УДК 624.04: 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕН БЕСКАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ

С. Ф. Клованич, И. Л. Воробьева
(ОГАСА, Одесса, Украина)

1. Введение. Методы расчета бескаркасных зданий основаны, как правило, на двух принципиально различных подходах. В первом из них здание рассматривается как совокупность пространственных стержневых элементов, объединенных между собой непрерывными или дискретными податливыми связями. Второй основан на представлении здания в виде ансамбля конечных элементов, чаще всего простейшего вида. Достоинства и недостатки этих подходов широко известны. Так, в первом случае, при относительно небольшом числе разрешающих уравнений не представляется возможным точно описать изменение геометрии здания по высоте. Второй подход приводит к колоссальному числу неизвестных и сложно реализуем. Поэтому на практике получают распространение методы, сочетающие элементы обоих подходов [1].

Здесь развиваются основные положения работы [1], где здание рассматривается как совокупность сложных конечных элементов, характеристики которых получены таким образом, чтобы отразить, по возможности наиболее полно, характер работы здания при минимальном числе разрешающих уравнений.

2. Расчетная схема здания. Бескаркасное здание представляет собой сложную совокупность плоских вертикальных и горизонтальных панелей (элементов), как правило, грямоугольной формы. Часть из этих элементов имеют прямоугольные отверстия - проемы (рис. 1). Если каждую панель рассматривать в виде одного или двух конечных элементов сложной формы (суперэлементов), то здание в целом можно рассматривать как систему таких элементов и применить для его расчета хорошо известный метод суперэлементов. При этом, следуя общепринятой в большинстве исследований гипотезе, примем, что горизонтальные элементы, моделирующие работу перекрытий, являются абсолютно жесткими. Это позволяет существенной упростить задачу и свести ее к расчету стен здания.

3. Элемент в местной системе координат. Рассмотрим типичный суперэлемент, моделирующий работу стеновой панели с проемом, состоящий из четырех субпараметрических восьмиузловых плоских элементов (рис. 1в). Процедура получения матрицы жесткости i-го элемента $[K]_i$ в системе координат x,y, совпадающей с его плоскостью, достаточно подробно описана в работе [2]. Для получения матрицы жесткости суперэлемента в той же, местной, системе координат прежде всего необходимо пронумеровать степени его свободы. В соответствии с [2] сначала нумеруются степени свободы узлов, лежащих на границе, затем степени свободы внутренних узлов (рис. 2). Тогда матрица индексов [2], строки которой содержат номера узловых перемещений, будет иметь вид

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 21 & 22 & 25 & 26 & 9 & 10 & 17 & 18 & 23 & 24 & 19 & 20 \\ 1 & 2 & 21 & 22 & 5 & 6 & 31 & 32 & 17 & 18 & 11 & 12 & 37 & 38 & 27 & 28 \\ 31 & 32 & 35 & 36 & 5 & 6 & 7 & 8 & 33 & 34 & 37 & 38 & 13 & 14 & 39 & 40 \\ 25 & 26 & 3 & 4 & 35 & 36 & 7 & 8 & 19 & 20 & 29 & 30 & 39 & 40 & 15 & 16 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Данная матрица используется для объединения четырех элементов в один. Затем необходимо исключить неизвестные, связанные с внутренними узлами. Для этого используется суперэлементная процедура, которая начинается с разбиения вектора узловых перемещений $\{q\}=\{q_1 \ldots q_{40}\}$ ансамбля четырех элементов на два составляющих его вектора $\{q\}=\{\{q\}_1 \ \{q\}_2\}$ где $\{q\}_1=\{q_1 \ldots q_{16}\}$ - перемещения внешних (граничных) узлов, $\{q\}_2=\{q_{17} \ldots q_{40}\}$ - перемещения внутренних (исключаемых) узлов. Аналогично представляются и вектора узловых реакций элемента $\{R\}=\{\{R\}_1 \ \{R\}_2\}$. Связь между векторами $\{R\}$ и $\{q\}$ имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \{R\}_1 \\ \{R\}_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} \\ [K]_{12}^T & [K]_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\}_1 \\ \{q\}_2 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

