УДК 624.012.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СЖАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ПОЛНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА

Кобринец В.М., Дорофеев В.С. , Барданов В.Ю. *(Одесская Государственная Академия Строительства и Архитектуры)*

Получены формулы для определения относительной несущей способности, напряжений в арматуре, бетоне и коэффициента армирования.

Современное развитие общей теории железобетона основано на применении полных диаграмм $\sigma - \varepsilon$ деформирования бетона и арматуры. Для построения расчетного аппарата необходима аналитическая зависимость между напряжениями и относительными деформациями, базирующаяся на физических предпосылках единых для всех стадий работы железобетонного элемента.

В данной статье рассматриваются центрально сжатые железобетонные элементы, с целью определения нагрузки, напряжений и деформаций в арматуре и бетоне, соответствующих концу нисходящей ветви диаграммы $\sigma - \varepsilon$ для разных классов бетонов; нахождение необходимого количества арматуры для реализации нисходящей ветви.

Для получения сопоставимых теоретических результатов с опытными данными необходима достоверная аппроксимация диаграммы деформирования бетона. Существует несколько предложений по математическому описанию. В данном случае для бетона принимаем параболическую зависимость

$$\sigma_b = E_0\varepsilon - E_1\varepsilon^2, \qquad (1)$$

где: σ_b - напряжения в бетоне,

ε - деформации в бетоне и арматуре,

E_0, E_1 - параметры параболической зависимости.

Г.С. Глушков [1] отмечает, что такую формулу в 1938 году предлагал В.П. Манжаловский. Упоминается эта зависимость у С.П. Тимошенко и Дж. Гере в «Механика материалов», которая была переведена с английского и издана в 1976 г. Анализ применения нелинейных законов деформирования приведен у С.В. Бондаренко и

Р.С. Санжаровского [2]. Наиболее полный анализ применения нелинейных математических моделей для описания полной диаграммы $\sigma - \varepsilon$ приведен в работе [3]. Здесь же даны обоснование и определение параметров двуквадратичного закона деформирования.

Зависимость (1) запишем в относительных величинах:

$$\eta_\sigma = 2\eta_\varepsilon - \eta_\varepsilon^2;\ \eta_\sigma = \sigma_b / R_{bn}, \tag{2}$$

$$\eta_\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \eta_\sigma};\ \eta_\varepsilon = \varepsilon / \varepsilon_{bR}. \tag{3}$$

Для E_0 и E_1 приняты выражения:

$$E_1 = \frac{E_0^2}{4R_{bn}},\ E_0 = \frac{2R_{bn}}{4\varepsilon_{bR}}. \tag{4}$$

Рассмотрим сжатый железобетонный элемент, загруженный силой P без эксцентриситета. Для арматуры связь между напряжениями и деформациями принимается по закону Гука

$$\varepsilon_s = \sigma_s / E_s. \tag{5}$$

Используя условия совместности деформаций, получим квадратное уравнение равновесия отсеченной части относительно σ_s

$$a\sigma_s^2 - b\sigma_s + c = 0, \tag{6}$$

где:

$$a = \alpha_{0s}^2 (1 - \mu_s),\ \alpha_{0s} = E_0 / E_s, \tag{7}$$

$$b = 4R_{bn}[\alpha_{0s} + \mu_s (1 - \alpha_0)], \tag{8}$$

$$c = 4R_{bn}\sigma_{0p},\ \sigma_{0p} = P / A_0. \tag{9}$$

Здесь A_0 – площадь брутто поперечного сечения сжатого элемента.

Из (6) запишем решение для σ_s

$$\sigma_s = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{10}$$

В формуле (10), исходя из конкретных условий рассматриваемой задачи, необходимо оставить знак минус.

Заслуживает внимания тот факт, что формула (10) позволяет не только вычислить напряжения в арматуре, но и определить максимальную нагрузку. Для этого дискриминант необходимо приравнять к нулю. Из этого условия находим величину максимальной относительной нагрузки:

$$\sigma_{0p}^{\max} = R_{bn} \frac{\left[\alpha_{0s} + \mu_s (1-\alpha_0)\right]^2}{\alpha_{0s}^2 (1-\mu_s)}, \tag{11}$$

и максимального напряжения в арматуре $\sigma_s^{\max}$

$$\sigma_s^{\max} = \frac{2R_{bn}\left[\mu_s + \alpha_{0s}(1-\mu_s)\right]}{\alpha_{0s}^2(1-\mu_s)}. \tag{12}$$

Запишем формулу (12) в другом виде

$$\sigma_s^{\max} = \frac{\varepsilon_{bR} E_s \left[\mu_s + \alpha_{0s}(1-\mu_s)\right]}{\alpha_{0s}(1-\mu_s)}. \tag{13}$$

