

**ЧАСТОТЫ И СОБСТВЕННЫЕ ФОРМЫ ПРОДОЛЬНЫХ
КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ
ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНО
РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ**

Крутий Ю.С. (Одесская государственная академия строительства и архитектуры)

**FREQUENCIES AND OWN FORMS OF LONGITUDINAL
FLUCTUATIONS OF THE NON-UNIFORM DIRECT CORE OF
VARIABLE SECTION WITH CONTINUOUSLY ALLOCATED
WEIGHT**

Krutiy Yu. S. (The Odessa State Academy of Building and Architecture)

Предлагается метод отыскания частот и собственных форм продольных колебаний для произвольного неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения с произвольной непрерывно распределенной массой. В качестве примера исследованы свободные колебания консольного клина.

Ключевые слова: стержень, продольные колебания, частотное уравнение, коэффициенты колебаний, частота колебаний, собственная форма колебаний, консольный клин.

The method of search of frequencies and own forms of longitudinal fluctuations for any non-uniform direct core of variable cross-section section with any continuously allocated weight is offered. As an example free fluctuations of a console wedge are investigated.

Keywords: a core, longitudinal fluctuations, the frequency equation, factors of fluctuations, frequency of fluctuations, own form of fluctuations, console wedge.

Постановка задачи

В работе [1] построено точное решение дифференциального уравнения продольных колебаний стержня для случая, когда коэффициент упругости и погонная масса представляют собой произвольные непрерывные функции. Там же отмечалось, что в связи с наличием точного решения становится возможным создание алгоритма отыскания частот и собственных форм колебаний для

произвольного неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения с произвольной непрерывно распределенной массой.

Ставится задача: для указанного выше стержня требуется выписать частотные уравнения для разных случаев граничных условий; указать способ определения частот собственных колебаний стержня; выписать соответствующие этим частотам собственные формы колебаний и указать способ их численной реализации.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Исходные формулы. Продольную ось x совместим с осью стержня и будем придерживаться принятых в [1] представлений для модуля упругости $E(x) = E_0\phi(x)$, площади поперечного сечения $F(x) = F_0\psi_1(x)$ и плотности материала стержня $\rho(x) = \rho_0\psi_2(x)$. Здесь E_0, F_0, ρ_0 — соответствующие постоянные параметры, а $\phi(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ — безразмерные функции. Для коэффициента упругости и погонной массы стержня соответственно полагаем

$$k(x) = k_0A(x), \quad m(x) = m_0B(x),$$

где $k_0 = E_0F_0$, $A(x) = \phi(x)\psi_1(x)$, $m_0 = \rho_0F_0$, $B(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$.

Выпишем из [1] формулы для точки оси стержня с координатой x , которыми определяется амплитудное значение продольного перемещения (главная форма свободных колебаний) $v(x)$ и продольная сила $N(x)$:

$$v(x) = v(0)\Omega_1(x) + N(0)\Omega_2(x); \quad (1)$$

$$N(x) = k_0A(x)[v(0)\Omega_1'(x) + N(0)\Omega_2'(x)]; \quad (2)$$

$$\Omega_1(x) = \alpha_0(x) - \lambda^2\alpha_1(x) + \lambda^4\alpha_2(x) - \lambda^6\alpha_3(x) + \dots;$$

$$\Omega_2(x) = \frac{1}{k_0}(\beta_0(x) - \lambda^2\beta_1(x) + \lambda^4\beta_2(x) - \lambda^6\beta_3(x) + \dots);$$

$$\alpha_0(x) = 1, \alpha_i(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) \alpha_{i-1}(x) dx dx; \quad (3)$$

$$\beta_0(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)} dx;$$

$$\beta_i(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) \beta_{i-1}(x) dx dx \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Здесь $\lambda = \omega \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$, где ω — неизвестная частота гармонических колебаний стержня во времени. Кроме того, определим также необходимые для дальнейшего функции:

$$\alpha_0^*(x) = 0, \quad \alpha_i^*(x) = A(x)\alpha_i'(x) = \int_0^x B(x)\alpha_{i-1}(x) dx \quad (5)$$

$$\beta_0^*(x) = 1, \quad \beta_i^*(x) = A(x)\beta_i'(x) = \int_0^x B(x)\beta_{i-1}(x) dx (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

Помимо рекуррентных формул (3), (4), (5), (6), функции $\alpha_i(x), \beta_i(x), \alpha_i^*(x), \beta_i^*(x)$ представимы в явном виде:

$$\alpha_i(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) \dots \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) dx dx \dots dx dx, \quad (7)$$

$$\beta_i(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) \dots \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) \int_0^x \frac{1}{A(x)} dx dx dx \dots dx dx, \quad (8)$$

$$\alpha_i^*(x) = \int_0^x B(x) \int_0^x \frac{1}{A(x)} \dots \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) dx dx \dots dx dx, \quad (9)$$

$$\beta_i^*(x) = \int_0^x B(x) \int_0^x \frac{1}{A(x)} \dots \int_0^x B(x) \int_0^x \frac{1}{A(x)} dx dx \dots dx dx. \quad (10)$$

Здесь в каждой из формул (7), (10) содержится всего $2i$ интегралов. Формулы (8) и (9) содержат $2i + 1$ и $2i - 1$ интегралов соответственно.