Исключая $\{q\}_2$ из соотношений (2), получим матрицу жесткости суперэлемента в виде

$$\{R\} = [K]\{q\}, \qquad (3)$$

где $\{R\} = \{R\}_1 - [K]_{12}[K]_{22}^{-1}\{R\}_2$;

$[K] = [K]_{11} - [K]_{12}[K]_{22}^{-1}[K]_{12}^T$.

Полученный суперэлемент с 16-ю степенями свободы может быть использован в практических расчетах зданий на статические воздействия. Однако, при проектировании наибольший интерес представляет прогнозирование работы здания при динамических нагрузках (ветровых, сейсмических). При этом, согласно существующим нормативным документам, статические эквиваленты горизонтальных динамических сил "конденсируются" в уровнях перекрытий. Ясно, что в этом случае все узлы суперэлемента, кроме угловых, остаются ненагруженными, а расчетная схема здания становится некорректной. Для приведения расчетной схемы здания в соответствии с характером приложения нагрузок необходимо продолжить исключение неизвестных по описанной выше процедуре. Исключению подлежат перемещения всех узлов на внешних сторонах, кроме угловых. В результате в рассмотрении остаются только первых восемь узловых перемещений, выделенных на рис. 2.

Отметим, что процедура (1) носит название суперэлементной рекурсии или "статической конденсации" и на практике осуществляется с помощью треугольной факторизации Гаусса [2].

4. Конечный элемент в общей системе координат. Прежде чем перейти к построению окончательной матрицы жесткости элемента в общей системе координат x, y, z, учтем следующие обстоятельства. Во-первых, поскольку перекрытия считаются недеформируемыми в своей плоскости, то перемещения под номерами 1,3 и 5,7 (рис. 2) попарно равны между собой. Во-вторых, в общем случае, перекрытия содержат не только поступательные, но и вращательные составляющие перемещений вокруг вертикальных осей, проходящих через центры жесткостей. Этот поворот φ_i в уровне i-го перекрытия, в свою очередь, оказывает влияние и на горизонтальные перемещения, которые получают приращения $\Delta_i = h_i \varphi_i$. Здесь h_i – расстояние от центра жесткости до плоскости элемента в уровне i-го перекрытия. Принимая во внимание перечисленное, перемещения конечного элемента, находящегося между ярусами i и i+1, в его плоскости будут иметь вид, представленный на рис. 3а. Обозначим эти перемещения вектором $\{\bar{\bar{q}}\} = \{\bar{\bar{q}}_1 \ldots \bar{\bar{q}}_8\}$, а перемещения элемента, изображенного на рис. 3б, вектором $\{\bar{q}\} = \{\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_8\}$ Между этими двумя векторами нетрудно установить зависимость

$$\{\bar{q}\} = [H] \{\bar{\bar{q}}\} . \tag{4}$$

в которой квадратная матрица [H] имеет вид

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h_{i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим тот же элемент, разложив горизонтальные узловые перемещения на составляющие вдоль осей x и y (рис. 4б). В результате число компонент вектора перемещений увеличится до десяти и они могут быть представлены вектором $\{q\} = \{q_1, \ldots q_{10}\}$. Между векторами $\{q\}$ и $\{\bar{q}\}$ существует зависимость

$$\{q\} = [L]\ \{\bar{q}\}\ , \qquad (5)$$

где матрица $[L]$ размером 8x10 имеет вид

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Подставив в уравнение (4) соотношение (5), получим

$$\{q\} = [H]\ [L]\ \{\bar{\bar{q}}\} = [T]\ \{\bar{\bar{q}}\}\ . \qquad (6)$$

Теперь, имея в виду (6), используя стандартные для метода конечных элементов преобразования координат, получим выражение для матрицы жесткости элемента размером 10x10 в общей системе координат

