УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ С НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ ФОРМЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

Коломийчук Г.П., Лесечко А.В.
(Одесса)

Получена математическая модель поведения пологих оболочек двоякой кривизны с несовершенствами формы при поперечном нагружении. К исходной системе дифференциальных уравнений в смешанном виде применен метод Бубнова-Галеркина. Неизвестные функции прогиба и напряжений, а также начальные несовершенства формы аппроксимированы двойными тригонометрическими рядами.

Несоответствие теоретических верхних критических нагрузок экспериментальным, при расчете оболочек на устойчивость, отмечается в работах многих авторов /1/. Особенно большие расхождения наблюдаются в оболочках, обладающих начальными несовершенствами формы /2/.

Современные исследования устойчивости оболочек можно разделить на два направления /3/. Первое направление состоит в анализе устойчивости симметричных форм равновесия оболочек при малых несимметричных возмущениях или кривизны оболочек. Исследование соответствующего определителя позволяет судить о появлении ветвления решений и об устойчивости состояния равновесия системы /4/. Второе направление связано с учетом начальных несовершенств формы срединной поверхности и их влияние на устойчивость оболочек /2/.

Совместное применение этих подходов позволит ответить на комплекс вопросов по определению минимальной критической нагрузки несовершенных оболочек.

Состояние несовершенной пологой оболочки при нагружении равномерно распределенной нагрузкой описывается системой двух дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{D}{h}\nabla^4(w-w_0)=L(\Phi,w)+\dfrac{1}{R_1}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\dfrac{1}{R_2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{q}{h}, \\
\dfrac{1}{E}\nabla^4\Phi=\dfrac{1}{2}\left[L(w_0,w_0)-L(w,w)\right]-\dfrac{1}{R_1}\dfrac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2}-\dfrac{1}{R_2}\dfrac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2}.
\end{cases} \quad (1)
$$

Здесь

$$
L(\ \ ,\ \ )=\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial x^2}\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial y^2}\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2(\ \ )}{\partial x\,\partial y},
$$

$$
\nabla^4(\ \ )=\frac{\partial^4(\ \ )}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4(\ \ )}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4(\ \ )}{\partial y^4},
$$

D – цилиндрическая жесткость; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина оболочки; E – модуль упругости; R_1, R_2 – радиусы главных кривизн; ω_0 – начальные несовершенства; Φ – функция напряжений; q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки.

Для получения решения системы уравнений (1) ее необходимо дополнить граничными условиями закрепления контура оболочки. При шарнирном опирании по контуру граничные условия записываются так

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=a \end{matrix}\right| \; w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=0. \\
&\left.\begin{matrix} y=0 \\ y=b \end{matrix}\right| \; w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=0.
\end{aligned} \quad (2)
$$

Неизвестные функции w и Φ, а так же начальные геометрические неправильности формы аппроксимируем тригонометрическими рядами

$$
\begin{aligned}
w&=\sum_k\sum_l f_{kl}\sin\alpha_k x\sin\beta_l y, \\
\Phi&=\sum_k\sum_l \varphi_{kl}\sin\alpha_k x\sin\beta_l y, \quad (3) \\
w_0&=\sum_t\sum_s f^0_{ts}\sin\alpha_t x\sin\beta_s y,
\end{aligned}
$$

где

$$\alpha_k = k\pi/a;\ \beta_l = l\pi/b;\ \alpha_t = t\pi/a;\ \beta_s = s\pi/b.$$

Нетрудно показать, что аппроксимирующие выражения (3) удовлетворяют условиям шарнирного опирания (2).

Уравнения Бубнова-Галеркина для системы (1) запишем так

$$\begin{aligned}
&\int_0^a\int_0^b X_{ij}\sin\alpha_i x\,\sin\beta_j y\,dx\,dy = 0,\\
&\int_0^a\int_0^b Y_{ij}\sin\alpha_i x\,\sin\beta_j y\,dx\,dy = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $i = 1,2,3,\ldots$

$j = 1,2,3,\ldots$

Поставив (3) в систему разрешающих уравнений (1) и решив ее по методу Бубнова-Галеркина, приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}
\sum_k\sum_l\left[\frac{1}{4}\left(\frac{k^2}{\lambda}+l^2\lambda\right)^2\bar{f}_{kl}+\frac{3\left(1-\nu^2\right)}{\pi^2}\left(\bar{k}_1 l^2+\bar{k}_2 k^2\right)\bar{\varphi}_{kl}\right]B(1)-\\
-\frac{1}{4}\sum_t\sum_s\left(\frac{t^2}{\lambda}+s^2\lambda\right)^2\bar{f}^0_{ts}B(2)-\frac{3}{4}\frac{\left(1-\nu^2\right)}{\pi^2}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l\left[i^2l^2\left(\bar{f}_{ij}\,\bar{\varphi}_{kl}+\right.\right.\\
\left.\left.+\bar{\varphi}_{ij}\bar{f}_{kl}\right)B(3)-2ijkl\bar{f}_{ij}\bar{\varphi}_{kl}\,B(4)\right]-\bar{q}\,\frac{12\left(1-\nu^2\right)}{\pi^6}B(5)=0,\\
\sum_k\sum_l\left[\left(\frac{k^2}{\lambda}+l^2\lambda\right)^2\bar{\varphi}_{kl}-\left(\bar{k}_1\frac{l^2}{\pi^2}+\bar{k}_2\frac{k^2}{\pi^2}\right)\bar{f}_{kl}\right]B(1)+\\
+\frac{1}{\pi^2}\sum_t\sum_s\left(\bar{k}_1 s^2+k_2 t^2\right)\bar{f}^0_{ts}B(2)-\\
-\frac{1}{4\pi^2}\sum_r\sum_n\sum_t\sum_s\left[r^2s^2\bar{f}^0_{rn}\bar{f}^0_{ts}B(6)-rnts\bar{f}^0_{rn}\bar{f}^0_{ts}B(7)\right]+\\
+\frac{1}{4\pi^2}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l\left[i^2l^2\bar{f}_{ij}\,\bar{f}_{kl}B(3)-ijkl\bar{f}_{ij}\,\bar{f}_{kl}B(4)\right]=0.
\end{cases} \tag{5}$$