Следует обратить внимание, что $\alpha_i(x) \geq 0, \beta_i(x) \geq 0, \alpha_i^*(x) \geq 0, \beta_i^*(x) \geq 0$, причем равенство нулю достигается, только в точке $x = 0$. Это следует из неравенств $A(x) > 0, B(x) > 0$ и свойств определенных интегралов.

Безразмерные функции. Для функций $\alpha_i(x), \beta_i(x), \alpha_i^*(x), \beta_i^*(x)$ определим соответствующие им безразмерные функции. Для этого введем безразмерную координату $\xi = \frac{x}{l}$ (l — длина стержня) и обозначим $\tilde{A}(\xi) = A(l\xi), \tilde{B}(\xi) = B(l\xi)$. Далее осуществим замену переменных $x = l\xi$ последовательно во всех интегралах формулы (9), начиная с самого внешнего и заканчивая самым внутренним интегралом. Учитывая на каждом шаге, что $dx = l d\xi$, получим

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(l\xi) = l^{2i} \int_0^\xi \frac{1}{\tilde{A}(\xi)} \int_0^\xi \tilde{B}(\xi) \dots \int_0^\xi \frac{1}{\tilde{A}(\xi)} \int_0^\xi \tilde{B}(\xi) d\xi d\xi \dots d\xi d\xi.$$

Отсюда заключаем, что функции $\tilde{\alpha}_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{l^{2i}}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) являются безразмерными. Поступая аналогично с формулами (8), (9), (10), приходим к выводу, что функции $\tilde{\beta}_i(x) = \frac{\beta_i(x)}{l^{2i+1}}$, $\tilde{\alpha}_i^*(x) = \frac{\alpha_i^*(x)}{l^{2i-1}}$, $\tilde{\beta}_i^*(x) = \frac{\beta_i^*(x)}{l^{2i}}$ также безразмерные.

Структура формулы для частоты колебаний. Введем обозначение $K = \lambda l$. Тогда формула для частоты запишется так $\omega = \frac{K}{l} \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}}$, где K — коэффициент колебаний [1], подлежащий определению. Выбор формулы для частоты именно такой структуры продиктован общеизвестными классическими результатами для однородных стержней постоянного сечения. Коэффициенты колебаний в таком случае безразмерные (не зависят от длины l), вследствие чего, частоты обратно пропорциональны длине стержня. Такое свойство присуще спектру частот и для некоторых других типов стержней. В частности, как показано в [1], оно имеет место для однородного конического стержня.

Возникает вопрос: свойство обратной пропорциональности между частотой и длиной стержня имеет место только для определенных типов стержней или является глобальным и справедливо для стержня с произвольным непрерывным коэффициентом упругости и произвольной непрерывной погонной массой? Ответ на этот вопрос будет дан ниже в форме теоремы.

Частотные уравнения и главные формы колебаний. Ограничимся случаями, когда любой из концов стержня либо свободен, либо жестко закреплен. Выпишем частотные уравнения и главные формы свободных колебаний (собственные формы колебаний) стержня в зависимости от граничных условий. При этом для частотных уравнений примем единую форму записи

$$\gamma_0 - \gamma_1 K^2 + \gamma_2 K^4 - \gamma_3 K^6 + \dots = 0, \quad (11)$$

где γ_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) — строго положительные коэффициенты. Способ вычисления этих коэффициентов будет зависеть от случая граничных условий.

Случай 1. Оба конца жестко закреплены: $v(0) = 0, v(l) = 0$. Реализуя первое условие, из формулы (1) получаем $v(x) = N(0)\Omega_2(x)$. Второе граничное условие приводит к равенству $N(0)\Omega_2(l) = 0$. Поскольку ищется нетривиальное решение, то неизбежно приходим к условию $\Omega_2(l) = 0$. Записывая его в явном виде, получаем

$$\beta_0(l) - \beta_1(l)\lambda^2 + \beta_2(l)\lambda^4 - \beta_3(l)\lambda^6 + \dots = 0.$$

Произведем здесь замену $\lambda = \frac{K}{l}$ и разделим обе части уравнения на длину стержня l . После этого частотное уравнение будет иметь вид (11), причем его коэффициенты $\gamma_i = \frac{\beta_i(l)}{l^{2i+1}} = \tilde{\beta}_i(l) > 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) являются безразмерными величинами.

