BY ASSESSING THE ACCURACY OF THE ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF STRESS - STRAINED STATE OF WATER-SATURATED HALF-SPACE, TO THE UPPER LIMIT OF WHICH IS ATTACHED ON THE VERTICAL DISTRIBUTION OF THE LOAD AREA OF A CIRCLE

Mosicheva I.I.
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture,
Odessa, Senior Lecturer
Shapoval A.V.
Prydniprovs`ka State Academy of Civil Engineering and Architecture,
Dnepr, Dr. Ph., docent

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ВОДОНАСЫЩЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, К ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ КОТОРОГО ПРИЛОЖЕНА ВЕРТИКАЛЬНАЯ РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ПО ПЛОЩАДИ КРУГА НАГРУЗКА

Мосичева И.И.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
г. Одесса, старший преподаватель
Шаповал А.В.
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, г. Днепр, к.т.н., доцент

Abstract

The model of water-saturated elastic half-space, to the upper limit of which is attached on the vertical distribution range of uniform load area, the first time an asymptotic representation of the solution of the problem of soil strata displacements in depth in the course of filtration consolidation. To assess its accuracy is made comparison of the exact solution of the problem of the upper limit of rainfall and half of its asymptotic representation. The conclusion of satisfactory agreement exact and approximate solutions.

Аннотация

В рамках модели упругого водонасыщенного полупространства, к верхней границе которого приложена вертикальная распределенная по площади круга равномерная нагрузка, впервые получено асимптотическое представление решения задачи о перемещениях грунтовой толщи по глубине в процессе фильтрационной консолидации. Для оценки его точности выполнено сопоставление точного решения задачи об осадки верхней границы полупространства и его асимптотического представления. Сделан вывод об удовлетворительном соответствии точного и приближенного решений.

Keywords: filtration consolidation, vertical displacement, pore pressure, the asymptotic representation of the solution, the exact and approximate solutions.

Ключевые слова: фильтрационная консолидация, вертикальные перемещения, поровое давление, асимптотическое представление решения, точное и приближенные решения.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными практическими задачами.

Авторами работы [1] было получено приближенное решение задачи о распределении вертикальных перемещений по глубине в водонасыщенном упругом полупространстве.

Его достоинством является относительная простота. При этом не понятно, насколько оно отличается от точного решения.

На решение этой проблемы и направлены представленные в настоящей работе материалы исследований.

Анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решения данной проблемы.

Авторами работы [2] было получено точное решение задачи об осадке упругого водонасыщенного полупространства, которое находится под воздействием произвольной распределенной по площади круга вертикальной нагрузки.

На наш взгляд, это решение вполне может быть использовано для верификации решения, полученного авторами работы [1].

Выделение ранее нерешенных частей общей проблемы, которым посвящена данная статья.

Для оценки точности сопоставим средние осадки основания, полученные авторами работ [1] и [2].

Изложение основного материала исследования. Рассмотрим водонасыщенное полупространство, к верхней границе которого приложена распределенная по площади круга равномерная распределенная нагрузка q (рис. 1).

Вначале найдем точное значение средней осадки основания $S_{cp}(t)$. Для этого проинтегрируем точное известное решение [2] по площади и разделим полученный таким образом интеграл на площадь, по которой распределена нагрузка. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} S_{cp}(t) &= \frac{1}{\pi \cdot a^2} \cdot \int\limits_0^{2\cdot\pi} \int\limits_0^{a} S(r,t)\cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = \\ &= \frac{q}{2\cdot G} \cdot \int\limits_0^{\infty} \frac{J_1^2(\alpha \cdot a)}{\alpha^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &(1-\nu)\cdot\left[1+erf\left(k_1\cdot\sqrt{t}\right)\right]+ \\ &+\nu\cdot exp\left(-k_2^2\cdot t\right)\cdot erfc\left(k_3\cdot\sqrt{t}\right) \end{aligned} \right\} d\alpha \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где

