

# О РАСЧЕТЕ КРИВОЛИНЕЙНО ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ РАВНОВЕСНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Яременко А.Ф., Эль Дхайби Мухаммед Мустафа

(Одесская Государственная Академия Строительства и Архитектуры)

Стремление к созданию эффективных конструкций обуславливает применение новых конструкционных материалов: слоистых армированных стеклопластиков, фибергласса и т.п.

Изотропные и криволинейно ортотропные круглые тонкие пластинки широко применяются в авиа и судостроении, строительстве. Аналитическое решение для изотропных пластинок при различных симметричных видах нагрузки представлено в классической работе [1]. Обобщенное решение для ортотропных круглых тонких пластинок с однородными упругими свойствами при равномерной нагрузке получено в работе [2].

В нашей работе рассматривается задача расчета криволинейно ортотропных круглых тонких пластинок при радиально меняющихся упругих характеристиках для различных видов осесимметричной нагрузки. Для решения этой задачи мы применили один из вариантов метода конечных элементов – метод равновесных конечных элементов (МРКЭ), в котором в качестве начальных неизвестных выбираются усилия. Математическая модель МРКЭ для изотропных пластин подробно описана в работах [3] и [4].

Уравнения равновесия напряженно-деформированного состояния  $k$ -го конечного элемента:

$$[A_k] \{S_k\} = \{F_k\},$$

где  $[A_k]$  – матрица равновесия  $k$ -го конечного элемента,  $\{F_k\}$  – вектор внешних сил (определяемых давлением  $p_k$ , прилагаемым к  $k$ -му конечному элементу и узловыми нагрузками),  $\{S_k\}$  – вектор значений усилий в узловых точках этого конечного элемента. Для конечного элемента тонкой пластинки, задаваемого 3 узлами, достаточно получить мо-

ментные усилия, то есть  $\{S_k\} = \{M_{\rho,k,1}, M_{\varphi,k,1}, M_{\rho,k,2}, M_{\varphi,k,2}, M_{\rho,k,3}, M_{\varphi,k,3}\}$  (рис. 1).

Матрица равновесия  $[A_k]$  строится из подматрицы статического равновесия и матриц неразрывности усилий между соседними элементами.

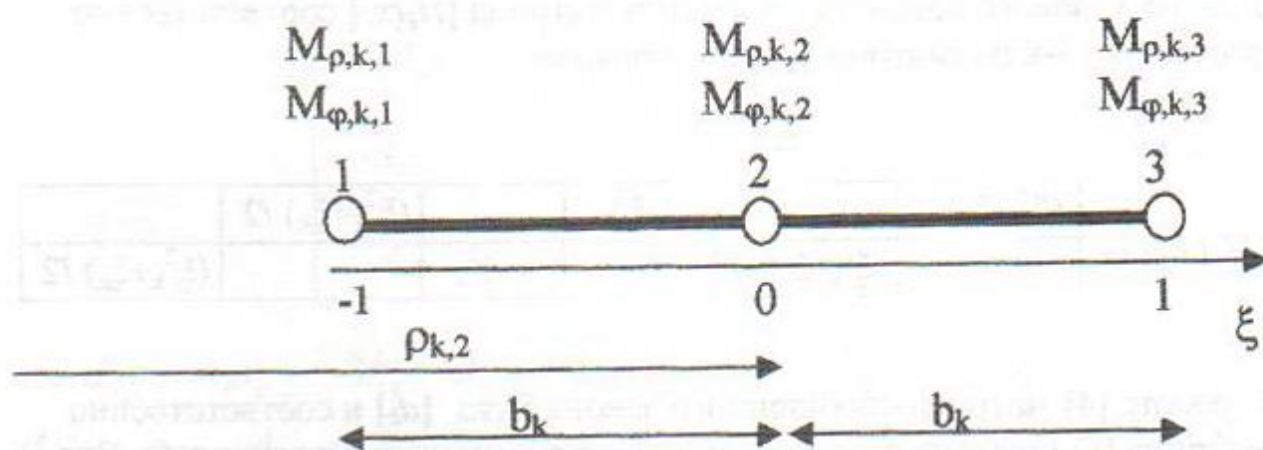


Рис. 1. Привязка узловых точек конечного элемента к глобальным и локальным координатам

Физико-геометрические уравнения позволяют определить  $\{S\}$  при известном векторе внешних перемещений  $\{u\}$ :

$$[D]\{S\} = [A]^T\{u\},$$

где  $[D]$  – матрица податливости всей пластины,  $\{S\}$  – вектор внутренних усилий,  $[A]$  – матрица статического равновесия всей пластины,

Вектор  $\{u\}$  определяется из разрешающего уравнения данной математической модели:

$$[K]\{u\} = \{F\},$$

где  $[K] = [A][D]^{-1}[A]^T$  – матрица жесткости системы.