$$[K] = [T]\ [\bar{\bar{K}}]\ [T] \qquad (7)$$

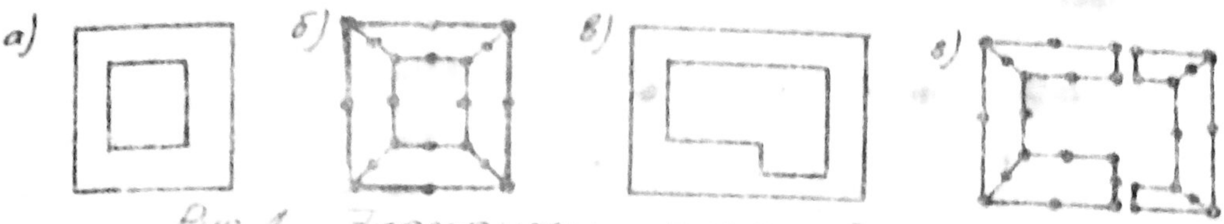

Рис 1. Элементы панелей стен.

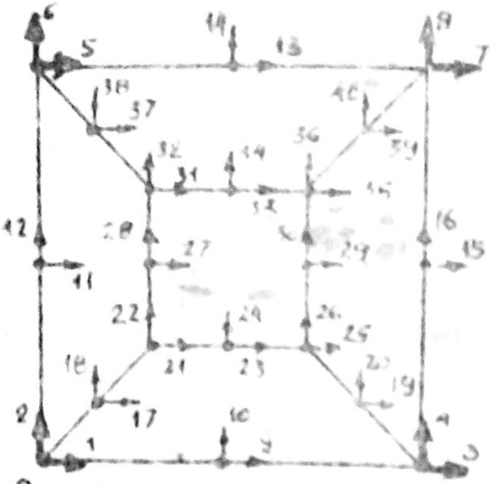

Рис. 2 Нумерация узловых перемещений

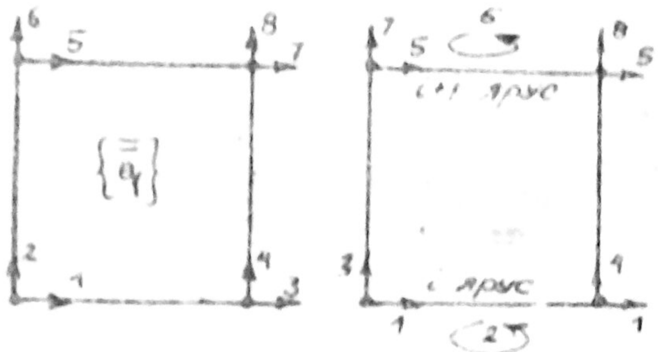

Рис. 3. Элемент в местной системе координат

Рис. 4. Конечный элемент в общей системе координат.