$$S(r,t) = \frac{q\cdot a}{G} \cdot \int\limits_0^{\infty} \frac{J_1(\alpha\cdot a)}{\alpha} \cdot J_0(\alpha\cdot r) \cdot \left\{ \begin{aligned} &(1-\nu)\cdot\left[1+erf\left(k_1\cdot\sqrt{t}\right)\right]+ \\ &+\nu\cdot exp\left(-k_2^2\cdot t\right)\cdot erfc\left(k_3\cdot\sqrt{t}\right) \end{aligned} \right\} d\alpha\,;$$

$$k_1^2 = \alpha^2 \cdot c_k\,; \qquad k_2^2 = \frac{1-2\cdot\nu}{(1-\nu)^2} \cdot \alpha^2 \cdot c_k\,; \qquad k_3^2 = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^2 \cdot \alpha^2 \cdot c_k\,;$$

$J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [3];

$J_1(x)$ – то же, с единичным индексом;

$erf(x)$ – интеграл вероятности [3]; $erfc(x) = 1 - erf(x)$;

α – параметр, по которому производится интегрирование (имеет размерность $\frac{1}{метр}$);

G – модуль сдвига основания;

ν – коэффициент Пуассона основания [4];

c_k – коэффициент консолидации при компрессии [5].

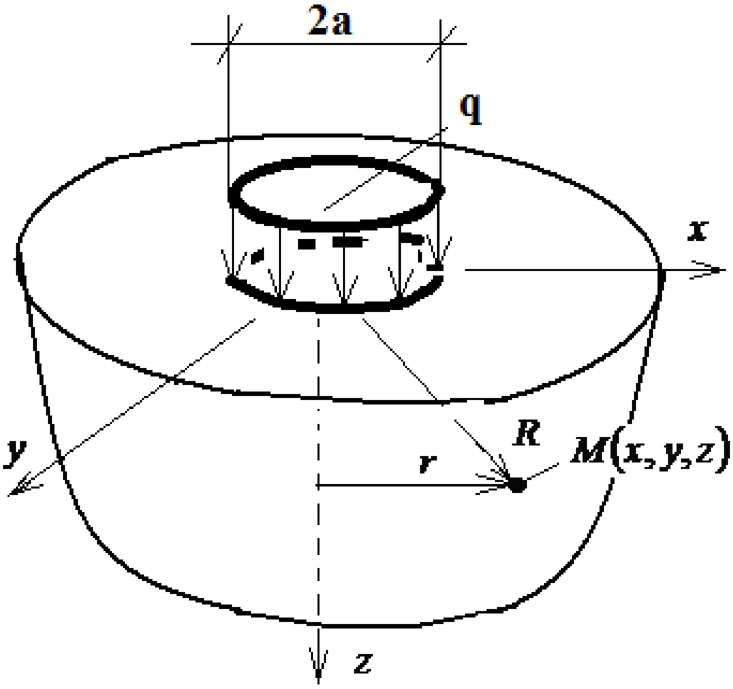

Рис. 1. К расчету осадки водонасыщенного полупространства

Для построения асимптотического приближения используем изложенный в [1] алгоритм. На первом этапе найдем НДС полупространства в момент времени $t = 0$. Согласно [1], в этом случае следует использовать модель грунтового основания в виде упругой изотропной среды [4] и положить упругую константу Ламе $\lambda \to \infty$. Определение напряженно-деформированного состояния основания в данном случае сводится к решению системы уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^2 F_0 = 0; U_0 = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_0; W_0 = \Delta F_0 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_0;\\
&\sigma_{zz,0} = G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(3 \cdot \Delta F_0 - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_0 \right); \sigma_{rr,0} = G \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta F_0 - 2 \cdot \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial z} F_0 \right);\\
&\sigma_{\theta\theta,0} = G \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta F_0 - 2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} F_0 \right); \tau_{rz,0} = G \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\Delta F_0 - 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_0 \right);\\
&\sigma_{kk,0} = 3 \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta F_0; P_0 = -\frac{1}{3} \cdot \sigma_{kk,0} = -G \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta F_0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