Матрица податливости  $[D]$  в методе конечных элементов имеет блочный квазидиагональный вид. Ее диагональными блоками являются матрицы податливости элементов  $[D_k]$ , которые для круглых пластинок в локальных координатах, определяются так [4]:

$$[D_k] = 2\pi b_k \int_{-1}^1 [H_k(\xi_k)]^T [d_k] [H_k(\xi_k)] (\rho_{k,2} + \xi_k b_k) d\xi_k,$$

где  $[H_k(x)]$  – матрица аппроксимации усилий,  $[d_k]$  – матрица обобщенного закона Гука  $k$ -го конечного элемента.

Для 3-х узлового конечного элемента матрица  $[H_k(x)]$  соответственно состоит из 3-х подматриц второго порядка:

$$[H_k(x)] \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline (\xi_k^2 - \xi_k) / 2 & & 1 - \xi_k^2 & (\xi_k^2 + \xi_k) / 2 \\ \hline & (\xi_k^2 - \xi_k) / 2 & & 1 - \xi_k^2 \\ \hline & & & (\xi_k^2 + \xi_k) / 2 \\ \hline \end{array}$$

В работе [4] матрица обобщенного закона Гука  $[d_k]$  и соответственно матрица  $[D_k]$  рассматривались лишь для изотропных материалов. Введя коэффициент ортотропии [6]  $k_A = E_\theta / E_\rho = \nu_\theta / \nu_\rho$  ( $E_\theta$ ,  $E_\rho$  и  $\nu_\theta$ ,  $\nu_\rho$  – кольцевой и радиальный модули упругости и коэффициенты Пуассона), мы получили следующее выражение матрицы обобщенного закона Гука для ортотропных материалов:

$$[d_k] = \frac{1}{K_\rho (1 - \nu_\rho^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu_\rho \\ -\nu_\rho & 1/k_A \end{bmatrix},$$

где  $K_\rho$  – цилиндрическая жесткость в радиальном направлении конечного элемента пластинки толщиной  $h$  .:

$$K_\rho = \frac{E_\rho h^3}{12(1 - \nu_\rho^2)}.$$

Выполнив интегрирование, мы получили обобщенный вид матрицы  $[D_k]$  для любого коэффициента ортотропии  $k_A$  .:

$$[D_k] = \frac{2\pi b_k}{15K_\rho(1-\nu_\rho^2)} \begin{bmatrix} d_{1,1} & -\nu_\rho d_{1,1} & d_{1,3} & -\nu_\rho d_{1,3} & -d_{1,5} & \nu_\rho d_{1,5} \\ -\nu_\rho d_{1,1} & \frac{d_{1,1}}{k_A} & -\nu_\rho d_{1,3} & \frac{d_{1,3}}{k_A} & \nu_\rho d_{1,5} & \frac{-d_{1,5}}{k_A} \\ d_{1,3} & -\nu_\rho d_{1,3} & d_{3,3} & -\nu_\rho d_{3,3} & d_{4,5} & -\nu_\rho d_{4,5} \\ -\nu_\rho d_{1,3} & \frac{d_{1,3}}{k_A} & -\nu_\rho d_{3,3} & \frac{d_{3,3}}{k_A} & -\nu_\rho d_{4,5} & \frac{d_{4,5}}{k_A} \\ -d_{1,5} & \nu_\rho d_{1,5} & d_{4,5} & -\nu_\rho d_{4,5} & d_{5,5} & -\nu_\rho d_{5,5} \\ \nu_\rho d_{1,5} & \frac{-d_{1,5}}{k_A} & -\nu_\rho d_{4,5} & \frac{d_{4,5}}{k_A} & -\nu_\rho d_{5,5} & \frac{d_{5,5}}{k_A} \end{bmatrix}$$

где  $d_{1,1} = 4\rho_{k,2} - 3b_k$ ,  $d_{1,3} = 2(\rho_{k,2} - b_k)$ ,  $d_{3,3} = 16\rho_{k,2}$ ,  
 $d_{1,5} = \rho_{k,2}$ ,  $d_{4,5} = 2(\rho_{k,2} + b_k)$ ,  $d_{5,5} = 4\rho_{k,2} + 3b_k$ .

