УДК 624.072.33.012:539.376

К РАСЧЕТУ РАМ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

М.М.Бекирова, А.Н.Орлов, С.В.Павелко /Одесса, ОГАСА/

При расчетах рам методом перемещений используется основная система, полученная из заданной путем наложения связей препятствующих угловым перемещениям жестких узлов /жесткое защемление/ и линейным перемещениям как жестких, так и шарнирных узлов /шарнирноподвижная опора/. Фактически основная система является совокупностью жестко защемленных по концам стержней и стержней жестко защемленных на одном конце и шарнирноопертых на другом.

Для расчета необходимо знать реактивные усилия и эпюры изгибающих моментов в таких стержнях от деформативных воздействий /поворот жесткой заделки на единичный угол, линейное единичное смещение одной опоры относительно другой в направлении перпендикулярном оси стержня/ и основных видов поперечных нагрузок /равномерно распределенная нагрузка вдоль всего пролета, сосредоточенная сила в середине пролета и т.д./. Все это хорошо известно для расчетов рамных конструкций, выполненных из упругих материалов.

В настоящей статье решены задачи по определению реактивных усилий и напряженных состояний для вышеуказанных стержней в случае, когда материал, из которого изготовлена рама, обладает свойствами ползучести.

Предполагается, что материал стержней подчиняется законам нелинейной теории упругой наследственности /I/

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)\,\delta(t,t) - \int_{t_0}^{t} F[\sigma(\tau)]\,\frac{\partial\delta(t,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau, \qquad /I/$$

$$\delta(t,\tau) = 1 + C(t,\tau) \qquad C(t,\tau) = C_0\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right],$$

$$F[\sigma(t)] = \sigma(t) + \beta\sigma^2(t), \qquad \varphi = E C_0,$$

где $C(t,\tau)$ - мера ползучести, φ - характеристика ползучести, $F[\sigma(t)]$ - функция напряжений, представленная в виде квадратного двучлена.

Стержень, защемленный двумя концами /рис.I/. Левый конец стержня повернут на единичный угол по часовой стрелке, правый - неподвижен. Если начало координат в точке A, то уравнение оси изогнутого стержня имеет вид

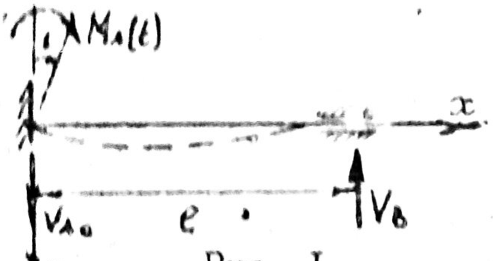


Рис. I

$$y(x,t) = x - \frac{M_A(t)}{EJ}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{V_A(t)}{EJ}\cdot\frac{x^3}{6} - \gamma\frac{f}{EJ}\int\limits_{t_0}^{t}\Big\{M_A(\tau)\frac{x^2}{2} - V_A(\tau)\frac{x^3}{6} + \frac{\beta h}{2J}\Big[M_A^2(\tau)\frac{x^2}{2} - M_A(\tau)V_A(\tau)\frac{x^3}{3} + V_A^2(\tau)\frac{x^4}{12}\Big]\Big\}e^{-\gamma(t-\tau)}\,d\tau. \qquad /2/$$

Его производная – уравнение углов поворота поперечных сечений оси изогнутого стержня

$$y'(x,t) = -\frac{M_A(t)}{EJ} + \frac{V_A(t)}{EJ}\cdot\frac{x^2}{2} - \gamma\frac{f}{EJ}\int\limits_{t_0}^{t}\Big\{M_A(\tau)\,x + V_A(\tau)\frac{x^2}{2} + \frac{\beta h}{2J}\cdot\Big[M_A^2(\tau)\,x - M_A(\tau)V_A(\tau)\,x^2 - V_A^2(\tau)\frac{x^3}{3}\Big]\Big\}e^{-\gamma(t-\tau)}\,d\tau. \qquad /3/$$