Собственные формы колебаний в этом случае определяются формулой

$$v_j(x) = A(0)v_j'(0)(\beta_0(x) - \lambda_j^2\beta_1(x) + \lambda_j^4\beta_2(x) - \lambda_j^6\beta_3(x) + \dots),$$

где $\lambda_j = \frac{K_j}{l}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), K_j — корни уравнения (11). Переходя к безразмерным функциям, получим $v_j(x) = lA(0)v_j'(0)\tilde{v}_j(x)$, где

$$\tilde{v}_j(x) = \tilde{\beta}_0(x) - K_j^2\tilde{\beta}_1(x) + K_j^4\tilde{\beta}_2(x) - K_j^6\tilde{\beta}_3(x) + \dots \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Случай 2. Один конец стержня закреплен, а второй свободен. Очевидно, что с точки зрения окончательных результатов не принципиально, какой из концов считать закрепленным, а какой свободным. По сути это вопрос удобства для конкретного вида стержня. Чтобы иметь в дальнейшем возможность выбора, рассмотрим здесь оба варианта. Вид формул, которыми определяется решение, для этих вариантов будет разным.

А. Конец $x = 0$ свободен, а конец $x = l$ закреплен: $N(0) = 0$, $v(l) = 0$. Здесь на основании (1) получим $v(x) = v(0)\Omega_1(x)$. Реализация второго граничного условия приводит к частотному уравнению $v(0)\Omega_1(l) = 0$. Запишем его в явном виде

$$1 - \alpha_1(l)\lambda^2 + \alpha_2(l)\lambda^4 - \alpha_3(l)\lambda^6 + \dots = 0$$

и положим $\lambda = \frac{K}{l}$. В итоге приходим к частотному уравнению (11), где $\gamma_i = \frac{\alpha_i(l)}{l^{2i}} = \tilde{\alpha}_i(l) > 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) безразмерные величины.

Формы собственных колебаний определяются равенством

$$v_j(x) = v_j(0)(1 - \lambda_j^2\alpha_1(x) + \lambda_j^4\alpha_2(x) - \lambda_j^6\alpha_3(x) + \dots).$$

В формате безразмерных функций будем иметь $v_j(x) = v_j(0)\tilde{v}_j(x)$, где

$$\tilde{v}_j(x) = 1 - K_j^2 \tilde{\alpha}_1(x) + K_j^4 \tilde{\alpha}_2(x) - K_j^6 \tilde{\alpha}_3(x) + \dots \quad (j = 1, 2, 3 \dots).$$

В. Конец $x = 0$ закреплен, а конец $x = l$ свободен: $v(0) = 0$, $N(l) = 0$. После реализации первого условия, из формулы (2) будем иметь $N(x) = N(0)k_0 A(x)\Omega'_2(x)$. Реализуя второе граничное условие, получаем частотное уравнение $A(l)\Omega'_2(l) = 0$, или в явном виде

$$1 - \beta_1^*(l)\lambda^2 + \beta_2^*(l)\lambda^4 - \beta_3^*(l)\lambda^6 + \dots = 0.$$

Замена $\lambda = \frac{\kappa}{l}$ приводит уравнение к виду (11), где коэффициенты $\gamma_i = \frac{\beta_i^*(l)}{l^{2i}} = \tilde{\beta}_i^*(l) > 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) также являются безразмерными.

Для форм собственных колебаний здесь остаются справедливыми соответствующие формулы из случая 1.

Случай 3. Концы стержня не закреплены: $N(0) = 0$, $N(l) = 0$. Здесь для продольной силы, с учетом первого условия, получим $N(x) = v(0)k_0 A(x)\Omega'_1(x)$. Реализация второго условия приводит к частотному уравнению $A(l)\Omega'_1(l) = 0$, или в явном виде

$$-\alpha_1^*(l)\lambda^2 + \alpha_2^*(l)\lambda^4 - \alpha_3^*(l)\lambda^6 + \alpha_4^*(l)\lambda^8 - \dots = 0.$$

Осуществим здесь замену $\lambda = \frac{\kappa}{l}$ и после этого разделим обе части уравнения на величину $-\frac{\kappa^2}{l}$. Тогда оно примет вид (11), причем коэффициенты $\gamma_i = \frac{\alpha_{i+1}^*(l)}{l^{2i+1}} = \tilde{\alpha}_{i+1}^*(l) > 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) и здесь будут безразмерными.

Для форм собственных колебаний здесь справедливы соответствующие формулы из случая 2А.

Итак, во всех случаях коэффициенты частотного уравнения (11) являются безразмерными. Следовательно, и его корни будут безразмерными. После того, как эти корни (коэффициенты колебаний) найдены и записаны в порядке возрастания K_1, K_2, K_3, \dots , будем иметь соответствующие им частоты колебаний

$$\omega_j = \frac{\kappa_j}{l} \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0}} \quad (j = 1, 2, 3 \dots). \quad (12)$$

Тем самым, для рассмотренных здесь случаев граничных условий справедлива следующая теорема.

Теорема. Для произвольного непрерывного коэффициента упругости и произвольной непрерывной погонной массы, частоты собственных продольных колебаний прямого стержня обратно пропорциональны его длине.

Что касается закона собственных колебаний стержня, то он фактически определяется соответствующей безразмерной функцией $\tilde{v}_j(x)$, а постоянный множитель перед ней задает масштаб и размерность.