В таком виде, математическая модель задачи пригодна для расчета тонких криволинейно-ортотропных пластинок. Данная модель используется в разработанном нами программном комплексе. Адекватность модели проверялась для известных аналитических решений, представленных в [1] и [2].

На рисунках 2,3,4,5,6 представлены примеры результатов расчета для круглой пластинки (радиуса 1,27 м, толщина 2,54 см. Пластинка выполнена из слоистого армированного стеклопластика со следующими механическими характеристиками [6]: модуль упругости в радиальном направлении  $E_\rho = 5,7 \cdot 10^{10}$  Па, коэффициент поперечных деформаций  $\nu_\rho = 0,277$ . Соотношение между модулем упругости и коэффициентами поперечных деформаций в окружном и радиальном направлениях  $k_A = E_\theta/E_\rho = \nu_\theta/\nu_\rho$  различно 1; 0,75; 1,5. Нагружение равномерно распределенной нагрузкой  $q = 100,0 \text{ Н/м}^2$ . Выполнены сравнения с аналитическими решениями из [1] и [2].

На представленных рисунках сплошные линии – результаты численных решений МРКЭ, кружочки и квадратики – значения аналитических решений в краевых узлах конечных элементов.

В верхней части рисунков показаны форма срединной поверхности, в нижней части представлены радиальные и кольцевые моментные усилия, возникающие в пластинке под нагрузкой. Прогибы пластинки представлены в мм, моменты  $M_\rho$  и  $M_\theta$  в Н·м/м