Используя условия на правом конце стержня при $x = l$, $y(l,t) = 0$ и $y'(l,t) = 0$, с помощью уравнений /I/ и /2/ можно получить систему интегральных уравнений относительно искомых реактивных усилий $M_A(t)$ и $V_A(t)$.

$$\begin{cases} M_A(t) - \frac{l}{3}V_A(t) + \gamma f\int\limits_{t_0}^{t}\Big\{M_A(\tau) - \frac{l}{3}V_A(\tau) + \frac{\beta h}{2J}\Big[M_A^2(\tau) - \frac{2l}{3}M_A(\tau)V_A(\tau) + \frac{l^2}{6}V_A^2(\tau)\Big]\Big\}e^{-\gamma(t-\tau)}\,d\tau = \frac{2EJ}{l}, \\ M_A(t) - \frac{l}{2}V_A(t) + \gamma f\int\limits_{t_0}^{t}\Big\{M_A(\tau) - \frac{l}{2}V_A(\tau) + \frac{\beta h}{2J}\Big[M_A^2(\tau) - l\,M_A(\tau)V_A(\tau) + \frac{l^2}{6}V_A^2(\tau)\Big]\Big\}e^{-\gamma(t-\tau)}\,d\tau = \frac{EJ}{l} \end{cases} \qquad /4/$$

В уравнениях /2/, /3/ и /4/ h и J – высота и момент инерции поперечного сечения стержня.

Систему интегральных уравнений /4/ можно заменить эквивалентной ей системой дифференциальных

$$\begin{cases} \dot V_A(t) + \gamma_1 V_A(t) + a_1 M_A(t)V_A(t) + a_2 V_A^2(t) = \gamma V_A(t_0) \\ \dot M_A(t) + \gamma_1 M_A(t) + b_1 M_A^2(t) + b_2 V_A^2(t) = \gamma M_A(t_0) \end{cases} \qquad /5/$$

Здесь точками обозначены производные по времени

$$a_1 = 2\gamma f\frac{\beta h}{2J},\quad a_2 = -\gamma f\frac{\beta h l}{2J},\quad b_1 = \gamma f\frac{\beta h}{2J},\quad b_2 = -\frac{1}{6}\gamma f\frac{\beta h l^2}{2J},$$
$$\gamma_1 = \gamma(1+f),\quad M_A(t_0) = -\frac{4EJ}{l},\quad V_A(t_0) = \frac{6EJ}{l^2}. \qquad /6/$$

$M_A(t_0)$ и $V_A(t_0)$ – реактивные усилия в рассматриваемом стержне упругой задачи.

Реактивные усилия $M_A(t)$ и $V_A(t)$ с учетом нелинейной ползучести являются решениями системы /5/

$$M_A(t)=\frac{M_A(t_0)}{2,5\omega(1+\varphi)}\cdot\frac{(\sqrt{1+5\omega}+1)\,k\,e^{-\gamma_1\sqrt{1+5\omega}\cdot(t-t_0)}+(\sqrt{1+5\omega}-1)}{1-k\,e^{-\gamma_1\sqrt{1+5\omega}\cdot(t-t_0)}},$$

$$V_A(t)=\frac{V_A(t_0)}{2,5\omega(1+\varphi)}\cdot\frac{(\sqrt{1+5\omega}+1)\,k\,e^{-\gamma_1\sqrt{1+5\omega}(t-t_0)}+(\sqrt{1+5\omega}-1)}{1-k\,e^{-\gamma_1\sqrt{1+5\omega}\cdot(t-t_0)}},\qquad /7/$$

где

$$k=\frac{2,5\omega(1+\varphi)+(1-\sqrt{1+5\omega})}{2,5\omega(1+\varphi)+(1+\sqrt{1+5\omega})},\quad \omega=\frac{\varphi}{(1+\varphi)^2}\cdot\frac{\beta E}{\lambda},\quad \lambda=\frac{\ell}{h}.\qquad /8/$$

С практической точки зрения наибольший интерес представляет случай при $t\to\infty$, т.е. когда процессы ползучести уже закончились. Из формул /7/ следует

$$M_A(\infty)=M_A(t_0)\frac{\sqrt{1+5\omega}-1}{2,5\omega(1+\varphi)},\quad V_A(\infty)=V_A(\infty)\frac{\sqrt{1+5\omega}-1}{2,5\omega(1+\varphi)}\qquad /9/$$