Здесь

$$\lambda = \frac{a}{b},\quad \bar{k}_1 = \frac{a^2}{R_1 h},\quad \bar{k}_2 = \frac{b^2}{R_2 h},\quad \bar{f} = \frac{w}{h},$$

$$\bar{f}_0 = \frac{w_0}{h},\ \bar{\varphi} = \frac{\Phi}{Eh^3},\ \bar{q} = \frac{a^2 b^2}{Eh^4} q,$$

$$B(1) = \left[\frac{\sin\pi(k-t)}{\pi(k-t)} - \frac{\sin\pi(k+t)}{\pi(k+t)}\right]\left[\frac{\sin\pi(l-z)}{\pi(l-z)} - \frac{\sin\pi(l+z)}{\pi(l+z)}\right];$$

$$B(2) = \left[\frac{\sin\pi(m_1-t)}{\pi(m_1-t)} - \frac{\sin\pi(m_1+t)}{\pi(m_1+t)}\right]\left[\frac{\sin\pi(n_1-z)}{\pi(n_1-z)} - \frac{\sin\pi(n_1+z)}{\pi(n_1+z)}\right];$$

$$B(3) = \left[\frac{1-\cos\pi(i+k-t)}{i+k-t} + \frac{1-\cos\pi(k+t-i)}{k+t-i} + \frac{1-\cos\pi(i+t-k)}{i+t-k} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\cos\pi(i+k+t)}{i+k+t}\right]\left[\frac{1-\cos\pi(j+l-z)}{j+l-z} + \frac{1-\cos\pi(j+z-l)}{j+z-l} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\cos\pi(l+z-j)}{l+z-j} + \frac{1-\cos\pi(j+l+z)}{j+l+z}\right];$$

$$B(4) = \left[\frac{1-\cos\pi(t+i-k)}{t+i-k} - \frac{1-\cos\pi(i+k-t)}{i+k-t} + \frac{1-\cos\pi(k+t-i)}{k+t-i} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\cos\pi(i+k+t)}{i+k+t}\right]\left[\frac{1-\cos\pi(z+j-l)}{z+j-l} - \frac{1-\cos\pi(j+l-z)}{j+l-z} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\cos\pi(l+z-j)}{l+z-j} + \frac{1-\cos\pi(j+l+z)}{j+l+z}\right];$$

$$B(5) = \left(\frac{1-\cos t\pi}{t}\right)\left(\frac{1-\cos z\pi}{z}\right);$$

$$B(6) = \left[\frac{1-\cos\pi(r+m_1-t)}{r+m_1-t} + \frac{1-\cos\pi(m_1+t-r)}{m_1+t-r} + \frac{1-\cos\pi(r+t-m_1)}{r+t-m_1} - \right.$$

$$-\frac{1-\cos\pi(r+m_1+t)}{r+m_1+t}\Bigg]\Bigg[\frac{1-\cos\pi(s+n_1-z)}{s+n_1-z}-\frac{1-\cos\pi(s+z-n_1)}{s+z-n_1}+$$

$$+\frac{1-\cos\pi(n_1+z-s)}{n_1+z-s}+\frac{1-\cos\pi(s+n_1+z)}{s+n_1+z}\Bigg];$$

$$B(7)=\Bigg[\frac{1-\cos\pi(t+z-m_1)}{r+z-m_1}-\frac{1-\cos\pi(r+m_1-t)}{r+m_1-t}+\frac{1-\cos\pi(m_1+t-z)}{m_1+t-z}+$$

$$-\frac{1-\cos\pi(r+m_1+t)}{r+m_1+t}\Bigg]\Bigg[\frac{1-\cos\pi(z+s+n_1)}{z+s+n_1}-\frac{1-\cos\pi(s+n_1-z)}{s+n_1-z}+$$

$$+\frac{1-\cos\pi(n_1+z-s)}{n_1+z-s}+\frac{1-\cos\pi(s+n_1+z)}{s+n_1+z}\Bigg];\ \{k,l,n,r,s,t,z,m_1,n_1\}==1,2,3,\ldots$$

Литература

1. Андреев А.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. – М.: Наука, 1988. – 208 с.

2. Гавриленко Г.Д. Устойчивость и несущая способность несовершенных оболочек // Прикладная механика. – 2000. – 36, № 7. – С. 36 – 59.

3. Кантор С.Л., Тимашев С.А. Метод начальных несовершенств в задачах устойчивости оболочек // Исследования по теории сооружений. – М., 1987. – Вып. 25. – С. 46 – 56.

4. Вайнберг Д.В., Гуляев В.И., Мельниченко Г.И. Особые точки и точки ветвления решений нелинейных уравнений деформируемой среды // Сопротивление материалов и теория сооружений. – К., 1973. – Вып. 21. – С. 24 – 31.

5. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов. Вища школа, 1982. – 255 с.

6. Кривошеин И.В., Петров В.В. Несимметричные формы потери устойчивости гибких цилиндрических панелей // Механика деформируемых сред. – Саратов, 1976. – Вып. 4. – С. 120 – 129.