Таким образом, в явном аналитическом виде выписаны частотные уравнения и формы собственных продольных колебаний стержня. Далее возникает естественный вопрос о возможных способах реализации этих формул. Один из способов, очевидно, заключается в выявлении и изучении таких частных законов изменения коэффициента упругости и погонной массы стержня, для которых $\Omega_1(x), \Omega_2(x)$ предстают элементарными функциями. В таких случаях вопрос отыскания частот сводится к решению трансцендентных уравнений. Один из таких случаев был рассмотрен в [1].

Однако, с точки зрения общности результатов, гораздо важнее указать эффективный способ численной реализации для найденных точных формул, который был бы пригодным для любого непрерывного коэффициента упругости и любой непрерывной погонной массы. Наличие такого способа придаст практическую ценность найденным точным решениям.

Численная реализация. Прежде всего, укажем эффективный способ численной реализации формул, которыми определены безразмерные функции $\tilde{\alpha}_i(x), \tilde{\beta}_i(x), \tilde{\alpha}_i^*(x), \tilde{\beta}_i^*(x)$.

Стремясь сократить выкладки, обозначим $\delta_0^{(1)}(x) = \alpha_0(x)$, $\delta_0^{(2)}(x) = \beta_0(x)$ и положим

$$\delta_i^{(q)}(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) \delta_{i-1}^{(q)}(x) dx dx \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (q = 1, 2), \quad (13)$$

или, что равносильно,

$$\delta_i^{(q)}(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) \dots \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x B(x) \delta_0^{(q)}(x) dx dx \dots dx dx. \quad (14)$$

Кроме того, обозначим $[\delta_i^{(q)}(x)]^* = \int_0^x B(x) \delta_{i-1}^{(q)}(x) dx$. Тогда, очевидно,

$$\alpha_i(x) = \delta_i^{(1)}(x), \quad \beta_i(x) = \delta_i^{(2)}(x), \quad \alpha_i^*(x) = [\delta_i^{(1)}(x)]^*, \quad \beta_i^*(x) = [\delta_i^{(2)}(x)]^*. \quad (15)$$

Основная идея предлагаемого способа численной реализации заключается в аппроксимации безразмерных функций $\frac{1}{A(x)}, B(x)$ многочленами, которые примем здесь в виде:

$$\frac{1}{A(x)} = A_0 + A_1 \left(\frac{x}{l}\right) + A_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + A_s \left(\frac{x}{l}\right)^s; \quad (16)$$

$$B(x) = B_0 + B_1 \left(\frac{x}{l}\right) + B_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + B_p \left(\frac{x}{l}\right)^p, \quad (17)$$

где $A_n (n = 0, 1, \dots, s), B_k (k = 0, 1, \dots, p)$ — безразмерные коэффициенты.

Тогда, на основании (14) заключаем, что $\delta_i^{(q)}(x)$ также многочлен. Наибольшая его степень равна $ip + (i + q - 1)s + 2i + q - 1$, а наименьшая $2i + q - 1$. Следовательно, справедливо представление

$$\delta_i^{(q)}(x) = x^{2i+q-1} \sum_{j=0}^{ip+(i+q-1)s} c_{ij}^{(q)} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

где коэффициенты $c_{ij}^{(q)}$ подлежат определению.

Выполним последовательно все операции, предписанные формулой (13). Умножая два многочлена, получим

$$\begin{aligned} B(x)\delta_{i-1}^{(q)}(x) &= x^{2i+q-3} \left(\sum_{j=0}^p B_j \left(\frac{x}{l}\right)^j \right) \left(\sum_{j=0}^{(i-1)p+(i+q-2)s} c_{i-1,j}^{(q)} \left(\frac{x}{l}\right)^j \right) = \\ &= x^{2i+q-3} \sum_{j=0}^{ip+(i+q-2)s} d_{i-1,j}^{(q)} \left(\frac{x}{l}\right)^j, \end{aligned}$$

где

$$d_{i-1,j}^{(q)} = \sum_{k=0}^j B_{j-k} c_{i-1,k}^{(q)}, \quad (19)$$

причем $B_{j-k} = 0$, если $j - k > p$ и $c_{i-1,k}^{(q)} = 0$, если $k > (i - 1)p + (i + q - 2)s$. Тогда

$$\left[\delta_i^{(q)}(x) \right]^* = x^{2i+q-2} \sum_{j=0}^{ip+(i+q-2)s} \frac{d_{i-1,j}^{(q)}}{2i+j+q-2} \left(\frac{x}{l}\right)^j. \quad (20)$$

Снова применяя формулу для произведения многочленов, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{A(x)} \left[\delta_i^{(q)}(x) \right]^* &= x^{2i+q-2} \left(\sum_{j=0}^s A_j \left(\frac{x}{l} \right)^j \right) \left(\sum_{j=0}^{ip+(i+q-2)s} \frac{d_{i-1,j}^{(q)}}{2i+j+q-2} \left(\frac{x}{l} \right)^j \right) = \\ &= x^{2i+q-2} \sum_{j=0}^{ip+(i+q-1)s} e_{i-1,j}^{(q)} \left(\frac{x}{l} \right)^j. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь

$$e_{i-1,j}^{(q)} = \sum_{n=0}^j A_{j-n} \frac{d_{i-1,n}^{(q)}}{2i+n+q-2}, \quad (22)$$