Для частного случая, когда материал стержня подчиняется закону линейной теории упругой наследственности, реактивные усилия $M_A(t)$, $V_A(t)$, $M_A(\infty)$ и $V_A(\infty)$ можно получить из зависимостей /7/ и /9/. Для этого в /7/ и /9/ следует принять $\omega=0$, т.к. $\beta=0$. Непосредственная подстановка $\omega=0$ в формулы /7/ и /9/ приводит к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$, раскрыв которые, получим окончательные результаты

$$M_A(t)=\frac{M_A(t_0)}{1+\varphi}\left[1+\varphi e^{-\gamma_1(t-t_0)}\right],\quad V_A(t)=\frac{V_A(t_0)}{1+\varphi}\left[1+\varphi e^{-\gamma_1(t-t_0)}\right],\qquad /10/$$

$$M_A(\infty)=\frac{M_A(t_0)}{1+\varphi}.\qquad V_A(\infty)=\frac{V_A(t_0)}{1+\varphi}$$

Выполненные расчеты для двух видов стержней при деформативных воздействиях и действии внешних поперечных нагрузок позволили получить все необходимые реактивные усилия и эпюры изгибающих моментов, которые и приведены в таблице для случая $t\to\infty$ как при нелинейной, так и линейной ползучести.

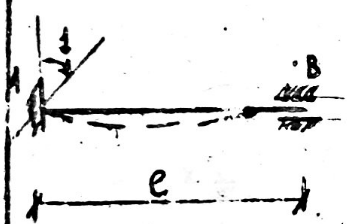
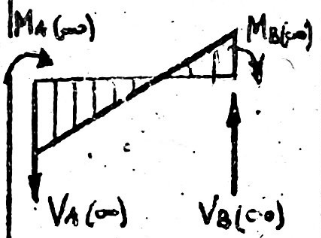
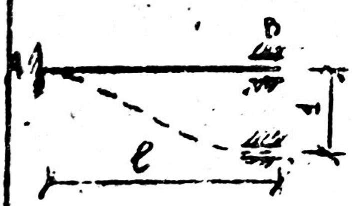
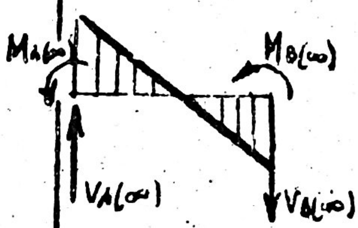
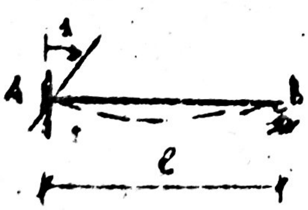
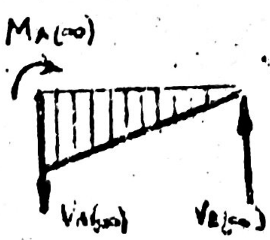
В формулах пунктов 5,6,7,8 таблицы под α следует понимать