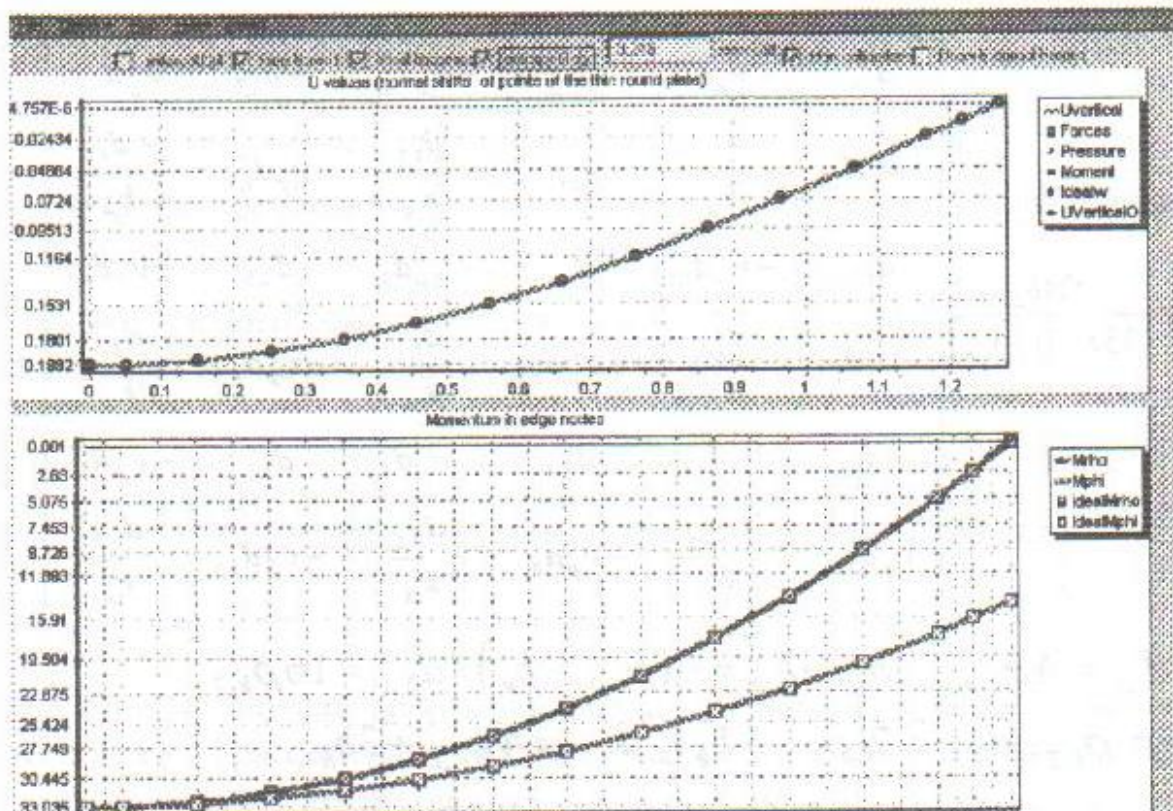


Рис.2. Свободно опертая изотропная пластинка ( $k_A = 1$ )

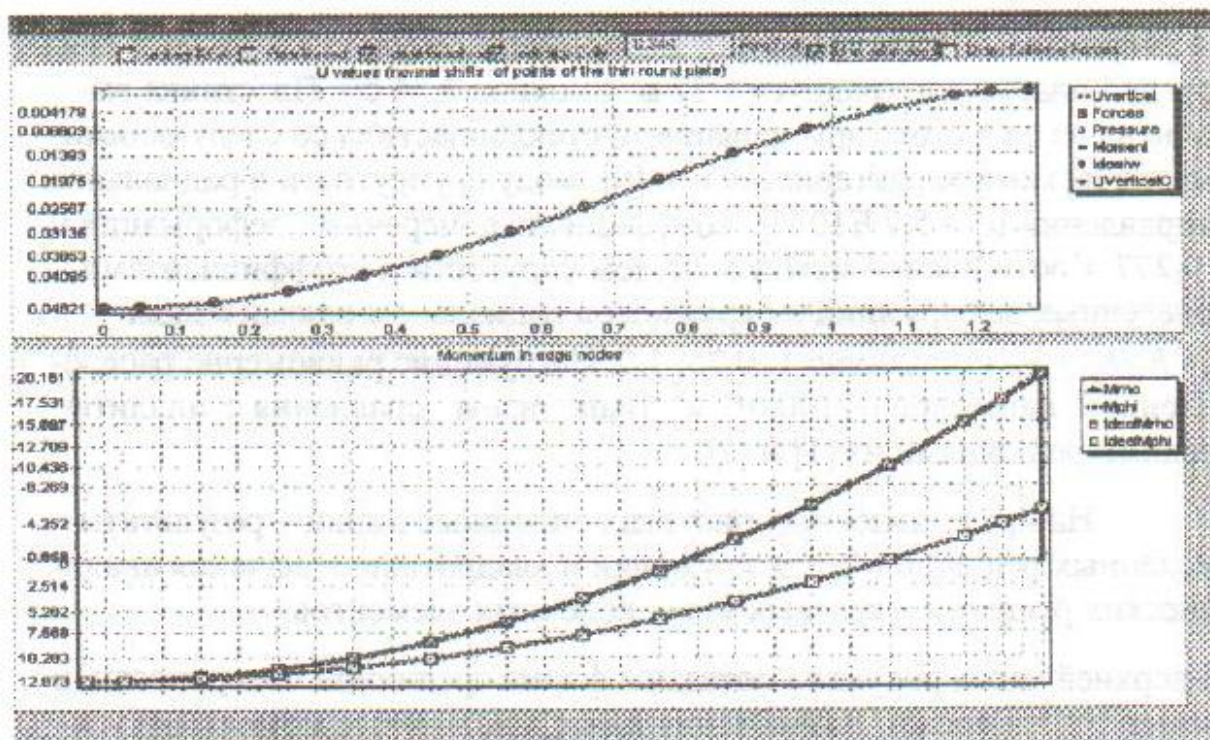


Рис.4. Защемленная по контуру изотропная пластинка ( $k_A = 1$ )