причем $A_{j-n} = 0$, если $j-n > s$ и $d_{i-1,n}^{(q)} = 0$, если $n > ip + (i+q-2)s$. Наконец, интегрируя (21), получим

$$\delta_i^{(q)}(x) = x^{2i+q-1} \sum_{j=0}^{ip+(i+q-1)s} \frac{e_{i-1,j}^{(q)}}{2i+j+q-1} \left(\frac{x}{l} \right)^j.$$

Сопоставляя последнюю формулу с представлением (18), приходим к формуле

$$c_{ij}^{(q)} = \frac{e_{i-1,j}^{(q)}}{2i+j+q-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (j = 0, 1, \dots, ip + (i+q-1)s). \quad (23)$$

Здесь $e_{i-1,j}^{(q)}$ вычисляется через $d_{i-1,n}^{(q)}$, которое в свою очередь вычисляется через $c_{i-1,k}^{(q)}$. Следовательно, формула (23) представляет собой рекуррентное соотношение, согласно которому каждое следующее значение $c_{ij}^{(q)}$ выражается через предыдущее.

Из формулы (18) имеем $\delta_0^{(q)}(x) = x^{q-1} \sum_{j=0}^{(q-1)s} c_{0j}^{(q)} \left(\frac{x}{l} \right)^j$. Отсюда

$$\delta_0^{(1)}(x) = c_{00}^{(1)}, \quad \delta_0^{(2)}(x) = x \sum_{j=0}^s c_{0j}^{(2)} \left(\frac{x}{l} \right)^j.$$

С другой стороны

$$\delta_0^{(1)}(x) = \alpha_0(x) = 1, \quad \delta_0^{(2)}(x) = \beta_0(x) = \int_0^x \frac{1}{A(x)} dx = x \sum_{j=0}^s \frac{A_j}{j+1} \left(\frac{x}{l} \right)^j.$$

Следовательно, $c_{00}^{(1)} = 1$, $c_{0j}^{(2)} = \frac{A_j}{j+1}$ ($j = 0, 1, \dots, s$).

Теперь, когда начальные значения $c_{00}^{(1)}, c_{0j}^{(2)}$ найдены, формула (23) становится вполне определенной, а значит, все коэффициенты $c_{ij}^{(q)}, d_{i-1,j}^{(q)}, e_{i-1,j}^{(q)}$ можно считать известными. Следует особо

подчеркнуть, что эти коэффициенты безразмерные, поскольку вычисляются через безразмерные величины A_n, B_k .

Формулу (23) можно записать и в развернутом виде

$$c_{ij}^{(q)} = \frac{1}{2i+j+q-1} \sum_{n=0}^j \left(\frac{A_{j-n}}{2i+n+q-2} \sum_{k=0}^n B_{n-k} c_{i-1,k}^{(q)} \right),$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots) (j = 0, 1, \dots, ip + (i + q - 1)s).$$

Полагая теперь в формулах (18), (20) поочередно $q = 1$ и $q = 2$, согласно (15), легко выписать квадратуры для функций $\alpha_i(x), \beta_i(x), \alpha_i^*(x), \beta_i^*(x)$. После этого для соответствующих безразмерных функций будем иметь:

$$\tilde{\alpha}_i(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i} \sum_{j=0}^{i(p+s)} c_{ij}^{(1)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \tilde{\beta}_i(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i+1} \sum_{j=0}^{i(p+s)+s} c_{ij}^{(2)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \quad (24)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\tilde{\alpha}_0^*(x) = 0, \tilde{\alpha}_i^*(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i-1} \sum_{j=0}^{i(p+s)-s} \frac{d_{i-1,j}^{(1)}}{2i+j-1} \left(\frac{x}{l}\right)^j;$$

$$\tilde{\beta}_0^*(x) = 1, \tilde{\beta}_i^*(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i} \sum_{j=0}^{i(p+s)} \frac{d_{i-1,j}^{(2)}}{2i+j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Теперь легко выписать окончательные формулы для вычисления коэффициентов $\gamma_i (i = 0, 1, 2, \dots)$. Эти формулы содержатся в таблице 1.

Таблица 1

Случай	Коэффициенты характеристического уравнения
1	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{i(p+s)+s} c_{ij}^{(2)} (i = 0, 1, 2, \dots)$
2A	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{i(p+s)} c_{ij}^{(1)} (i = 0, 1, 2, \dots)$
2B	$\gamma_0 = 1, \gamma_i = \sum_{j=0}^{i(p+s)} \frac{d_{i-1,j}^{(2)}}{2i+j} (i = 1, 2, 3, \dots)$
3	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{i(p+s)+p} \frac{d_{ij}^{(1)}}{2i+j+1} (i = 0, 1, 2, \dots)$

Левая часть уравнения (11) представляет собой абсолютно сходящийся числовой ряд, что является следствием доказанного в работе [1] факта абсолютной и равномерной сходимости рядов $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, $\Omega'_1(x)$, $\Omega'_2(x)$. Поэтому, что касается разрешимости и метода вычисления корней уравнения (11), воспользуемся здесь ради краткости результатами работы [2], где рассматривалось подобное уравнение.