при граничных условиях:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{zz,0}(r,0) = \begin{Bmatrix} -q \ \ при \ \ r < a \\ 0 \ \ при \ \ r > a \end{Bmatrix} = q \cdot a \cdot \int\limits_0^\infty \frac{J_1(\alpha \cdot a)}{\alpha} \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot d\alpha;\\
&\tau_{rz,0}(r,z) = 0; \ W(\infty,z) = U(\infty,z) = 0; \ W(r,\infty) = U(r,\infty) = 0.
\end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

где F – бигармоническая функция;

Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат;

U_0 и W_0 – радиальное и вертикальное перемещения;

$\sigma_{zz,0}$,$\sigma_{rr,0}$ и $\sigma_{\theta\theta,0}$– соответственно, вертикальное, радиальное и тангенциальное нормальные перемещения;

$\tau_{rz,0}$ – то же, касательное;

P_0 – поровое давление;

r, z – координаты.

Решение ищем в виде:

$$F_0 = \int\limits_0^\infty J_0(\alpha \cdot r) \cdot \left[A_0(\alpha) + \alpha \cdot z \cdot B_0(\alpha) \right] \cdot exp(-\alpha \cdot z) \cdot \alpha \cdot d\alpha \qquad (4)$$

где $A_0(\alpha)$ и $B_0(\alpha)$– некоторые функции параметра α, которые следует определять путем удовлетворения граничным условиям (3).

Осадка основания S_0 в любой произвольной точке М (рис. 1) и поровое давление P_0 в момент времени $t \to 0$ в данном случае равны:

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= -\frac{q\cdot a}{2\cdot G}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{J_1(\alpha\cdot a)}{\alpha}\cdot(1+\alpha\cdot z)\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha;\\
P_0 &= q\cdot a\cdot\int\limits_0^{\infty}J_1(\alpha\cdot a)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot d\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Далее найдем осадку основания для момента времени $t\to\infty$. Согласно [1], в этом случае следует использовать модель грунтового основания в виде упругой изотропной среды [4]. Определение напряженно-деформированного состояния основания в данном случае сводится к решению системы уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^2 F_\infty = 0; U_\infty = -\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}F_\infty; W_\infty = \frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\cdot\Delta F_\infty - \frac{\partial^2}{\partial z^2}F_\infty;\\
&\sigma_{zz,\infty} = 2\cdot G\cdot\left(\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_\infty - \frac{\partial^3 F_\infty}{\partial z^3}\right) + \lambda\cdot\left(\frac{G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_\infty\right);\\
&\sigma_{rr,\infty} = -2\cdot G\cdot\frac{\partial^3 F_\infty}{\partial r^2\partial z} + \frac{\lambda\cdot G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_\infty;\\
&\sigma_{\theta\theta,\infty} = 2\cdot G\cdot\left(-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 F_\infty}{\partial r\partial z}\right) + \lambda\cdot\left(\frac{G}{\lambda+G}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\Delta F_\infty\right);\\
&\tau_{rz,\infty} = G\cdot\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\frac{\lambda+2\cdot G}{\lambda+G}\Delta - 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot F_\infty.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Осадка основания S_0 в любой произвольной точке М (рис. 1) и поровое давление P_0 в момент времени $t\to\infty$ в данном случае равны:

$$\left.\begin{aligned}
S_\infty &= -\frac{q\cdot a}{2\cdot G}\cdot\int\limits_0^{\infty}\frac{J_1(\alpha\cdot a)}{\alpha}\cdot\left[2\cdot(1-\nu)+\alpha\cdot z\right]\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha;\\
P_\infty &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Далее найдем функцию времени $f(z,t)$, которая связывает между собой осадки основания при $t\to 0$ и $t\to\infty$.