Деформации, соответствующие $\sigma_s^{\max}$

$$\varepsilon = \varepsilon_{bR}\left[1 + \frac{\mu_s}{\alpha_{0s}(1-\mu_s)}\right]. \tag{14}$$

Из (2) с учетом (14) находим $\sigma_b^{\max}$

$$\sigma_b^{\max} = R_{bn}\left[1 - \frac{\mu_s^2}{\alpha_{0s}^2(1-\mu_s)^2}\right]. \tag{15}$$

В таблице 1 приведены результаты вычислений по формулам (11), (13), (14), (15) для разных классов бетонов при $\mu_s = 0.02$. Если $\sigma_s^{\max}$ достигают значения R_{sn}, можно определить необходимое количество арматуры

$$\mu_{sR} = \frac{\alpha_{0s} B_0}{1 + B_0 \alpha_{0s}}, \tag{16}$$

$$\text{здесь } B_0 = \frac{R_{sn}\alpha_{0s}}{2R_{bn}} - 1. \tag{17}$$

Вычисления μ_{sR} показали, что применение высокопрочной арматуры с $R_s = 400$ МПа для бетонов класса В35 и ниже нецелесообразно. Это без учета каких-либо коэффициентов.

Таблица 1. Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) и нагрузки, $\mu_s = 0.02$

	B10	B15	B20	B30	B35	B40	B50	B60
$\sigma_{0p}^{\max}$	11,06	14,94	19,47	26,94	31,25	35,23	43,05	51,18
$\sigma_s^{\max}$	203,64	226,07	255,56	303,91	328,78	358,55	408,72	473,88
$\dfrac{\sigma_b^{\max}}{R_{bn}}$	$\dfrac{7,11}{7,5}$	$\dfrac{10,65}{11}$	$\dfrac{14,94}{15}$	$\dfrac{21,65}{22}$	$\dfrac{25,14}{25,5}$	$\dfrac{28,63}{29}$	$\dfrac{35,61}{36}$	$\dfrac{42,55}{43}$
$\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_{bR}}\cdot 10^5$	$\dfrac{101,82}{83}$	$\dfrac{113,04}{96}$	$\dfrac{127,78}{111}$	$\dfrac{151,96}{135}$	$\dfrac{164,39}{147}$	$\dfrac{179,3}{161}$	$\dfrac{204,36}{185}$	$\dfrac{236,94}{215}$

По результатам вычислений табл. 1 видно, что чем выше класс бетона, тем более высокопрочная требуется арматура. Максимальная нагрузка достигает при $\varepsilon > \varepsilon_{bR}$ и напряжениях $\sigma_b^{\max} < R_{bn}$. Это означает, что бетон работает уже на нисходящем участке диаграммы $\sigma - \varepsilon$. В этом случае зависимость (1) рекомендуется уточнить и добавить еще один нелинейный член [3]

$$\sigma_b = E_0\varepsilon - E_1\varepsilon^2 + E_2\left(\varepsilon - \varepsilon_{bR}\right)^2, \tag{18}$$

возьмем производную по ε

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_0 - 2E_1\varepsilon + 2E_2\varepsilon - 2E_2\varepsilon_{bR},$$

При $\varepsilon = \varepsilon_{bR}$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_0 - 2E_1\varepsilon.$$

Получилось то же, что и по формуле (1). Следовательно, зависимость (16) остается гладкой с добавлением еще одного слагаемого при $\varepsilon = \varepsilon_{bR}$.

Формулу (16) запишем в другом виде

$$\sigma_b = a_0 + a_1\varepsilon - a_2\varepsilon^2, \tag{19}$$

где: $$a_0 = E_2\varepsilon_{bR}^2, \tag{20}$$

$$a_1 = E_0 - 2E_2\varepsilon_{bR}, \tag{21}$$

$$a_2 = E_1 - E_2. \tag{22}$$

В этом случае работы бетона на нисходящей ветке получается разрешающее квадратное уравнение относительно ε_s

$$\bar{a}\varepsilon_s^2 - \bar{b}\,\varepsilon_s + \bar{c} = 0, \tag{23}$$

и его решение

$$\varepsilon_s = \frac{\bar{b} - \sqrt{\bar{b}^2 - 4\bar{a}\bar{c}}}{2\bar{a}}. \tag{24}$$

Коэффициенты уравнения:

$$\bar{a} = (1 - \mu_s)(E_1 - E_2); \tag{25}$$

$$\bar{b} = (1 - \mu_s)(E_0 - 2E_2 \cdot \varepsilon_{bR}) + \mu_s E_s; \tag{26}$$

$$\bar{c} = \sigma_{0p} - (1 - \mu_s)E_2 \cdot \varepsilon_{bR}^2. \tag{27}$$

Из (24) получаем расчетные параметры:

— максимальная деформация, соответствующая концу нисходящего участка диаграммы $\sigma - \varepsilon$

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{bR}\frac{1 - 4R_{bn}\alpha_{20} + \mu_s\alpha_{s0}/(1 - \mu_s)}{1 - \alpha_{21}}; \tag{28}$$

— максимальные напряжения в арматуре

$$\sigma_s^{\max} = E_s \cdot \varepsilon_{\max}; \tag{29}$$

— максимальная нагрузка

$$\sigma_{0p}^{\max} = \frac{R_{bn}(1 - \mu_s)}{1 - \alpha_{21}} \times \left\{\left[1 - 4R_{bn}\alpha_{20} + \frac{\mu\alpha_{s0}}{1 - \mu_s}\right]^2 + 4R_{bn}\alpha_{20}(1 - \alpha_{21})\right\}; \tag{30}$$

— максимальные напряжения в бетоне

$$\sigma_b^{\max} = 4R_{bn} \times \left[R_{bn}\alpha_{20} + 0.5(1 - 4R_{bn}\alpha_{20})\frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{bR}} - 0.25(1 - \alpha_{21})\left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{bR}}\right)^2\right]. \tag{31}$$

Где $\alpha_{20} = E_2/E_0^2$; $\alpha_{21} = E_2/E_1$; $\alpha_{s0} = E_s/E_0$.

В таблице 2 приведены результаты вычислений $\varepsilon_{\max}$, $\sigma_{0p}^{\max}$, $\sigma_s^{\max}$, $\sigma_b^{\max}$.

Происходит интенсивный процесс перераспределения усилий с бетона на арматуру. Для правильной оценки этого процесса необходим корректный подход в использовании физико-механических характеристик сжатого железобетона, а не бетона. Для этого нужны дополнительные исследования.

Таблица 2. Определение НДС и нагрузки, $\mu_s = 0.01$

	B10	B15	B20	B30	B35	B40	B50	B60
$\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{bR}} \cdot 10^5$	$\frac{801,6}{390}$	$\frac{693,7}{385}$	$\frac{426,3}{379}$	$\frac{295,4}{372}$	$\frac{256}{362}$	$\frac{249}{357}$	$\frac{233}{345}$	$\frac{237,3}{333}$
σ_{0p}^{max}	16,31	18,78	20,23	26,11	29,3	32,82	39,83	47,1
σ_s^{max}	1603	1387	852	691	512	498	468	475
σ_b^{max}	0,21	5,002	11,81	20,39	24,39	26,11	35,51	42,78

Если не ограничивать длину нисходящей ветви диаграммы $\sigma - \varepsilon$, получается, что самый низкий класс бетона требует невероятно высокопрочной арматуры.

При постоянном коэффициенте армирования, принятом для всех классов бетонов, использовать нисходящую ветвь диаграммы не представляется возможным. Для бетона B10 этого количества арматуры много. Такое количество арматуры требует ε_{max} в 2,055 раза больше ε_{bu}.

Для бетона B30 и выше – этого количества мало. Бетон диктует условия для рационального использования нисходящей ветви, как по прочностным свойствам арматуры, так и по ее количеству. Роль арматуры, как стабилизирующего фактора при работе бетона в условиях деградации прочности и накапливания деструктивных процессов возрастает. При условии, что $\varepsilon_{max} = \varepsilon_{bu}$ можно определить необходимое количество арматуры

$$\mu_{s.bu} = \frac{B_0}{\alpha_{s0} + B_0}, \tag{32}$$

где $B_0 = \alpha_{21} - 1 + \varepsilon_{bu}(1 - \alpha_{21})/\varepsilon_{bR}$.

Коэффициент E_2 в формуле (16) определяется через ε_{bu} и значение напряжений в конце нисходящей ветки $\sigma_{bu} = kR_{bn}$,

$$E_2 = \frac{E_1\varepsilon_{bu}^2 - E_0\varepsilon_{bu} + kR_{bn}}{\left(\varepsilon_{bu} - \varepsilon_{bR}\right)^2}. \qquad (33)$$

В таблице 3 приведены результаты вычислений при $\sigma_{bu} = 0.85R_{bn}$. Для всех классов бетонов рекомендовано принять $k = 0.85$, μ_s определяется по (29), $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{bu}$ [3].