В результате, вычисление корней K_1, K_2, K_3, \dots частотного уравнения (11) сводится к последовательному отысканию корней многочленов $f_n(K^2)$ и $f_{n+2}(K^2)$, где

$$f_n(K^2) = \gamma_0 - \gamma_1 K^2 + \gamma_2 K^4 - \gamma_3 K^6 + \dots - \gamma_n K^{2n} \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Здесь вычисление корня K_j продолжают до тех пор, пока не найдется такое значение n , для которого выполнено условие

$$|K_j^{(n+2)} - K_j^{(n)}| < \varepsilon, \quad (25)$$

где $K_j^{(n)}, K_j^{(n+2)}$ — положительные корни многочленов $f_n(K^2)$, $f_{n+2}(K^2)$ соответственно, ε — заданная точность.

Формулы для собственных форм колебаний, которые представляют собой равномерно и абсолютно сходящиеся ряды, также можно заменить приближенными. Удерживая там некоторое конечное число первых $k + 1$ членов ряда, и пренебрегая остальными, в зависимости от граничных условий, получим

$$\tilde{v}_j(x) = 1 - K_j^2 \tilde{\alpha}_1(x) + K_j^4 \tilde{\alpha}_2(x) - \dots + (-1)^k K_j^{2k} \tilde{\alpha}_k(x), \quad (26)$$

или

$$\tilde{v}_j(x) = \tilde{\beta}_0(x) - K_j^2 \tilde{\beta}_1(x) + K_j^4 \tilde{\beta}_2(x) - \dots + (-1)^k K_j^{2k} \tilde{\beta}_k(x). \quad (27)$$

Выбирая здесь надлежащим образом значение k , всегда можно добиться желаемой точности вычислений. При выборе k полезно иметь в виду неравенства:

$$\tilde{\alpha}_{k+1}(x) \leq \tilde{\alpha}_{k+1}(l) = \sum_{j=0}^{(k+1)(s+p)} c_{k+1,j}^{(1)};$$

$$\tilde{\beta}_{k+1}(x) \leq \tilde{\beta}_{k+1}(l) = \sum_{j=0}^{(k+1)(s+p)+s} c_{k+1,j}^{(2)}$$

справедливые для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ и любого $x \in [0, l]$. Они следуют из того факта, что первые производные функций $\tilde{\alpha}_{k+1}(x)$,

$\tilde{\beta}_{k+1}(x)$ неотрицательны на отрезке $[0, l]$, а значит, эти функции являются монотонно возрастающими.

Алгоритм исследования продольных колебаний стержня.
Сформулируем, наконец, алгоритм отыскания частот и собственных форм колебаний для произвольного неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения с произвольной непрерывно распределенной массой:

1. Аппроксимируем заданные безразмерные функции $\frac{1}{A(x)}$, $B(x)$ многочленами (16), (17). При этом степени многочленов s и p в каждом конкретном случае выбираем из условия адекватного приближения;
2. Для текущего значения $n = 1, 3, 5, \dots$, применяя последовательно формулы (19), (22), (23), вычисляем числа $c_{ij}^{(q)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n + 2$) ($j = 0, 1, \dots, ip + (i + q - 1)s$). При этом, как промежуточный результат, находим также $d_{i-1, j}^{(q)}$. После этого, вычисляем коэффициенты γ_i ($i = 1, 2, \dots, n + 2$), применяя нужную формулу из таблицы 1. Формируем пару многочленов $f_n(K^2)$ и $f_{n+2}(K^2)$;
3. Задаем точность вычисления корней ε . Находим положительные корни $K_j^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) ($m \leq n$) многочлена $f_n(K^2)$, удовлетворяющие условию (25) и записываем их в порядке возрастания. Тогда, для корней частотного уравнения (11), полагаем $K_j = K_j^{(n)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Соответствующие частоты колебаний получаем по формуле (12).
4. Выбирая нужную формулу из (26), (27), а также используя квадратуры (24), строим графики собственных форм колебаний стержня, соответствующие найденным частотам (коэффициентам колебаний).

Следует особо отметить, что при реализации данного алгоритма есть возможность управлять точностью вычислений. При отыскании коэффициентов колебаний, помимо естественной погрешности округления, самим алгоритмом заложены два возможных источника погрешности. Первый из них – это погрешность аппроксимации функций $\frac{1}{A(x)}$, $B(x)$, которая затем влияет на точность вычисления коэффициентов частотного уравнения. Эту погрешность фактически можно нивелировать, поскольку за счет выбора нужной степени аппроксимации всегда можно добиться желаемой точности

приближения. Второй источник погрешности – это погрешность вычисления корней частотного уравнения. Как известно [3], в подобных ситуациях оценка погрешности проводится сравнением результатов расчета с различным числом удерживаемых членов ряда. Именно такая процедура реализуется алгоритмом и позволяет добиться желаемой точности вычислений за счет выбора параметра n .