Вначале найдем поровое давление P в интервале времени $0 < t < \infty$. Для этой цели используем уравнение вида:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_V \cdot \Delta P - \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk,0}, \tag{8}$$

при начальных условиях:

$$\left. \begin{aligned} P(r,0,t) = P(\infty,z,t) = P(r,\infty,t) = 0; \\ P(r,z,0) = P_0 = q \cdot a \cdot \int_0^\infty J_1(\alpha \cdot a) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot exp(-\alpha \cdot z) \cdot d\alpha. \end{aligned} \right\}, \tag{9}$$

где c_V – коэффициент пространственной консолидации основания [7]; t – время; $\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{kk,0} \equiv 0$.

Потенциал обусловленных отжатием поровой жидкости перемещений и перемещение в направлении оси *0z*, согласно [1], равны:

$$\left. \Phi = \frac{c_V}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \int_0^t P(r,z,\tau) \cdot d\tau; W_P = \frac{\partial}{\partial z} \Phi. \right\}. \tag{10}$$

Здесь Φ – потенциал обусловленных отжатием поровой жидкости перемещений; W_P – обусловленное отжатием поровой жидкости вертикальное перемещение.

Решение ищем в области изображений по Лапласу по переменной «t» [3]. В этом случае равенства (8)…(10) примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega \cdot P^* = c_V \cdot \Delta P^* + q \cdot a \cdot \int_0^\infty J_1(\alpha \cdot a) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot exp(-\alpha \cdot z) \cdot d\alpha; \\ P^*(r,0,\omega) = P^*(\infty,z,\omega) = P^*(r,\infty,\omega) = 0; \\ P^*(r,z,0) = q \cdot a \cdot \int_0^\infty J_1(\alpha \cdot a) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot exp(-\alpha \cdot z) \cdot d\alpha; \\ \Phi^* = \frac{c_V}{\lambda + 2 \cdot G} \cdot \frac{P^*}{\omega}; W_p^* = \frac{\partial}{\partial z} \Phi^*. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Здесь ω – параметр одностороннего преобразования Лапласа [3];

$$P^*(r,z,t)=\int_0^\infty P(r,z,\omega)\cdot e^{(-\omega\cdot t)}\cdot dt \text{, и } \Phi^*(r,z,\omega)=\int_0^\infty \Phi(r,z,t)\cdot e^{(-\omega\cdot t)}\cdot dt$$

– односторонние преобразования по переменной «t» порового давления и потенциальной функции перемещений, обусловленных отжатием поровой жидкости.

Решения верхнего равенства (11) с учетом граничных условий (второе сверху равенство (11)) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&P^*=q\cdot a\cdot\int_0^\infty J_1(\alpha\cdot a)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\frac{exp(-\alpha\cdot z)-exp(-\gamma\cdot z)}{\omega}\cdot d\alpha;\gamma=\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2};\\
&\Phi^*=\frac{c_v}{\lambda+2\cdot G}\cdot q\cdot a\cdot\int_0^\infty J_1(\alpha\cdot a)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\frac{exp(-\alpha\cdot z)-exp(-\gamma\cdot z)}{\omega}\cdot d\alpha;\\
&W_p^*=-\frac{c_v}{\lambda+2\cdot G}\cdot q\cdot a\cdot\int_0^\infty J_1(\alpha\cdot a)\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot\frac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)-\gamma\cdot exp(-\gamma\cdot z)}{\omega^2}\cdot d\alpha.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Оригинал для порового давления (верхнее равенство (12)) был получен Ю.К. Зарецким.

Для построения асимптотики, связывающей значения осадок в нуле и на бесконечности рассмотрим подынтегральную функцию последнего равенства (12) и найдем ее предельные значения при $t\to 0$ и $t\to\infty$. С учетом теоремы операционного исчисления о предельных значениях оригинала имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&F^*(\alpha,\omega)=\frac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)-\gamma\cdot exp(-\gamma\cdot z)}{\omega^2};\gamma=\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2};\\
&\underset{t\to 0}{limit}\left[F(\alpha,t)\right]=\underset{\omega\to\infty}{limit}\left[\omega\cdot F^*(\alpha,\omega)\right]=0;\\
&\underset{t\to\infty}{limit}\left[F(\alpha,t)\right]=\underset{\omega\to 0}{limit}\left[\omega\cdot F^*(\alpha,\omega)\right]=\frac{1+\alpha\cdot z}{\alpha\cdot c_v}\cdot exp(-\alpha\cdot z).
\end{aligned}\right\}. \quad (13)$$

Далее найдем оригинал функции $F^*(\alpha,\omega)$.