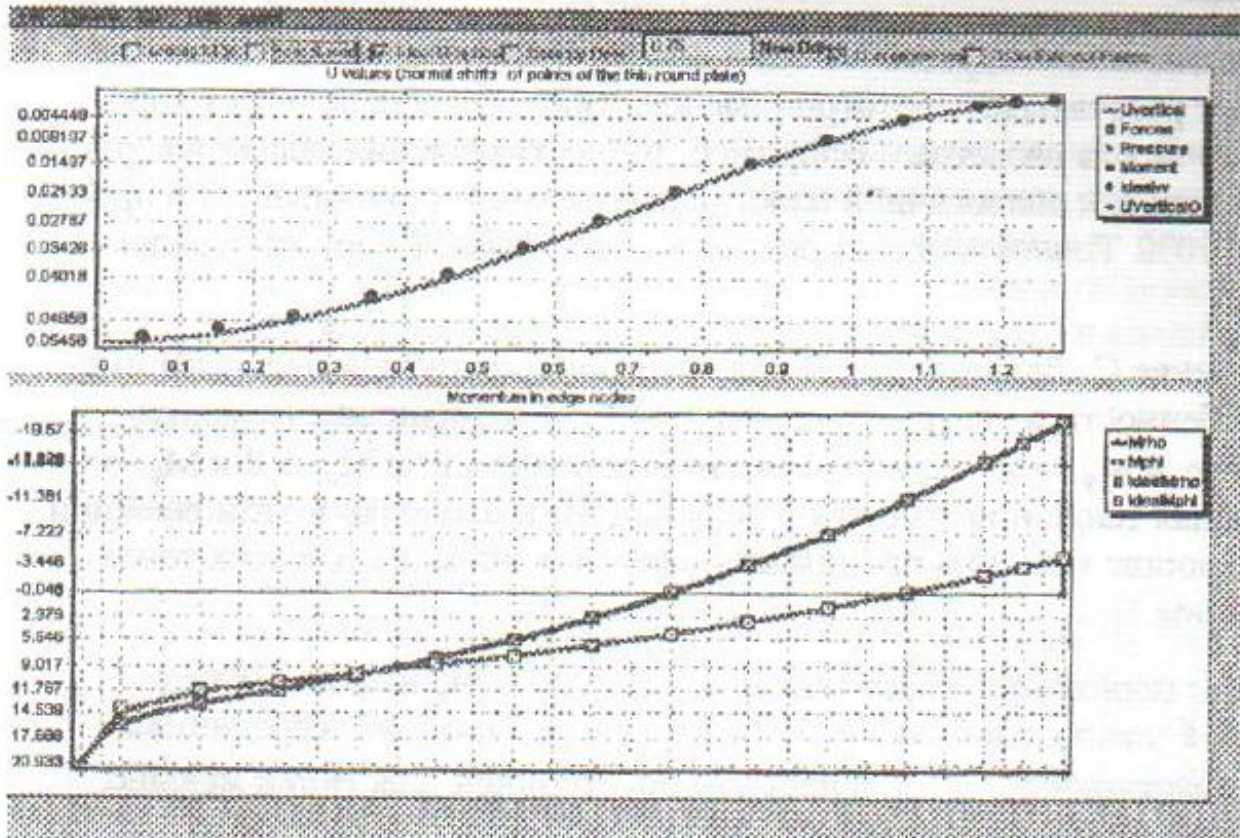


Рис.5. Защемленная по контуру ортотропная пластинка ( $k_A=0.75$ )