Указанный алгоритм реализован программно.

Продольные колебания консольного клина. Рассмотрим в качестве примера однородный стержень в форме клина с постоянной толщиной d и длиной l . Высоты оснований клина обозначим a, b ($0 \leq a \leq b$).

Будем считать, что меньшее основание клина находится в точке $x = 0$ (свободный конец), а большее в точке $x = l$ (закрепленный конец), то есть имеет место случай 2А. Тогда высота поперечного сечения в точке x будет равна $a + \frac{b-a}{l}x$, а значит, для площади этого сечения можно записать $F(x) = db \left(\alpha + (1 - \alpha) \frac{x}{l} \right)$, где $\alpha = \frac{a}{b}$, причем $0 \leq \alpha \leq 1$. Далее, с учетом принятых выше обозначений, полагаем: $F_0 = bd$, $\psi_1(x) = \alpha + (1 - \alpha) \frac{x}{l}$. Кроме того, в силу однородности клина будем иметь: $\phi(x) \equiv 1$, $E = E_0$, $\psi_2(x) \equiv 1$, $\rho = \rho_0$. Следовательно, $A(x) = B(x) = \alpha + (1 - \alpha) \frac{x}{l}$.

Очевидно, при $\alpha = 0$ клин будет остроконечным, при $0 < \alpha < 1$ получим усеченный клин, а когда $\alpha = 1$ клин вырождается в стержень с постоянным поперечным сечением.

В случае 2А ключевую роль играют функции $\alpha_i(x)$. В частности, когда клин остроконечный, эти функции легко вычисляются аналитически:

$$\alpha_0(x) = 1, \alpha_i(x) = \int_0^x \frac{1}{x} \int_0^x x \alpha_{i-1}(x) dx dx = \frac{x^{2i}}{2^2 4^2 \dots (2i)^2} (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Тогда

$$\tilde{\alpha}_0(x) = 1, \tilde{\alpha}_i(x) = \frac{1}{2^2 4^2 \dots (2i)^2} \left(\frac{x}{l} \right)^{2i};$$

$$\gamma_0 = 1, \gamma_i = \tilde{\alpha}_i(l) = \frac{1}{2^2 4^2 \dots (2i)^2} (i = 1, 2, 3, \dots).$$

При этом частотное уравнение (11) и функция $\tilde{v}_j(x)$ принимают вид:

$$\gamma_0 - \gamma_1 K^2 + \gamma_2 K^4 - \dots = 1 - \frac{K^2}{2^2} + \frac{K^4}{2^2 4^2} - \dots = J_0(K) = 0;$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_j(x) &= 1 - K_j^2 \tilde{\alpha}_1(x) + K_j^4 \tilde{\alpha}_2(x) - K_j^6 \tilde{\alpha}_3(x) + \dots = \\ &= 1 - \frac{K_j^2}{2^2} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{K_j^4}{2^2 4^2} \left(\frac{x}{l}\right)^4 - \frac{K_j^6}{2^2 4^2 6^2} \left(\frac{x}{l}\right)^6 + \dots = J_0\left(K_j \frac{x}{l}\right), \end{aligned}$$

где J_0 — функция Бесселя с нулевым индексом [4].

Следовательно, коэффициентами колебаний K_j остроконечного консольного клина являются нули функции Бесселя, которые хорошо известны [5]. Первые три нуля этой функции приведены в таблице 2. Соответствующие формы собственных колебаний остроконечного клина также определяются посредством функции Бесселя $v_j(x) = v_j(0)J_0\left(K_j \frac{x}{l}\right)$ ($j = 1, 2, 3 \dots$).

Таблица 2

Когда стержень представляет собой усеченный клин, вычислить аналитически функции $\alpha_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) не представляется возможным. В таком случае воспользуемся сформулированным выше алгоритмом. При этом для вычисления $\alpha_i(x)$ используется первая из квадратурных формул (24). Заметим, что в данном примере функция $B(x)$ изначально представлена многочленом (17), где $p = 1, B_0 = \alpha, B_1 = 1 - \alpha$. Поэтому строить для нее аппроксимацию не потребуется.

α	Коэффициенты колебаний клина		
	K_1	K_2	K_3
0	2,4048	5,5201	8,6537
0,1	2,2085	5,3009	8,1179
0,2	2,0594	4,9873	8,0307
0,3	1,9500	4,8959	7,9719
0,4	1,8640	4,8399	7,9334
0,5	1,7940	4,8021	7,9089
0,6	1,7355	4,7748	7,8919
0,7	1,6856	4,7540	7,8791
0,8	1,6424	4,7374	7,8690
0,9	1,6045	4,7239	7,8608
1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$

В таблице 2 содержатся результаты вычислений первых трех коэффициентов колебаний усеченного консольного клина для каждого значения параметра α с шагом 0,1.