Результаты вычислений таблицы 3 выглядят правдоподобными, но насколько они достоверны не ясно. Относительное количество арматуры $\mu_{s.bu}$ в значительной степени зависит от E_1, E_2 и ε_{bu}, которые приведены в табл. 2.1 [3]. Для бетона В10 $E_1 = 10.8 \cdot 10^6$, $E_2 = 10.66 \cdot 10^6$, $\varepsilon_{bu} = 390$. Более точные значения $E_1 = 10.8434 \cdot 10^6$; $\varepsilon_{bu} = 388$. Они отличаются от вышеуказанных на 0,4 и 0,52%. Модуль E_2 уменьшим на 1%, что составить погрешность при вычислениях, $E_2 = 10.5534 \cdot 10^6$. При этих значениях $\mu_{s.bu} = 0.009113$. По отношению к $\mu_{s.bu}$, приведенному в табл. 3, оно составляет 202%. Уменьшение E_2 на 1% не случайно. Принятое значение $\sigma_{bu} = 0.85R_{bn}$ для всех классов бетонов не всегда подтверждается экспериментальными данными. Но в среднем σ_{bu} действительно соответствует 0,85. Использование полной диаграммы бетона требует более внимательного подхода к определению параметров самой диаграммы: применение высокопрочной арматуры и возможное изменение ее свойств в сжатом бетоне, уточнение условий совместности деформаций при $\varepsilon > \varepsilon_{bR}$.

Таблица 3. Определение $\mu_{s.bu}$, нагрузки и напряжений

	B10	B15	B20	B30	B35	B40	B50	B60
$\mu_{s.bu}$	0,0043	0,0049	0,0086	0,015	0,02	0,0225	0,033	0,0474
$\sigma_{0p}^{\max}$	9,52	13,3	19,1	29,34	35,26	40,14	52,47	66,43

σ_s^{max}	782,7	772,8	762,6	751,1 7	732,7	723,0 2	700,9 2	679,4
σ_b^{max}	6,16	9,59	12,65	18,35	21,02	24,39	30,37	35,94

При R_{sn} меньше σ_s^{max} (табл. 3) полная диаграмма не реализуется. Коэффициент армирования имеет значение:

$$\mu_{s.c} = \frac{B_1}{\alpha_{s0} + B_1}, \qquad (34)$$

где $$B_1 = (1 - \alpha_{21})\left(\frac{\varepsilon_{s.c}}{\varepsilon_{bR}} - 1\right). \qquad (35)$$

При линейном законе деформирования арматуры

$$\varepsilon_{s.c} = R_{s.cn} / E_s . \qquad (36)$$

В таблице 4 приведены значения $\mu_{s.c}$ вычисленные по данным табл. 2.1 [3].

Таблица 4. Значения $\mu_{s.c}$ для разных классов бетонов

	B10	B15	B20	B30	B35	B40	B50	B60
$\mu_{s.c}$	0,002 7	0,002 3	0,003 8	0,006 0	0,007 7	0,008 0	0,009 4	0,006 2

Чем выше класс бетона, тем больше требуется арматуры.

При вычислении значений $\mu_{s.c}$ в таблице 4 принято $\varepsilon_{s.c} = 231 \cdot 10^{-5}$, $R_{sn} = 462$ МПа. В СНиПе приводятся расчетные и нормативные сопротивления растяжению, а при сжатии только расчетные, которые не превышают 400МПа. Такое положение в данном случае затрудняет применение нисходящего участка диаграммы $\sigma - \varepsilon$. Для бетонов классов меньше B20 $\mu_{s.bu}$ <1% (табл. 3), удовлетворительные результаты для этих бетонов получаются с применением формулы (1), табл. 1.

Сопоставим результаты расчетов для бетона B35 из табл. 1 и 3 (у них μ_s одинаковые). Сравнение в пользу учета полной диаграммы.

Но для этого бетона и других классов выше В20 необходимо обоснование того факта, что $\sigma_s^{\max} \geq R_s$.

ВЫВОДЫ

1. Применение нелинейной зависимости $\sigma_b - \varepsilon_b$ дает возможность определить относительную несущую способность σ_{0p}, напряжения в бетоне и арматуре, и необходимое количество арматуры.
2. Достоверность полученных результатов зависит от того, насколько диктуемая для бетона математическая аппроксимация диаграммы $\sigma - \varepsilon$ с обязательным уровнем напряжений в конце нисходящей ветви 0,85 соответствует реальной работе бетона.

Литература

1. Глушков Г.С. Инженерные методы расчетов на прочность и жесткость. – М.: Машиностроение, 1971. – 384с.
2. Бондаренко С.В., Санжаровский Р.С. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий. – М.: Стройиздат, 1990. – 352с.
3. Дорофеев В.С., Барданов В.Ю. Расчет изгибаемых элементов с учетом полной диаграммы деформирования бетона. – Одесса, 2003. – 210с.