1. Оригинал функции $F_1^*(\alpha,\omega)=\dfrac{\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)}{\omega^2}$ имеет вид:

$$F_1^*(\alpha,\omega)=\frac{\alpha\cdot\exp(-\alpha\cdot z)}{\omega^2}\rightleftharpoons\alpha\cdot t\cdot\exp(-\alpha\cdot z). \tag{14}$$

2. Точное нахождение оригинала функции $F_2^*(\alpha,\omega)=\dfrac{\sqrt{\dfrac{\omega}{c_v}+\alpha^2}\cdot exp\left(-z\cdot\sqrt{\dfrac{\omega}{c_v}+\alpha^2}\right)}{\omega^2}$ вызывает значительные затруднения.

Поэтому найдем его асимптотику. Для этой цели используем изложенный в работе [1] алгоритм. В качестве «внутренней» функции выберем экспоненту

$$\varphi=exp\left(-\alpha^2\cdot c_v\cdot t\right). \tag{15}$$

Изображением (15) является функция:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=exp\left(-\alpha^2\cdot c_v\cdot t\right)\rightleftarrows\xi=\frac{1}{\omega+\alpha^2\cdot cv};\\&\underset{\omega\to0}{limit}(\xi)=\frac{1}{\alpha^2\cdot cv};\underset{\omega\to\infty}{limit}(\xi)=0;\end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

С учетом (16), найдем:

$$\omega=\left(1-\xi\cdot\alpha^2\cdot cv\right)\Big/\xi. \tag{17}$$

Далее подставим (17) в функцию $\omega^2\cdot F_2^*(\alpha,\omega)$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}&F_3^*(\alpha,\xi)=\omega^2\cdot F_2^*(\alpha,\xi)=\\&=\underset{\omega\to\frac{1-\xi\cdot\alpha^2\cdot cv}{\xi}}{limit}\left[\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2}\cdot exp\left(-z\cdot\sqrt{\frac{\omega}{c_v}+\alpha^2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{cv\cdot\xi}}\cdot exp\left(\frac{z}{\sqrt{cv\cdot\xi}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

После этого разложим функцию $F_3^*(\alpha,\xi)$ в ряд Тейлора по новой переменной ξ в окрестности точки $\xi=\dfrac{1}{\alpha^2\cdot cv}$ [3]. Поскольку этой точке соответствует значение комплексной переменной $\omega\to0$, эти коэффициенты являются коэффициентами разложения в асимптотический ряд по переменной ‘t’ при $t \to \infty$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&F_3^*(\alpha,\xi) = \omega^2 \cdot F_2^*(\alpha,\xi) = a_0 + \frac{a_1}{1!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot cv} - \xi\right) + \frac{a_2}{2!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot cv} - \xi\right)^2 + \ldots = \\
&= a_0 + \frac{a_1}{1!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot cv} - \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot cv}\right) + \frac{a_2}{2!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot cv} - \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot cv}\right)^2 + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Здесь:

$$\left.\begin{aligned}
&a_0 = \alpha \cdot exp(-\alpha \cdot z); \\
&a_1 = -\frac{1}{2}\cdot\alpha^3 \cdot c_v \cdot (1 - \alpha \cdot z) \cdot exp(-\alpha \cdot z); \\
&a_2 = -\frac{1}{4}\cdot\alpha^5 \cdot c_v^2 \cdot \left(5 \cdot \alpha \cdot z - 3 - \alpha^2 \cdot z^2\right) \cdot exp(-\alpha \cdot z); \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