Остановимся подробнее на случае $\alpha = 0,5$. Для иллюстрации процесса вычислений, приведем корни многочленов $f_n(K^2)$ для разных значений n . Для первого корня:

$$K_1^{(1)} = 1,574411, K_1^{(3)} = 1,791704, K_1^{(5)} = 1,794009, K_1^{(7)} = 1,794013.$$

В качестве K_1 был принят корень многочлена пятой степени $K_1^{(5)}$. При этом $|K_1^{(7)} - K_1^{(5)}| = 0,000004$. При вычислении следующих по

возрастанию корней, для достижения высокой точности, приходится иметь дело с многочленами более высоких степеней. Так для второго корня: $K_2^{(7)} = 4,805658, K_2^{(9)} = 4,802081, K_2^{(11)} = 4,802064$. В качестве K_2 принят корень $K_2^{(9)}$. Здесь $|K_2^{(11)} - K_2^{(9)}| = 0,000017$, что свидетельствует о высокой точности расчетов. Для третьего корня: $K_3^{(11)} = 7,903751, K_3^{(13)} = 7,908937, K_3^{(15)} = 7,908980$. Здесь было положено $K_3 = K_3^{(13)}$, причем $|K_3^{(15)} - K_3^{(13)}| = 0,000043$. В итоге имеем такие первые три частоты собственных колебаний:

$$\omega_1 = \frac{1,7940}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \omega_2 = \frac{4,8021}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \omega_3 = \frac{7,9089}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Графики собственных форм колебаний, соответствующие найденным частотам изображены на рис. 1.

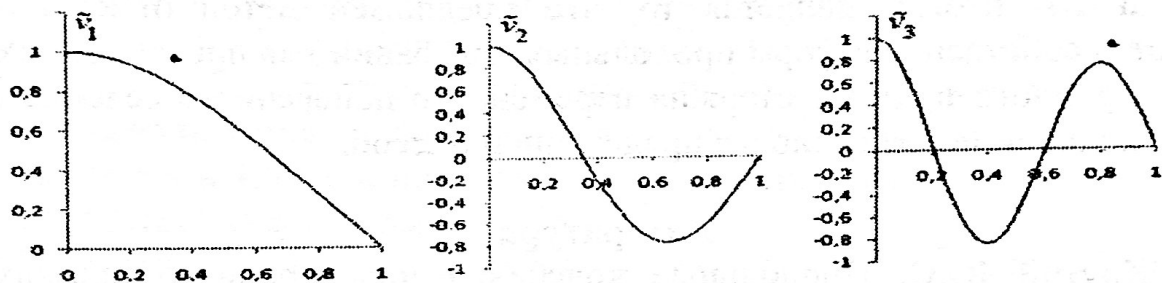


Рис. 1. Графики собственных форм колебаний усеченного клина, $\alpha = 0,5$

Практика вычислений показывает, что в формулах (26), (27) целесообразно полагать $k = n$, где n — степень многочлена $f_n(K^2)$, корень которого принят в качестве коэффициента колебаний. Это позволяет построить графики собственных форм с точностью не ниже той, которая достигнута при вычислении соответствующих коэффициентов колебаний. В нашем примере для первой собственной формы $k = 5$, для второй $k = 9$ и для третьей $k = 13$.

Заметим, что исследование продольных колебаний клина, соответствующего случаю $\alpha = 0,5$, встречается в [6]. Там методом Б.Г. Галеркина вычислены первые две частоты колебаний. В терминах принятых здесь обозначений, эти частоты равны: $\omega_1 = \frac{1,794}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \omega_2 = \frac{5,033}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. При полном совпадении первых частот, относительная погрешность между вторыми составляет 4,59%.

Наконец, самая простая ситуация возникает при $\alpha = 1$. Тогда $\tilde{\alpha}_i(x) = \frac{1}{(2i)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{2i}, \gamma_i = \frac{1}{(2i)!} (i = 0,1,2, \dots)$ и, как следствие, частотное

уравнение и формула для собственных форм колебаний приобретают вид $\cos K = 0$ и $v_j(x) = v_j(0) \cos K_j \frac{x}{l}$ ($j = 1, 2, 3 \dots$) соответственно.

Выводы

Завершено начатое в [1] исследование задачи о продольных колебаниях прямого стержня, когда его коэффициент упругости и погонная масса являются произвольными непрерывными функциями. Для трех случаев граничных условий, в безразмерном формате выписаны в явном аналитическом виде частотные уравнения и формулы для собственных форм колебаний стержня. Указан способ численной реализации полученных точных решений.

В качестве примера исследованы свободные продольные колебания клиновидного консольного стержня.

Главным итогом является то, что предложен метод отыскания частот и собственных форм продольных колебаний для произвольного неоднородного прямого стержня переменного поперечного сечения с произвольной непрерывно распределенной массой.

Литература

1. Крутий Ю.С. Продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной массой // Строительная механика и расчет сооружений. №1, 2011. с. 25-33.
2. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. №6, 2010. С. 22-29.
3. Ильин В. П., Карпов В.В., Масленников А. М. Численные методы решения задач строительной механики. – Мн.: Вышэйшая школа, 1990. – 349 с.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. – М.: Издательство иностранной литературы, 1949. – 783 с.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
6. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.