$$\alpha = \omega\frac{(1+\varphi)\ell}{2EJ} \qquad /II/$$

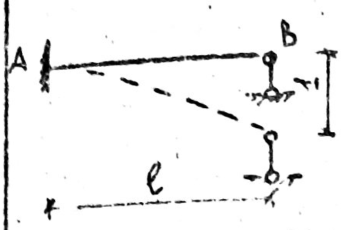
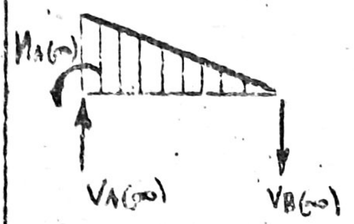
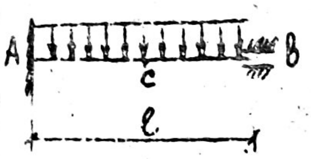
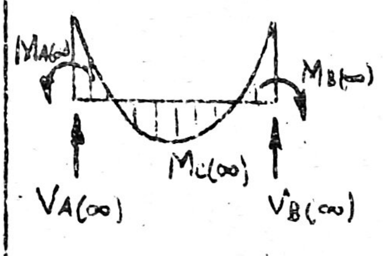
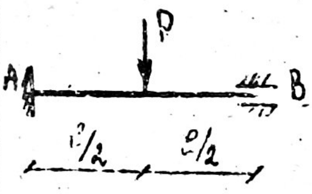
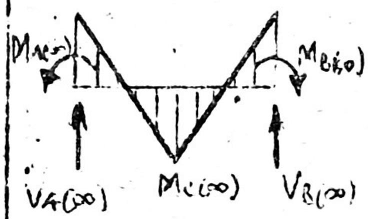
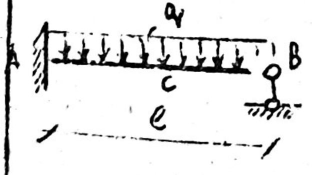
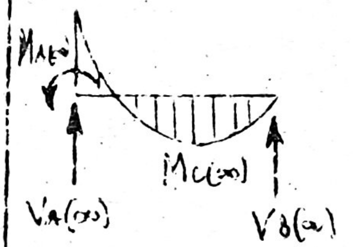
Коэффициент ω, фигурирующий в формулах пунктов I и 3 таблицы, а так же в формуле /II/, вычисляется по второй формуле из /8/ а фигурирующий в пунктах 2 и 4 – по формуле

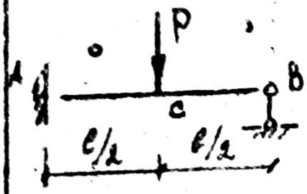
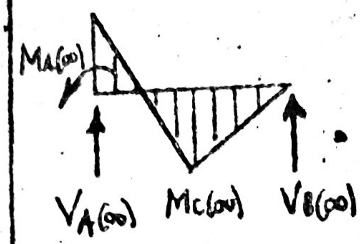
$$\omega = \frac{\varphi}{(1+\varphi)^2}\cdot\frac{\beta E}{\lambda\ell} \qquad /I2/$$

Таблица

№№ пп	Схема стержня и воздействия на него	Эпюры изгибающих моментов /ординаты отложены со стороны растянутого волокна/ и реакции	Формулы	
			Нелинейная ползучесть	Линейная ползучесть
I	2	3	4	5
			$M_A(\infty)=\frac{4EJ}{\ell}\cdot\frac{\sqrt{1+5\omega}-1}{2,5\omega(1+\varphi)}$ $M_B(\infty)=\frac{2EJ}{\ell}\cdot\frac{\sqrt{1+5\omega}-1}{2,5\omega(1+\varphi)}$ $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{6EJ}{\ell}\cdot\frac{\sqrt{1+5\omega}-1}{2,5\omega(1+\varphi)}$	$M_A(\infty)=\frac{4EJ}{\ell(1+\varphi)}$ $M_B(\infty)=\frac{2EJ}{\ell(1+\varphi)}$ $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{6EJ}{\ell^2(1+\varphi)}$
			$M_A(\infty)=M_B(\infty)=\frac{6EJ}{\ell^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-4\omega}}{2\omega(1+\varphi)}$; $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{12EJ}{\ell^3}\cdot\frac{1-\sqrt{1-4\omega}}{2\omega(1+\varphi)}$	$M_A(\infty)=M_B(\infty)=\frac{6EJ}{\ell^2(1+\varphi)}$ $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{12EJ}{\ell^3(1+\varphi)}$
			$M_A(\infty)=\frac{3EJ}{\ell}\cdot\frac{\sqrt{1+4,5\omega}-1}{2,25\omega(1+\varphi)}$ $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{3EJ}{\ell^2}\cdot\frac{\sqrt{1+4,5\omega}-1}{2,25\omega(1+\varphi)}$	$M_A(\infty)=\frac{3EJ}{\ell(1+\varphi)}$ $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{3EJ}{\ell^2(1+\varphi)}$

продолжение табл.