С учетом (19) и (20), подынтегральная функция (1) может быть представлена в виде:

$$F^*(\alpha,\omega) = \frac{\alpha \cdot exp(-\alpha \cdot z) - \gamma \cdot exp(-\gamma \cdot z)}{\omega^2} \approx$$

$$\frac{1}{\omega^2}\cdot\left\{\alpha \cdot exp(-\alpha \cdot z) - \left[\begin{aligned} &a_0 + \frac{a_1}{1!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot cv} - \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot cv}\right) + \\ &\frac{a_2}{2!}\cdot\left(\frac{1}{\alpha^2 \cdot cv} - \frac{1}{\omega + \alpha^2 \cdot cv}\right)^2 + \ldots \end{aligned}\right]\right\}. \qquad (21)$$

Для практических расчетов достаточно удержать первые два члена ряда (21). Имеем:

$$\begin{aligned}
&F^*(\alpha,\omega) = \frac{\alpha \cdot exp(-\alpha \cdot z) - \gamma \cdot exp(-\gamma \cdot z)}{\omega^2} \approx \\
&\approx \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\alpha}{\omega \cdot \left(\omega + c_v \cdot \alpha^2\right)} - \frac{\alpha^2 \cdot z}{\omega \cdot \left(\omega + c_v \cdot \alpha^2\right)}\right] \cdot exp(-\alpha \cdot z)
\end{aligned}. \qquad (22)$$

Оригинал (22) имеет вид:

$$F(z,\alpha,t)=(1-\alpha\cdot z)/2\cdot c_v\cdot\alpha\cdot exp(-\alpha\cdot z)\cdot\left[1-exp\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right)\right]. \quad (23)$$

Далее найдем функцию $f(z,\alpha,t)$, которая связывает между собой асимптотические значения осадок при $t\to 0$ и $t\to\infty$.

Имеем:

$$f(z,\alpha,t)=\frac{F(z,\alpha,t)}{F(z,\alpha,\infty)}=1-exp\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right). \quad (24)$$

С учетом (24), окончательное решение задачи имеет вид:

$$W(r,z,t)=-\frac{q\cdot a}{2\cdot G}\cdot\int\limits_0^\infty\frac{J_1(\alpha\cdot a)}{\alpha}\cdot\left\{\begin{matrix}1+\begin{bmatrix}(1-2\cdot\nu)+\\+\alpha\cdot z\end{bmatrix}\cdot\\ \cdot\left[1-e^{\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right)}\right]\end{matrix}\right\}\cdot e^{(-\alpha\cdot z)}\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha. \quad (25)$$

Для того, чтобы сопоставить точное и приближенное решения, найдем среднюю осадку верхней границы полупространства. Для этой цели положим в (25) $z=0$, проинтегрируем полученное таким образом выражение по площади и разделим полученный таким образом интеграл на площадь, по которой распределена нагрузка. Имеем:

$$S_{cp}^n(t)=\frac{q\cdot a^2}{2\cdot G}\cdot\int\limits_0^\infty\frac{J_1^2(\alpha\cdot a)}{\alpha^2}\cdot\left\{1+(1-2\cdot\nu)\cdot\left[1-e^{\left(-c_v\cdot\alpha^2\cdot t\right)}\right]\right\}\cdot J_0(\alpha\cdot r)\cdot d\alpha. \quad (26)$$

Для удобства анализа приведем (26) к безразмерному виду [7]. Для этого используем такие формулы:

$$\left.\alpha=\frac{\xi}{a};\ t=\frac{a^2\cdot t^*}{cv};\ S_n^*=\frac{S_{cp}^n\cdot G}{q\cdot a}\right\}, \quad (27)$$

где ξ – безразмерная координата; t^* – безразмерное время;