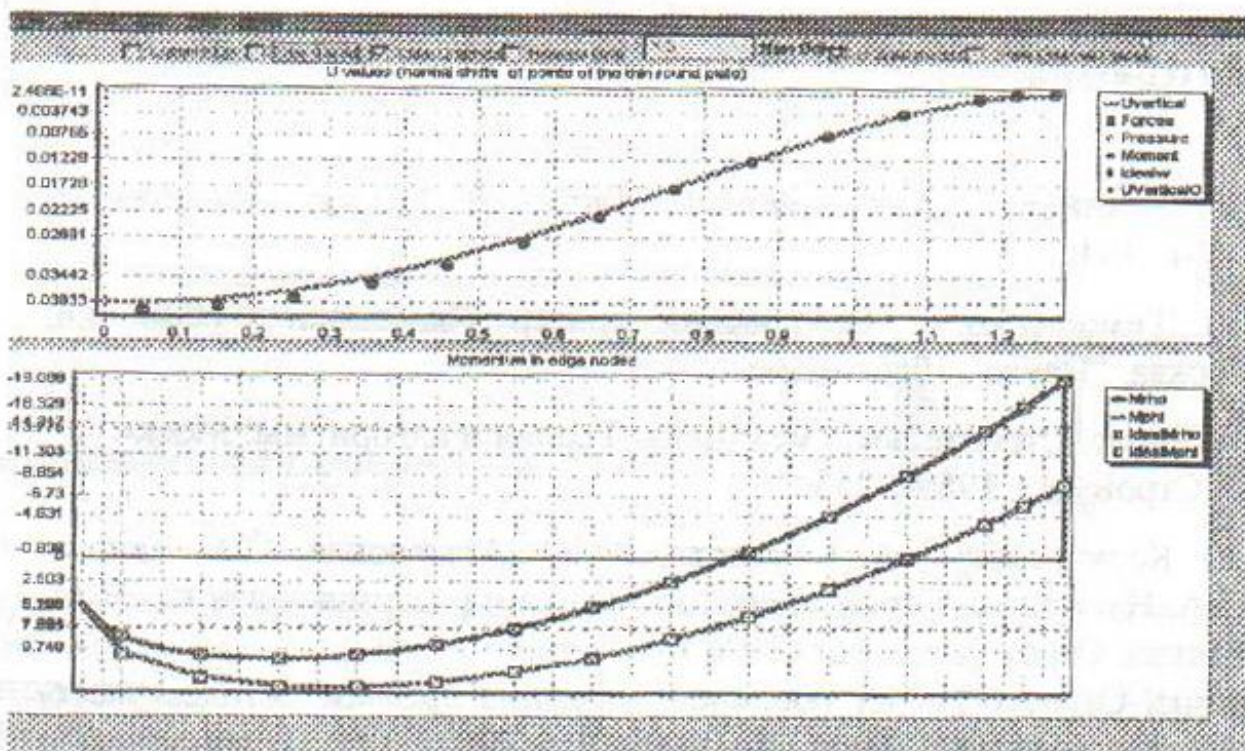


Рис.6. Защемленная по контуру ортотропная пластинка ( $k_A=1.5$ )

## Выводы.

1. Предлагаемый вариант МРКЭ является более общим, поскольку позволяет рассчитывать ортотропные пластины. Он обеспечивает хорошую точность расчетов. Например, точность решения задачи в перемещениях для аналогичной пластинки в работе [5] оценивалась в пределах 10%. Точность нашей реализации по крайней мере на порядок выше.
2. Решение С. Лехницкого [2] для ортотропной круглой пластины имеет особенности в центре пластины: при  $k_A < 1$  изгибающие моменты  $M_p \rightarrow \infty$  и  $M_\varphi \rightarrow \infty$ . При  $k_A > 1$  изгибающие моменты  $M_p \rightarrow 0$  и  $M_\varphi \rightarrow 0$ . Подобная тенденция имеется в решении МРКЭ, однако в этом решении изгибающие моменты принимают конечные значения для всех точек пластины.
3. В срединной зоне пластинки при  $k_A < 1$   $M_p > M_\varphi$  и прогибы ортотропной пластинки больше, чем изотропной. При  $k_A > 1$  в срединной зоне пластинки  $M_p < M_\varphi$  и прогибы ортотропной пластинки меньше, чем изотропной.

## Литература.

1. С.Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки: Москва, Стройиздат, 1957г.-464с.
2. С.П. Тимошенко, С. Войновский Кригер. Пластинки и оболочки: Москва, "Наука" 1966г.-636с.
3. А.А.Чирас. Строительная механика. Теория и алгоритмы: Москва. Стройздат, 1989г.-255с.
4. Р.П. Каркоускас, А.А. Крутинис, Ю.Ю. Аткачюнас, С.А. Калана, Ю.А. Нагявичус, Строительная механика и решения задач на ЭВМ: Москва, Стройздат 1996г.-360с.
5. Джонс, Строум. Расчет оболочек вращения прямым методом жесткостей с помощью криволинейных элементов, Ракетная техника и космонавтика, 4, № 9, стр. 20 (1961).
6. С.Г. Лехницкий. Теория упругости анизотропного тела: Москва, Стройиздат, 1977.