1	2	3	4	5
			$M_A(\infty)=\frac{3EJ}{l^2}\cdot\frac{1-\sqrt{1-4,5\omega}}{2,25\omega(1+\varphi)}$; $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{3EJ}{l^3}\cdot\frac{1-\sqrt{1-4,5\omega}}{2,25\omega(1+\varphi)}$.	$M_A(\infty)=\frac{3EJ}{l^2(1+\varphi)}$ $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{3EJ}{l^2(1+\varphi)}$
			$M_A(\infty)=M_B(\infty)=\frac{ql^2}{12}+\frac{1}{2\alpha}\left[1-\sqrt{1-0,8\alpha^2\left(\frac{ql^2}{12}\right)^2}\right]$ $M_C(\infty)=\frac{ql^2}{24}-\frac{1}{2\alpha}\cdot\left[1-\sqrt{1-0,8\alpha^2\left(\frac{ql^2}{12}\right)^2}\right]$ $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{ql}{2}$	$M_A(\infty)=M_B(\infty)=\frac{ql^2}{12}$; $M_C(\infty)=\frac{ql^2}{24}$; $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{ql}{2}$.
			$M_A(\infty)=M_B(\infty)=\frac{Pl}{8}+\frac{1}{2\alpha}\cdot\left[1-\sqrt{1-\frac{4}{3}\alpha^2\left(\frac{Pl}{8}\right)^2}\right]$; $M_C(\infty)=\frac{Pl}{8}-\frac{1}{2\alpha}\cdot\left[1-\sqrt{1-\frac{4}{3}\alpha^2\left(\frac{Pl}{8}\right)^2}\right]$, $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{P}{2}$	$M_A(\infty)=M_B(\infty)=\frac{Pl}{8}$, $M_C(\infty)=\frac{Pl}{8}$; $V_A(\infty)=V_B(\infty)=\frac{P}{2}$
			$M_A(\infty)=\frac{ql^2}{10}+\frac{2}{3\alpha}\left[1-\sqrt{1-\frac{1}{5}\alpha\left(\frac{3ql^2}{8}\right)-\frac{8}{75}\alpha^2\left(\frac{3ql^2}{8}\right)^2}\right]$, $M_C(\infty)=\frac{l}{2}V_B(\infty)-\frac{ql^2}{8}$; $V_A(\infty)=\frac{3ql}{5}+\frac{2}{3\alpha l}\left[1-\sqrt{1-\frac{1}{5}\alpha\left(\frac{3ql^2}{8}\right)-\frac{8}{75}\alpha^2\left(\frac{3ql^2}{8}\right)^2}\right]$, $V_B(\infty)=ql-V_A(\infty)$	$M_A(\infty)=\frac{ql^2}{8}$; $M_C(\infty)=\frac{ql^2}{16}$, $V_A(\infty)=\frac{5}{8}ql$, $V_B(\infty)=\frac{3}{8}ql$

1	2	3	4	5
			$M_{A(\infty)} = \frac{7Pl}{48} + \frac{2}{3\alpha}\left[1-\sqrt{1-0{,}4\alpha\left(\frac{5Pl}{16}\right)-0{,}49\alpha^2\left(\frac{5Pl}{16}\right)^2}\right]$ $M_{C(\infty)} = \frac{1}{2} l V_{B(\infty)}$; $V_{A(\infty)} = \frac{31}{48}P + \frac{2}{3\alpha l}\left[1-\sqrt{1-0{,}4\alpha\left(\frac{5Pl}{16}\right)-0{,}49\alpha^2\left(\frac{5Pl}{16}\right)^2}\right]$; $V_{B(\infty)} = P - V_{A(\infty)}$	$M_{A(\infty)} = \frac{3}{16}Pl$; $M_{C(\infty)} = \frac{5}{32}Pl$; $V_{A(\infty)} = \frac{11}{16}P$; $V_{B(\infty)} = \frac{5}{16}P$.

В таблице указаны абсолютные значения и действительные направления реактивных усилий. В случае линейной ползучести реактивные усилия, вызванные внешними нагрузками совпадают с соответствующими значениями упругой задачи.

Литература

I. Ржаницын А.Р. Теория ползучести.М.,Стройиздат,1968,с.303.