$\left.\alpha=\frac{\xi}{a};\ t=\frac{a^2\cdot t^*}{cv};\ S_n^*=\frac{S_{cp}^n\cdot G}{q\cdot a}\right\}$ S_n^* – безразмерная приближенная осадка. Из (26), с учетом (27), имеем:

$$S_n^*(t)=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^\infty \frac{J_1^2(\xi)}{\xi^2}\cdot\left\{1+(1-2\cdot\nu)\cdot\left[1-e^{\left(-\xi^2\cdot t\right)}\right]\right\}\cdot d\xi. \qquad (28)$$

Далее приведем (1) к безразмерному виду. При этом учтем, что $c_k=\frac{3\cdot(1-\nu)}{1+\nu}\cdot c_v$ [5]. Имеем:

$$S^*=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^\infty \frac{J_1^2(\xi)}{\xi^2}\cdot\left\{\begin{aligned}&(1-\nu)\cdot\left[1+erf\left(\xi\cdot\sqrt{\frac{3\cdot(1-\nu)}{1+\nu}\cdot t^*}\right)\right]+\\&+\nu\cdot exp\left(-\frac{3\cdot(1-2\cdot\nu)}{1-\nu^2}\cdot\xi^2\cdot t\right)\cdot erfc\left(\xi\cdot\sqrt{\frac{3\cdot\nu^2}{(1-\nu)^2}\cdot t^*}\right)\end{aligned}\right\}\cdot d\xi\Bigg\} \qquad (29)$$

Здесь ξ – безразмерная координата; t^* – безразмерное время; $\left.\alpha=\frac{\xi}{a};\; t=\frac{a^2\cdot t^*}{cv};\; S^*=\frac{S_{cp}\cdot G}{q\cdot a}\right\}$ S^* – безразмерная точная осадка. После этого выполним асимптотические оценки (28) и (29).

$$\left.\begin{aligned}&\text{При } t^*\to 0 \text{ имеем}:\begin{cases}\lim\limits_{t^*\to 0}\left[S^*\left(t^*\right)\right]=\frac{1}{2};\\ \lim\limits_{t^*\to 0}\left[S_n^*\left(t^*\right)\right]=\frac{1}{2}.\end{cases}\\ &\text{При } t^*\to\infty \text{ имеем}:\begin{cases}\lim\limits_{t^*\to 0}\left[S^*\left(t^*\right)\right]=\frac{1-\nu}{2};\\ \lim\limits_{t^*\to 0}\left[S_n^*\left(t^*\right)\right]=\frac{1-\nu}{2}.\end{cases}\\ &\frac{S^*(\infty)}{S^*(0)}=2\cdot(1-\nu);\;\frac{S_n^*(\infty)}{S_n^*(0)}=2\cdot(1-\nu).\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Из (30) вытекает, что при $t^*\to 0$ и $t^*\to\infty$ приближенное и точное решения полностью совпадают (это подтверждает асимптотический характер полученного нами приближенного решения).

При этом две нижние оценки полностью совпадают с полученными Ю.К. Зарецким результатами [8].

На рисунках 2 и 3 представлены результаты сопоставления решений на интервале времен $0 \le t^* \le \infty$ при значении коэффициента Пуассона $\nu = \frac{1}{3}$.

Для удобства анализа графических данных с использованием формул:

$$\left. S^0\left(t^*\right) = \frac{S^*\left(t^*\right)}{S^*(\infty)}; S_n^0\left(t^*\right) = \frac{S^*\left(t^*\right)}{S^*(\infty)}. \right\} \tag{31}$$

была выполнена нормировка выражений (28) и (29) к интервалу $S^0 \in \left[\frac{S^*(0)}{S^*(\infty)}, 1\right]$ и по формулам

$$\left. \varepsilon\left(t^*\right) = \left|\frac{S^*\left(t_i^*\right) - S_n^*\left(t_i^*\right)}{S_n^*\left(t_i^*\right)}\right| \cdot 100\% \;\; и \;\; \sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{S^*\left(t_i^*\right) - S_n^*\left(t_i^*\right)}{S_n^*\left(t_i^*\right)}\right]^2}; \right\} \tag{32}$$

рассчитаны относительная $\varepsilon\left(t^*\right)$ и средняя квадратичная погрешности.