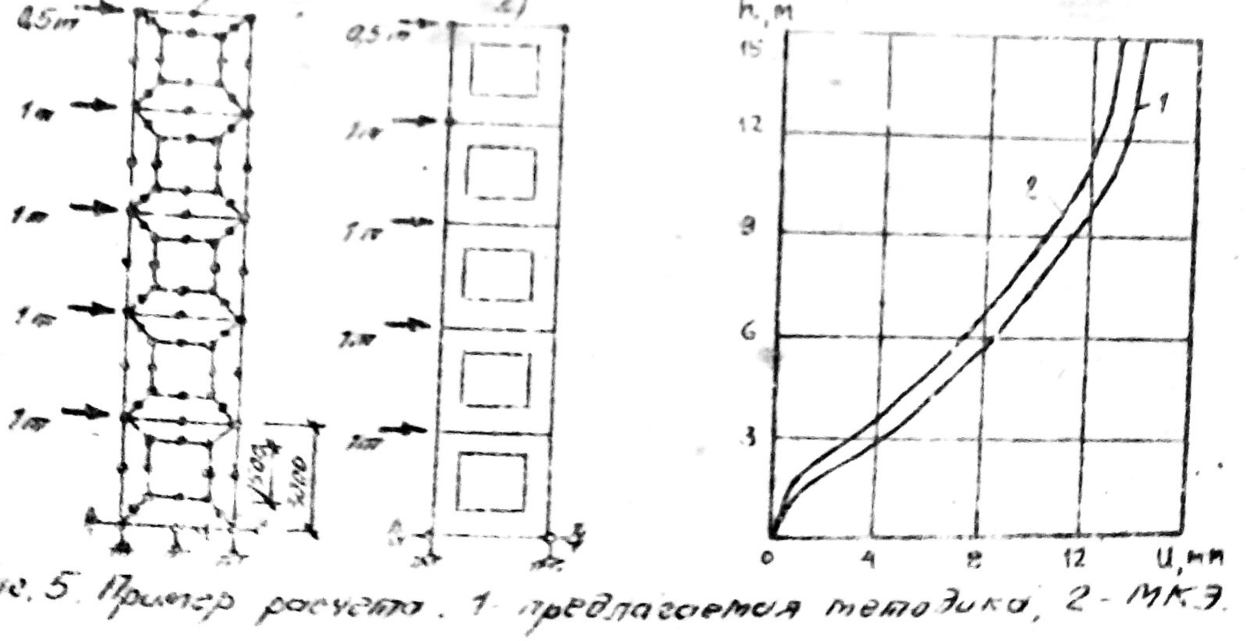

Рис. 5. Пример расчета. 1- предлагаемая методика, 2 - МКЭ.

Отметим, что в матрице жесткости элемента необходимо учесть его жесткость на кручение. Для этого к компонентам матрицы K_{55} и K_{66} необходимо добавить величину GJ/2h, а из K_{56} и K_{65} вычесть ту же величину. Здесь G - модуль сдвига, J - момент инерции при кручении, h - высота панели яруса.

5. Определение усилий в элементах. При использовании стандартных процедур МКЭ можно получить нормальные и касательные напряжения по точкам интегрирования конечных элементов. Между тем проверка прочности, армирование стен осуществляется согласно СНиП по усилиям - моментам, поперечным и продольным силам. Для определения этих усилий конечный элемент с проемом заменялся эквивалентной,статически неопределимой системой в виде прямоугольной рамы замкнутого контура, находящейся под действием линейных узловых смещений и использовался метод перемещений.

6. Программа и пример расчета. Описанная процедура была реализована в виде фортран-программы и включена в программный комплекс "PRIZ-PC" [3]. Для проверки эффективности методики расчитывалась многоэтажная рама. Расчет осуществлялся в два этапа. На первом этапе рама представлялась совокупностью субпараметрических конечных четырехугольных конечных элементов (рис. 5а). На втором расчетная модель рамы принималась в виде суперэлементов, представленных выше (рис. 5б). Нагрузка в обоих случаях прикладывалась горизонтально в виде системы сосредоточенных сил в уровнях перекрытий. Результаты расчетов в виде эпюр перемещений представлены на рис. 5в. Видно хорошее их совпадение.

Литература

1. Klovanich S.F., Shkurovsky V.M. Finite Element Analisis of Non-Frame Reinforsed Concrete Buildings by Seismic Loading //Problemy Naukowo-Badawcze Budownictwa/Tom 2. Teoria Konstrukcji. - Rzeszów-Krynica-Warszawa, 1994. - с. 123-129.

2. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М., Стройиздат, 1982. - 448 с.

3. Программа расчета бескаркасных зданий на сейсмические воздействия (PRIZ-PC)/Клованич С.Ф., Шкуровский В.М. - Одесса, 1994.