j = 1$, получаем формулу для первой критической силы

$$N_{кр} = EJ_0 \left(\frac{1-\gamma}{l}\pi\right)^2. \tag{5}$$

Пример 1. Пусть однородный стержень имеет форму усеченного конуса с радиусами оснований R и r $(R \geq r)$ (рис.1*а*). Жесткость такого стержня описывается формулой (4), где следует положить $J_0 = \frac{\pi R^4}{4}$, $\gamma = 1 - \frac{r}{R}$. Подставляя значение γ в формулу (5), получаем

$$N_{кр} = EJ_0 \left(\frac{r\pi}{Rl}\right)^2.$$

Пример 2. Пусть однородный стержень имеет форму правильной усеченной пирамиды со сторонами оснований a и b $(a \geq b)$ (рис.1*б*). В этом случае жесткость стержня также описывается формулой (4), причем $J_0 = \frac{a^4}{12}$, $\gamma = 1 - \frac{b}{a}$. Из формулы (5) теперь имеем

$$N_{кр} = EJ_0 \left(\frac{b\pi}{al}\right)^2.$$

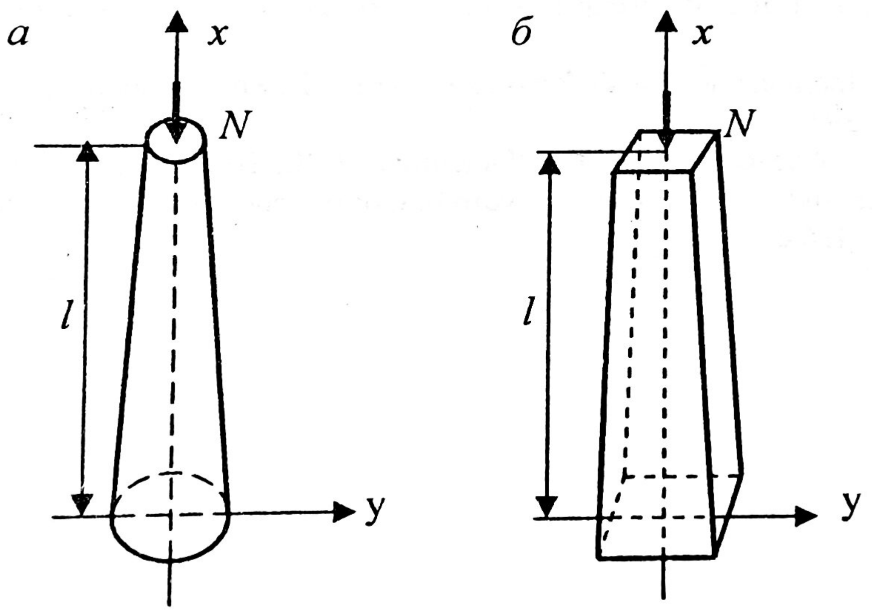

Рис.1

ВЫВОДЫ

Для прямого стержня, шарнирно опертого по краям, в случае произвольной непрерывной поперечной жесткости:

1. Построено точное решение дифференциального уравнения изогнутой оси.
2. Выписано характеристическое уравнение.
3. Предлагается метод вычисления критических сил.

На взгляд автора изложенный здесь подход является естественным, в том смысле, что он не требует наперед задавать («угадывать») вид изогнутой кривой, как того требуют существующие приближенные методы. Кроме того, наличие единых формул позволяет создать единую вычислительную процедуру для отыскания критических сил, пригодную для любого случая непрерывной жесткости стержня.

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Издательство «Наука», 1967. – 984 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под редакцией Биргера И.А., Пановко Я.Г. т.3. – М.: «Машиностроение», 1968. – 576 с.
3. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: «Машиностроение», 1978. – 312 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Издательство «Наука», 1968. – 431 с.
5. Динник А.Н. Продольный изгиб. Кручение. – М.: Издательство академии наук СССР, 1955. – 392 с.
6. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.