Из рисунка 2 вытекает, что при значениях относительного времени $t^* \le 0{,}1$ д.ед. и $t^* \ge 10^4$ д.ед. точное и приближенное решения совпадают.

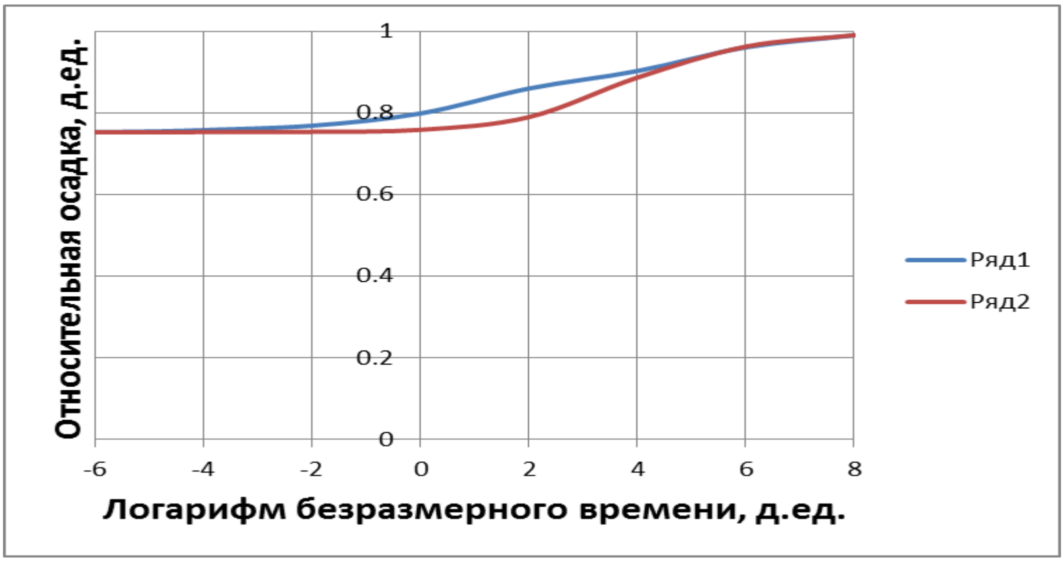

Рис. 2. Зависимости относительных осадок от логарифма времени.

Ряд 1 – точное решение; ряд 2 – то же, приближенное

Рис. 3. Зависимости относительной погрешности от логарифма времени.

При этом относительная погрешность ε не превышает 8%. Кроме того, оказалось, что среднее квадратичное уклонение σ_a (т.е. средняя погрешность) на интервале времен $t^* \in (0,\infty)$ не превышает 3%.

Таким образом, полученные в настоящей работе результаты свидетельствуют о хорошем соответствии результатов точного и приближенного решений задачи.

Список использованной литературы

1. Мосичева И.И., Шаповал А.В. Консолидация водонасыщенного полупространства, к верхней границе которого приложена вертикальная сосредоточенная сила / XXI Международная заочная конференция «развитие науки в XXI веке» (16.01.2017г.), Харьков, 2017 – с. 69-78.

2. Швец В.Б., Шаповал В.Г. Общее решение пространственной задачи теории взаимосвязанной фильтрационной консолидации // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1994. – N5 – С. 19-21.

3. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 840с.

4. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, – 1975. – 872 с.

5. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации // Монография. – Днепропетровск: Пороги, 2009 – 311 с.
6. Шаповал А.В., Шаповал В.Г. Алгоритм побудови асимптотичних рішень задач про осідання водонасичених основ / Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди //Збірник наукових праць. Випуск 28 – Рівне, 2014 – с. 463 – 469.
7. Седов. Л.И. Методы подобия и размерности в механике – М: Наука, 1965 – 388с.
8. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. – М.: Наука. 1967 – 270с.